کاربرد نماد جمع بندی در شمارش

محمد حسین پور سعید[۱]

چکیده

در حل بعضی از مسائل، نمی‌توان از قواعد و فرمولهای متعارف شمارش استفاده کرد. لذا در این مقاله بر پایهٔ به کارگیری نماد جمع بندی، یک روش مناسب معرفی می‌شود تا از آن بتوان به عنوان مثال در تعیین تعداد حالات انتخاب r کارت از n کارت با شماره های ۱ تا n استفاده کرد به طوری که بین شماره‌های کارتهای انتخابی رابطه‌ای خطی یا غیرخطی برقرار باشد.

واژه های کلیدی: قواعد شمارش، حجرهٔ r-بعدی، نقاط مشبکه.

۱. مقدمه

در تعیین تعداد حالات انجام یک عمل که وقوع آن منوط به انجام چندین عمل فرعی مستقل است، می‌توان از قواعد شمارش استفاده کرد؛ حال آن که اگر اعمال فرعی وابسته به هم باشند، نمی‌توان از آن قواعد بهره برد. به عنوان مثال اگر از n کارت با شماره‌های ۱ تا n ، r کارت به طور تصادفی انتخاب شود و بخواهیم تعداد حالاتی را تعیین کنیم که شمارهٔ کارتهای انتخابی متوالی یا مضربی از یکدیگر باشند، نمی‌توان از فرمولهای متعارف شمارش استفاده کرد، زیرا تعداد حالات انتخاب هر کارت به وضعیت و شمارهٔ سایر کارتها بستگی داشته و اعمال انتخاب کارتها مستقل از یکدیگر نخواهند بود. در این صورت از نماد جمع‌بندی که ابزار کارآمدی در امر شمارش است، می‌توان استفاده کرد [۳].

برای روشن شدن بحث، فرض کنید می‌خواهیم تعداد حالات انتخاب ۲ کارت از n کارت مذکور را تعیین کنیم به طوری که شمارهٔ کارت اول کمتر از شمارهٔ دومین کارت باشد. پس اگر دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 را شمارهٔ کارتهای انتخابی بدانیم آنگاه می‌توان به طور معادل تعداد نقاط مشبکه واقع در ربع اول صفحهٔ دکارتی با مختصات (x_1, x_2) را در نظر گرفت به طوری که $x_1 < x_2$ (در شکل (۱) موقعیت نقاط مشبکهٔ متناظر نشان داده شده است). از طرفی همان طوری که با انتگرال‌گیری می‌توان مساحت یک ناحیه را محاسبه کرد، تعداد نقاط مشبکهٔ واقع در یک محدوده را نیز می‌توان با توجه به عبارت

$$\prod_{i=1}^{k} m_i = \sum_{x_k=1}^{m_k} \sum_{x_{k-1}=1}^{m_{k-1}} \dots \sum_{x_1=1}^{m_1} 1$$

تعیین کرد. لذا برای محاسبهٔ تعداد نقاط مشبکه، شبیه تعیین حدود انتگرال مضاعف، با تعیین حدود تغییرات متغیرهای x_1 و x_2 و به‌کارگیری نماد جمع‌بندی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

بنابراین در حالت کلی اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام گیرد و وقوع عمل L منوط به انجام اعمال A و B باشد، آنگاه عمل L به $m \times n$ حالت انجام می‌گیرد که هر یک از این حالات، شامل عضوی از اعضای A و عضوی از اعضای B است. پس می توان به طور معادل $m \times n$ نقطهٔ مشبکهٔ متناظر با آنها را در داخل مستطیلی واقع در صفحهٔ دکارتی در نظر گرفت و در صورت وجود قیود یا محدودیتهایی در انجام دو یا چند عمل، نقاط متناظر با آنها را در

[۱] گروه ریاضی، دانشگاه لرستان

داخل مستطیل یا حجرهٔ چند بعدی در نظر داشت تا برای تعیین تعداد نقاط مشبکهٔ متناظر، بتوان حدود تغییرات متغیرهای مربوطه و نمادهای جمع بندی مکرر را به آسانی تعیین کرد.

۲. نتایج اصلی

با توجه به مطالب بالا و در قالب بیان یک قضیه، طرح یک مسئله و حل چند مثال روش پیشنهادی را معرفی می کنیم.

