فرایند وینر و انتگرال تصادفی نسبت به آن (انتگرال ایتو[۱])

حمید رضا مصطفایی[۲]

چکیده

در این مقاله فرایند وینر را معرفی می کنیم و پیوستگی و مشتق پذیری و انتگرال پذیری مسیرهای نمونه ای آن را بررسی کرده و انتگرال تصادفی نسبت به فرایند وینر را تعریف می کنیم و نشان می دهیم که با انتگرال ریمان استیلتیس متفاوت است.

مقدمه

در سالهای اخیر مدل سازی ریاضی به دلیل کاربرد وسیع آن در علوم، مورد توجه قرار گرفته است. قسمت عمده ای از این مدلها در قالب فرایندهای تصادفی می‌باشند. دو مدل ریاضی برای توصیف حرکت ذره ای که تحت بمباران مولکولی قرار گرفته است عبارت اند از:

۱) فرایند وینر[۳]

۲) معادلات دیفرانسیل تصادفی[۴] (SDEs)

در این مقاله، ابتدا در بخش اول کلیات مورد نیاز و مفاهیم مقدماتی مطرح شده است. در بخش دوم فرایند انتشار را تعریف می‌کنیم و فرایند وینر را نیز معرفی و آن را به عنوان یک حالت خاص از فرایند انتشار بیان کرده و آن را از نظر پیوستگی مشتق پذیر و انتگرال پذیری مورد بررسی قرار می‌دهیم و در بخش سوم انتگرال ایتو را معرفی و دستور ایتو را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

---

[۱] Ito's Integral

[۲] عضو هیأت علمی واحد تهران شمال، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات

۱. کلیات

۱ـ۱ تعریف ـ فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و مجموعهٔ اندیس‌گذار T را در نظر بگیرید. یک فرایند تصادفی $X = \{X(t); t \in T\}$ یک تابع $X : T \times \Omega \to R$ از دو متغیر است به طوری که برای هر $t \in T$، $X(t) = X(t,.)$ یک متغیر تصادفی و برای هر $\omega \in \Omega$، $X(.,\omega) : \Omega \to R$ یک تجسم یا مسیر نمونه‌ای از فرایند تصادفی نامیده می‌شود[۲].

۲ـ۱ رده‌بندی فرایندهای تصادفی ـ فرایندهای تصادفی بر اساس فضای وضعیت S و مجموعهٔ اندیس گذار T و روابط متقابل بین $X(t)$ ها رده‌بندی می‌شوند[۷].

۱) فضای وضعیت ـ فضایی است که مقادیر ممکن هر $X(t)$ در آن قرار دارد. اگر $S = \{0,1,2,...\}$ باشد، فرایند را با مقدار صحیح یا یک فرایند با وضعیت گسسته نامیده و اگر $S = R$ باشد، آنگاه فرایند را با فضای وضعیت پیوسته می‌نامیم.

---

[۳] Winer Process

[۴] Stochastic Differential Equation (SDEs)

[Downloaded from andisheamari.irstat.ir on 2025-05-21]

[redacted]

۲) مجموعهٔ اندیس گذار T - اگر $T = \{0,1,2,\ldots\}$ باشد، آنگاه فرایند X را یک فرایند زمان گسسته و اگر $T = [0,\infty)$ باشد، آنگاه فرایند X را یک فرایند زمان پیوسته می‌نامیم.

۳) در ذیل چند نوع کلاسیک از فرایندهای تصادفی که با روابط مختلف بین $X(t)$ مشخص می‌شوند، را معرفی می‌نماییم.

۱-۳ فرایند با نموهای مستقل - هرگاه متغیرهای تصادفی $X(t_n) - X(t_{n-1}), \ldots, X(t_2) - X(t_1)$ به ازای جمیع مقادیر $t_1, \ldots, t_n$ که $t_1 < \ldots < t_n$ مستقل باشند، آنگاه فرایند را با نموهای مستقل می‌نامیم.

۲-۳ تعریف - فرایند تصادفی X را اکیدا ایستا می گوییم هرگاه توابع توزیع مشترک خانواده‌های $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ و $(X(t_1+h), X(t_2+h), \ldots, X(t_n+h))$ از متغیرهای تصادفی به ازای $h > 0$ و $t_1, \ldots, t_n \in T$ یکسان باشد. همچنین فرایند X را وسیع ایستا می‌نامیم اگر دارای گشتاور مرتبهٔ دوم متناهی و $\mathrm{cov}(X(t), X(t+h))$ فقط تابعی از h باشد.

۳-۳ فرایند مارکوف - فرایند تصادفی X را با این خاصیت که $X(s)$ به ازای $s > t$ به مقادیر $X(u)$ که $u < t$ بستگی نداشته باشد، فرایند مارکوف می‌نامیم.

$$\forall t_1 < \ldots < t_n < t :$$

$$\Pr(a \le X(t) \le b \mid X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n) = \Pr(a \le X(t) \le b \mid X(t_n) = x_n)$$

۲. فرایند انتشار[۵] و فرایند وینر

فرض کنید $X = \{X(t); t \in [0,\infty)\}$ یک فرایند مارکوف با تابع احتمال تغییر وضعیت

$$P(s,x;t,B) = P(X(t) \in B \mid X(s) = x) \quad ; s < t$$

باشد که $P(s,x;t,.)$ تابع احتمال روی δ- میدان بورل $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه‌های بورل R می‌باشد چگالی تغییر وضعیت فرایند نامیده و داریم:

$$\forall B \in \mathcal{B} ; P(s,x;t,B) = \int_B P(s,x;t,y)dy \qquad (۱\text{-}۲)$$

