مدل سازی

محمد حسین پور سعید [۱]

چکیده

در بسیاری از موارد تعیین مدل ریاضی مناسب برای حل یک مسأله، از اهمیتی بالا برخوردار است. در این نوشتار ابتدا با طرح یک مسألهٔ شمارشی در حالتهای مختلف، روشهای حل آن مطرح خواهند شد و سپس در حالتی خاص که روشهای قبلی کارایی ندارند، با معرفی یک مدل ریاضی مناسب، روشی برای حل آن معرفی می شود.

واژه های کلیدی: اصل ضرب، قواعد شمارش، فرمول ترکیب در قواعد شمارش.

مقدمه

یکی از اساسیترین روشهای دستیابی به مطالب جدید علمی، افزایش سطح توانایی در مدل سازی پدیده های مورد مطالعه است. منظور از مدل سازی، بیان یک مسأله به زبان ریاضی است ([۱]). لذا ابتدا با استفاده از قواعد متعارف شمارش، نسبت به حل یک مسأله اقدام می شود و چون به کارگیری این فرمولها منوط به استقلال اعمال فرعی تشکیل دهندهٔ یک عمل است، با طرح مسأله ای تحت شرایطی متفاوت، ضرورت معرفی یک مدل ریاضی را مطرح کرده و سپس برای حل آن الگویی ارائه می شود.

مسألهٔ ۱

الف) فرض کنید می خواهیم تعداد حالتهای قرار دادن ۸ مهرهٔ متمایز شطرنج را روی صفحهٔ شطرنج تعیین کنیم. انجام این عمل منوط به انجام ۸ عمل مستقل است که می توان عمل L و این اعمال فرعی هشتگانه را به صورت زیر تعریف کرد:

عمل قرار دادن ۸ مهرهٔ متمایز روی صفحهٔ شطرنج: L

عمل قرار دادن i ـ امین مهره روی صفحهٔ شطرنج: A_i

$$i = ۱,۲,\ldots,۸$$

با توجه به تعمیم اصل ضرب قواعد شمارش، تعداد کل حالتهای ممکن برابر است با:

$$۶۴ \times ۶۳ \times \ldots \times ۵۸ \times ۵۷ = ۱/۷۸۴۶۲۹۸۷۶ \times ۱۰^{۱۴}$$

ب) حال اگر ۸ مهره را به نحوی روی صفحه قرار دهیم که در هر ردیف فقط یک مهره قرار گیرد، تعداد حالتهای ممکن برابر است با:

$$۸^{۸} \times ۸! = ۶/۷۶۴۵۷۳۴۹۱ \times ۱۰^{۱۱}$$

پ) اگر بخواهیم مهره ها را به گونه ای روی صفحه قرار دهیم که در هر ردیف و هر ستون فقط یک مهره قرار گیرد، تعدادکل حالتهای ممکن برابر است با: $۸! \times ۸! = ۱۶۲۵۷۰۲۴۰۰$.

اکنون در سه حالت بعدی مهره ها را یکسان در نظر می گیریم:

ت) با توجه به فرمول ترکیب، تعداد حالتهایی که می توان ۸ مهرهٔ یکسان را روی صفحهٔ شطرنج قرار داد، برابر است با:

$$\binom{۶۴}{۸} = ۴۴۲۶۱۶۵۳۶۸$$

---

[۱] گروه ریاضی، دانشگاه لرستان

ث) حال اگر ۸ مهرهٔ یکسان را به نحوی روی صفحه قرار دهیم که در هر ردیف فقط یک مهره قرار گیرد، تعداد کل حالتها برابر است با: $16777216 = 8^8$.

ج) اگر ۸ مهرهٔ یکسان به گونه ای روی صفحه قرار گیرند که در هر ردیف و هر ستون فقط یک مهره قرار داشته باشد، تعداد کل حالتهای ممکن برابر است با: $40320 = 8!$.

اگر در هر یک از موارد بالا، برای تعیین تعداد حالتهای ممکن از فرمولهای قواعد شمارش استفاده نشود و با قرار دادن مهره ها بر روی صفحهٔ شطرنج، تعداد حالتهای مساعد تعیین شود، قطعاً خیلی زمانبر خواهد بود. به عنوان مثال اگر برای تعیین هر یک از حالتهای مساعد یک ثانیه وقت لازم باشد، در این صورت مدت زمان لازم برای تعیین کل حالتهای ممکن در هر یک از موارد بالا تقریباً به صورت زیر است:

الف) ۵۶۵۹۰۲۴ سال ب) ۲۱۴۵۰ سال پ) ۵۱/۵ سال

ت) ۱۴۰ سال ث) ۱۹۴ روز ج) ۱۱ ساعت

اکنون به طرح مسأله ای می پردازیم که به سهولت نمی توان در آن از قواعد شمارش استفاده کرد.