قضیه: اگر از n کارت با شماره های ۱ تا n ، r کارت به روش با جایگذاری انتخاب شود، احتمال آنکه شمارهٔ i ـ امین کارت انتخابی، $i = 1,\dots,r-1$ ، لااقل k_i واحد کمتر یا مساوی شمارهٔ کارت بعدی باشد، برابر است با :

$$\frac{\binom{n+r-1-\sum_{j=1}^{r-1}k_j}{r}}{n^r}.$$

اثبات: در حالتی خاص که k_i ها مقادیری مثبت و یکسان هستند، قبلاً مسئله مورد بررسی قرار گرفته است [۳]. در این حالت نیز برای تعیین تعداد حالات مساعد، اگر متغیر تصادفی X_i را شمارهٔ i ـ امین کارت انتخابی بدانیم، با توجه به قید مطرح شده باید داشته باشیم:

$$x_1 \le x_2 - k_1 \;,\; x_2 \le x_3 - k_2 \;,\; \dots \;,$$
$$x_i \le x_{i+1} - k_i \;,\; \dots \;,\; x_{r-1} \le x_r - k_{r-1}$$

که با فرض نامنفی بودن k_i ها، می توان عبارت بالا را به صورت زیر نوشت:

$$1 \le x_1 \le x_2 - k_1 \le x_3 - (k_1 + k_2) \le \dots \qquad (1)$$
$$\le x_{r-1} - \sum_{j=1}^{r-2}k_j \le x_r - \sum_{j=1}^{r-1}k_j \le n - \sum_{j=1}^{r-1}k_j$$

حال باید تعداد نقاط مشبکه‌ای از فضای r بعدی که موقعیت آنها تحت رابطهٔ (۱) می‌باشد، را تعیین کنیم. بنابراین با توجه به حدود تغییرات متغیرها در رابطهٔ (۱) و به کارگیری نماد جمع‌بندی، داریم:

$$\sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1}k_j+1}^{n}\ \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2}k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_2=k_1+1}^{x_3-k_2}\ \sum_{x_1=1}^{x_2-k_1} 1 =$$

$$\sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1}k_j+1}^{n}\ \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2}k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_3=k_1+k_2+1}^{x_4-k_3}\ \sum_{x_2=k_1+1}^{x_3-k_2}(x_2 - k_1)$$

ابتدا با تغییر متغیر $j = x_2 - k_1$ و استفاده از فرمول

$$\sum_{j=1}^{n} j = \binom{n+1}{2}$$

و سپس تغییر متغیر $j = x_3 - (k_1 + k_2 + 1)$ خواهیم داشت:

$$= \sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1}k_j+1}^{n}\ \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2}k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_3=k_1+k_2+1}^{x_4-k_3}\ \sum_{j=1}^{x_3-(k_1+k_2)} j$$

$$= \sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1}k_j+1}^{n}\ \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2}k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_3=k_1+k_2+1}^{x_4-k_3}\binom{x_3-(k_1+k_2)+1}{2}$$

$$= \sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1}k_j+1}^{n}\ \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2}k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_4=\sum_{j=1}^{3}k_j+1}^{x_5-k_4}\ \sum_{j=0}^{x_4-\sum_{j=1}^{3}k_j-1}\binom{j+2}{j}$$

عبارت بالا را نیز می توان به صورت زیر نوشت: [۱]

$$= \sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1}k_j+1}^{n}\ \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2}k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_5=\sum_{j=1}^{4}k_j+1}^{x_6-k_5}\ \sum_{x_4=\sum_{j=1}^{3}k_j+1}^{x_5-k_4}\binom{x_4-\sum_{j=1}^{3}k_j+2}{3}$$

$$= \sum_{x_r=\sum_{j=1}^{r-1}k_j+1}^{n}\ \sum_{x_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-2}k_j+1}^{x_r-k_{r-1}} \dots \sum_{x_5=\sum_{j=1}^{4}k_j+1}^{x_6-k_5}\ \sum_{j=0}^{x_5-\sum_{j=1}^{4}k_j-1}\binom{j+3}{j}$$

که بعد از انجام محاسبات عبارت زیر به دست می‌آید:

$$= \binom{n+r-1-\sum_{j=1}^{r-1}k_j}{r} \qquad (2)$$

صحت رابطهٔ بالا را می توان به کمک استقراء و برای هر مقدار r به آسانی نشان داد. بنابراین اگر $\sum_{j=1}^{r-1}k_j \le n-1$ آنگاه احتمال پیشامد مطلوب برابر است با:

$$\frac{\binom{n+r-1-\sum_{j=1}^{r-1}k_j}{r}}{n^r}.$$

نکته ـ اگر کارتها به روش بدون جایگذاری انتخاب شوند، تعداد حالات مساعد را نیز می توان با استفاده از رابطهٔ (۲) تعیین کرد. همچنین انتخاب r شیء از n شیء متمایز به روش بدون جایگذاری معادل با انتخاب r کارت از n کارت مذکور است، به طوری که شمارهٔ هر کارت انتخابی لااقل یک واحد کمتر یا مساوی شمارهٔ کارت بعدی باشد و تعداد حالاتی که می توان r شیء را از n شیء متمایز و به روش با جایگذاری انتخاب کرد، معادل است با تعداد حالات انتخاب r کارت از n کارت مورد نظر به طوری که $k_i = 0$، $i = 1,2,\dots,r-1$، که باز حالت خاصی از رابطهٔ (۲) به شمار می‌رود و مقدار آن برابر است با: [۲]

$$\binom{n+r-1}{r}.$$

مثال: اگر از صد کارت با شماره های ۱ تا ۱۰۰ سه کارت به روش با جایگذاری انتخاب شود، مطلوب است احتمال آن که شمارهٔ کارت دوم لااقل ۱۰ واحد بیشتر یا مساوی شمارهٔ کارت اول و شمارهٔ کارت سوم لااقل ۲۰ واحد بیشتر یا مساوی شمارهٔ کارت دوم باشد.

حل: با استفاده از قضیهٔ بالا داریم:

$$n=100 \quad , \quad r=3 \quad , \quad k_1=10 \quad , \quad k_2=20$$

$$P(.)=\frac{\binom{100+3-1+(10+20)}{3}}{(100)^3}=\frac{59640}{(100)^3}\cong 0.06$$

حال موضوع را تحت شرایطی متفاوت با قضیهٔ قبل و در قالب مسئلهٔ زیر پی می گیریم.

مسئله: اگر از n کارت با شماره های ۱ تا n، r کارت به روش با جایگذاری انتخاب شود، مطلوب است تعداد حالاتی که i ـ امین کارت انتخابی، $i=1,2,\dots,r-1$، حداکثر k_i برابر شمارهٔ کارت بعدی باشد.

حل: در این حالت نیز شبیه موارد پیشین، اگر متغیر تصادفی X_i را شمارهٔ i ـ امین کارت انتخابی بدانیم، داریم:

$$x_1 \le k_1 x_2 \ , \ x_2 \le k_2 x_3 \ , \ \dots \ , \ x_i \le k_i x_{i+1} \ , \ \dots \ , \ x_{r-1} \le k_{r-1} x_r$$

با توجه به روابط بالا و استفاده از نماد جمع بندی، می توان تعداد حالات مساعد را تعیین کرد ولی چون تعیین حدود نمادهای جمع‌بندی به مقادیر مشخص n و r بستگی دارد و تعیین فرمولی کلی مقدور نیست. در حالتی خاص و در قالب مثال قبل توضیحات بیشتری ارائه می شود.

در محاسبهٔ تعداد حالاتی که شمارهٔ کارت اول حداکثر پنج برابر شمارهٔ کارت دوم و شمارهٔ کارت دوم حداکثر هفت برابر شمارهٔ کارت سوم باشد، ابتدا حدود تغییرات x_1, x_2, x_3 را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$1 \le x_3 \le 2 \quad , \quad 1 \le x_2 \le 7x_3 \quad , \quad 1 \le x_1 \le 5x_2$$
$$3 \le x_3 \le 14 \quad , \quad 1 \le x_2 \le 20 \quad , \quad 1 \le x_1 \le 5x_2$$
$$3 \le x_3 \le 14 \quad , \quad 21 \le x_2 \le 7x_3 \quad , \quad 1 \le x_1 \le 100$$
$$15 \le x_3 \le 100 \quad , \quad 1 \le x_2 \le 20 \quad , \quad 1 \le x_1 \le 5x_2$$
$$15 \le x_3 \le 100 \quad , \quad 21 \le x_2 \le 100 \quad , \quad 1 \le x_1 \le 100$$

بنابراین تعداد حالات مساعد برابر است با:

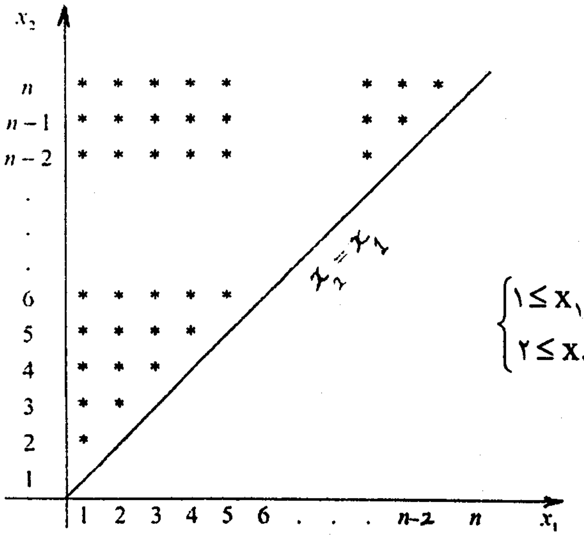
$$\sum_{x_3=1}^{2}\sum_{x_2=1}^{7x_3}\sum_{x_1=1}^{5x_2}1+\sum_{x_3=3}^{14}\left[\sum_{x_2=1}^{20}\sum_{x_1=1}^{5x_2}1+\sum_{x_2=21}^{7x_3}\sum_{x_1=1}^{100}1\right]+\sum_{x_3=15}^{100}\left[\sum_{x_2=1}^{20}\sum_{x_1=1}^{5x_2}1+\sum_{x_2=21}^{100}\sum_{x_1=1}^{100}1\right]=838965$$

در بعضی حالات، با تلفیقی از موارد ذکر شده و نیز استفاده از نماد جمع بندی، می توان تعداد حالات مساعد و احتمال مربوط به یک پیشامد را محاسبه کرد. به عنوان مثال، مجددا با در نظر گرفتن مثال مطرح شده، برای تعیین تعداد حالات وقتی که روابط $x_2 \ge 2x_3^3+7$ و $x_1 \le 5x_2$ در بین شمارهٔ کارتهای انتخابی برقرار باشد، می توان به صورت زیر عمل کرد:

$$x_3 = 1 \quad , \quad 9 \le x_2 \le 20 \quad , \quad 1 \le x_1 \le 5x_2$$
$$x_3 = 1 \quad , \quad 21 \le x_2 \le 100 \quad , \quad 1 \le x_1 \le 100$$
$$2 \le x_3 \le 3 \quad , \quad 2x_3^3+7 \le x_2 \le 100 \quad , \quad 1 \le x_1 \le 100$$

بنابراین کل حالات مساعد برابر است با:

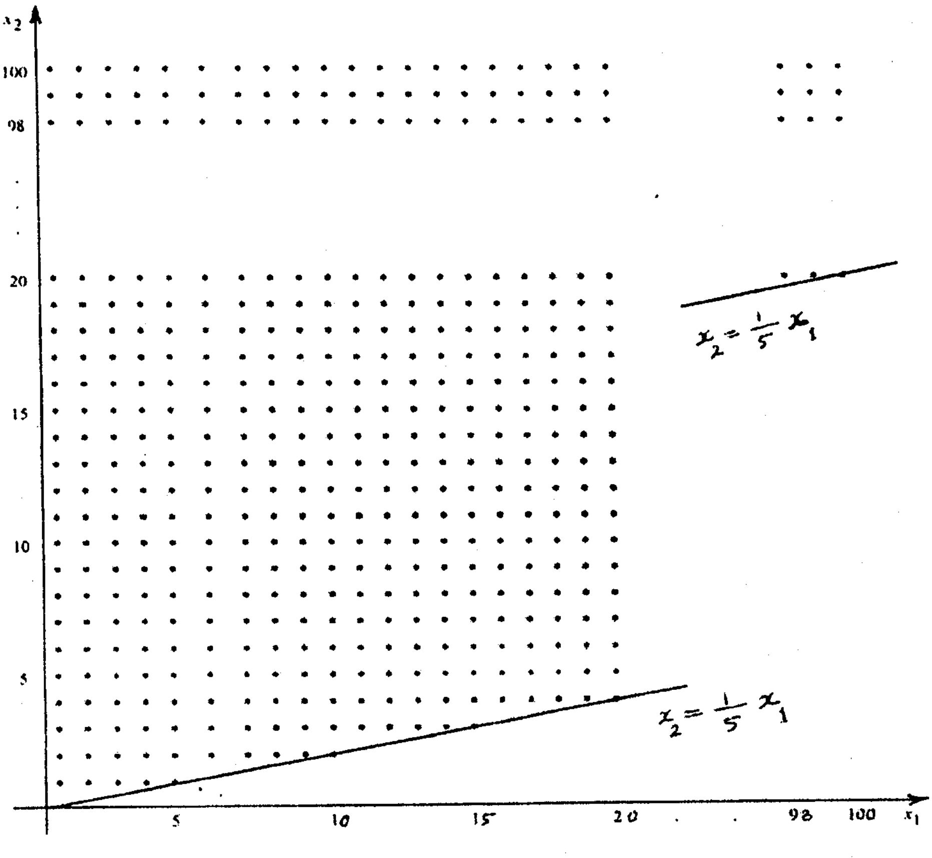
$$\left[\sum_{x_2=9}^{20}\sum_{x_1=1}^{5x_2}1+\sum_{x_2=21}^{100}\sum_{x_1=1}^{100}1\right]+\sum_{x_3=2}^{3}\sum_{x_2=2x_3^3+7}^{100}\sum_{x_1=1}^{100}1=20670.$$