مسألهٔ ۲

فرض کنیم می خواهیم تعداد حالتهایی را تعیین کنیم که بتوان ۸ مهرهٔ وزیر (یکسان) را روی صفحهٔ شطرنج طوری قرار داد که این مهره ها با توجه به نقش وزیر در شطرنج، یکدیگر را تهدید نکنند. بدیهی است که باید در هر ردیف و هر ستون صفحهٔ شطرنج، فقط یک مهره قرار گیرد و همچنین مهره ها در قطر یکدیگر نباشند. در این حالت نمی توان از فرمولهایی که در مسألهٔ قبل به کار رفتند استفاده کرد، زیرا تعیین موقعیت هر مهره بستگی به موقعیت سایر مهره های قبلی دارد و به بیانی معادل، این اعمال مستقل از یکدیگر نیستند. از طرفی اگر بخواهیم از طریق قرار دادن مهره ها بر روی صفحهٔ شطرنج، تعداد حالتهای مساعد را تعیین کنیم، خیلی وقت گیر خواهد بود. به عنوان مثال اگر در تعیین اولین حالت مساعد، موقعیت هفت مهرهٔ اول به صورت زیر باشد،

*							
		*					
				*			
						*	
	*						
			*				
					*		

در این صورت نمی توان هیچیک از خانه های ردیف هشتم را برای استقرار هشتمین مهره انتخاب کرد. بنابراین طبق روش آزمون و خطا، باید موقعیت مهرهٔ هفتم را در ردیف هفتم تغییر داده و سپس برای استقرار هشتمین مهره، خانه های ردیف هشتم را بررسی کرد و در صورت بروز مشکل، موقعیت مهره های قبلی را نیز به ترتیب تغییر داد.

همانطور که ملاحظه می شود به کارگیری روش بالا، شبیه مسألهٔ قبل خیلی وقت گیر است. حال فرض کنید مشکل وقت گیر بودن را بتوان با به کار گیری رایانه رفع کرد، در این صورت ابزاری لازم است تا بتوان مفهوم «تهدید نشدن مهره های وزیر توسط یکدیگر» را در قالب یک برنامه به رایانه انتقال داد. به بیان دیگر، یک مدل ریاضی مناسب، برای انتقال این مفهوم لازم داریم. با توجه به روند تعیین موقعیت مهره ها که به آن اشاره شد و با توجه به آرایش ماتریسی، برای تعیین الگوی مناسب می توان به صورت زیر عمل کرد.

اگر زوج مرتب (i,j) بیانگر موقعیت سطری و ستونی یکی از مهره های واقع بر روی صفحهٔ شطرنج باشد، باید:

الف) سایر مهره ها در سطر i ـ ام نباشند، یعنی از زوج مرتبهای زیر برای تعیین موقعیت مهره های دیگر استفاده نشود.

$$(i,1),\dots,(i,j-1),(i,j),(i,j+1),\dots,(i,8)$$

ب) سایر مهره ها در سطر j ـ ام نباشند، یعنی از زوج مرتبهای زیر برای تعیین موقعیت مهره های دیگر استفاده نشود.

$$(\text{۱}, j), \ldots, (i - \text{۱}, j), (i, j), (i + \text{۱}, j), \ldots, (\text{۸}, j)$$

پ) سایر مهره ها در قطر مربوط به مهرهٔ واقع در موقعیت (i,j) نباشند، یعنی نباید از موقعیتهای زیر برای استقرار مهره های دیگر استفاده شود.

$$(i-\text{۲}, j-\text{۲}) \qquad (i-\text{۲}, j+\text{۲})$$
$$(i-\text{۱}, j-\text{۱}) \qquad (i-\text{۱}, j+\text{۱})$$
$$(i, j)$$
$$(i+\text{۱}, j-\text{۱}) \qquad (i+\text{۱}, j+\text{۱})$$
$$(i+\text{۲}, j-\text{۲}) \qquad (i+\text{۲}, j+\text{۲})$$

نظر به اینکه هدف از ارائهٔ این مطالب فقط در حد معرفی یک مدل ریاضی مناسب است، لزومی در معرفی برنامهٔ رایانه ای مربوطه نخواهد بود. با این حال اگر سه بند الف، ب و پ را در مورد موقعیت کل مهره ها و در قالب یک برنامهٔ رایانه ای مناسب با به کارگیری حلقه های تکراری تودرتو اعمال کنیم، همهٔ ۹۲ حالت مساعد مشخص خواهند شد. یکی از این حالتها به صورت زیر است:[۲]

*							
						*	
				*			
							*
	*						
			*				
					*		
		*					

مراجع

[۱] بخشعلی زاده، شهرناز، پاشا،عین الله و رستگار، آرش، آمار و مدل سازی سال دوم آموزش متوسطه، چاپ اول ۱۳۷۹، صفحهٔ ۸.

[2] Wirth, Niklaus, Algorithms + Data Structure = Programs, By Prentice-Hall, Inc. 1979, Englewood Cliffs, Newjersey, P. 144.