$$\{(x_1,x_2)\in Z^2 : 1\le x_1 < x_2\}$$

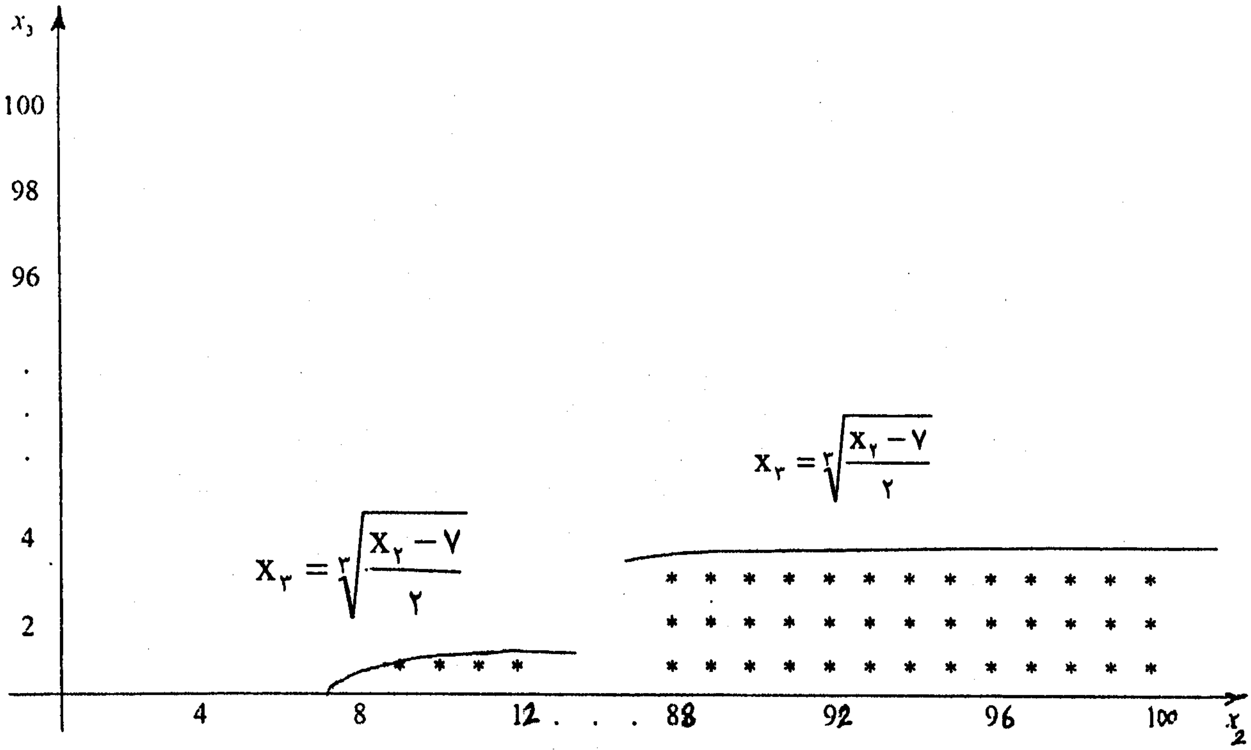
$$\begin{cases}1\le x_1 < x_2\\ 2\le x_2 \le n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\le x_1 \le x_2-1\\ 2\le x_2 \le n\end{cases}\Rightarrow\sum_{x_2=2}^{n}\sum_{x_1=1}^{x_2-1}1=\frac{n(n-1)}{2}$$

شکل ۱



$$\{(x_1,x_2)\in Z^2 : 1\le x_1 \le 5x_2\}$$

شکل ۲



$$\{(x_2, x_3) \in Z^2 : x_2 \geq 2x_3^3 + 7\}$$

شکل ۳

مراجع

[1] Ross, Sheldon, *A First Cource in Probability,* Mac Millan Publishing Co., 1976.

[۲] بالا کریشنان، و. ک.، ریاضیات گسسته مقدماتی، ترجمه دکتر بیژن شمس و دکتر محمد علی رضوانی، انتشارات فاطمی، چاپ اول، ۱۳۷۵.

[۳] پورسعید، محمد حسین، ارائه و تعمیم یک روش برای حل یک مسئله احتمالی، گلچین ریاضی، جلد ٤ ، شماره ۱ ، ۱۳۷۵.