۱-۲ تعریف - فرایند مارکوف با چگالی تغییر وضعیت $P(s,x;t,y)$ را یک فرایند انتشار می‌نامیم، اگر سرحد زیر برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $s \ge 0$ و هر $x \in R$ موجود باشد: [۲]

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(s,x;t,y)dy = 0 \qquad (۲\text{-}۲)$$

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<\varepsilon} |y-x| P(s,x;t,y)dy = a(s,x) \qquad (۳\text{-}۲)$$

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<\varepsilon} (y-x)^2 P(s,x;t,y)dy = b^2(s,x) \qquad (۴\text{-}۲)$$

به طور کلی a و b توابع خوش تعریف هستند. حد (۲-۲) مانع از این می‌شود که فرایند انتشار، جهشهای لحظه‌ای داشته باشد و کمیتهای $a(s,x)$ و $b(s,x)$ را انباشتگی و ضریب انتشار در زمان s و مکان x از فرایند انتشار می‌نامیم.

$$a(s,x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E(X(t) - X(s) \mid X(s) = x) \qquad (۵\text{-}۲)$$

را نسبت لحظه‌ای تغییرات میانگین از فرایند $X(t)$ با $X(s) = x$ و همچنین مربع ضریب انتشار

$$b^2(s,x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E((X(t) - X(s))^2 \mid X(s) = x) \qquad (۶\text{-}۲)$$

را نسبت لحظه‌ای از میانگین مربع تغییرات فرایند $X(t)$ با $X(s) = x$ می‌باشد.

۲-۲ قضیهٔ پیوستگی کولموگروف - [۶،۵،۱] فرض کنید $X = \{X(t), t \in T\}$ یک فرایند تصادفی زمان پیوسته و α، β، c و h ثابتهای مثبت باشند، به طوری که

$$\forall s,t \quad , |t-s| \le h$$

$$E(|X(t) - X(s)|)^{\alpha} \le c|t-s|^{1+\beta}$$

آنگاه $X = \{X(t), t \in T\}$ با احتمال یک دارای مسیرهای نمونه‌ای پیوسته است.

---

[۵] Diffusion Process

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

۳ـ۲ تعریف فرایند وینر ـ فرایند تصادفی $\{W(t); t \geq 0\}$ را فرایند وینر می گوییم هرگاه:

i) هر نمو $W(t+s)-W(s)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ_t^2 باشد که σ یک پارامتر ثابت است.

ii) به ازای هر جفت فاصلهٔ زمانی از هم جدا مثلاً $[t_3, t_4]$ و $[t_1, t_2]$ که $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$، نموهای $W(t_4)-W(t_3)$ و $W(t_2)-W(t_1)$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیعهای داده شده در (۱) باشند و به همین ترتیب در مورد n فاصلهٔ زمانی از هم جدا که n عدد صحیح مثبت دلخواه می‌باشند.

iii) $W(0)=0$ و $W(t)$ در $t=0$ پیوسته باشد.

معمولاً $\sigma_t^2 = 1$ فرض می‌شود و فرایند را فرایند وینر استاندارد می نامیم.

مثال ـ فرایند وینر استاندارد یک فرایند انتشار با انباشتگی $a(s,x)=0$ و ضریب انتشار $b(s,x)=1$ می‌باشد:

$$a(s,x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E(W(t)-W(s) \mid W(s)=x)$$

$$= \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E(W(t)-W(s)) = 0$$

$$b^2(s,x) = \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E((W(t)-W(s))^2 \mid W(s)=x)$$

$$= \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E(W(t)-W(s))^2$$

$$= \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s}(t-s) = 1$$

سه مسألهٔ اساسی دربارهٔ فرایند وینر

مسألهٔ اول ـ فرایند وینر دارای مسیرهای نمونه‌ای پیوسته است.

اگر $W = \{W(t), t \geq 0\}$ یک فرایند وینر استاندارد باشد، آنگاه داریم:

$$W(t)-W(s) \sim N(0, t-s)$$

$$\forall t > s \geq 0; \quad E(|W(t)-W(s)|^4) = 3|t-s|^2$$

لذا بنابر قضیهٔ پیوستگی کولموگروف، فرایند وینر با احتمال یک دارای مسیرهای نمونه ای پیوسته است.

۴ـ۲ قضیه ـ [۸] فرض کنید $W = \{W(t), t \geq 0\}$ یک فرایند وینر با پارامتر σ^2 باشد و f و g توابع پیوستهٔ مشتق پذیر روی فاصلهٔ $[a,b]$ باشند، آنگاه داریم:

$$E\left(\int_a^b f'(t)(W(t)-W(a))dt\right) \times \left(\int_a^b g'(t)(W(t)-W(a))dt\right) = \sigma^2 \int_a^b (f(t)-f(b))(g(t)-g(b))dt.$$

مسألهٔ دوم ـ فرایند وینر در هیچ نقطه ای مشتق پذیر نیست. [۸،۷]

روش اول ـ فرض کنید $W = \{W(t), t \geq 0\}$ یک فرایند وینر با پارامتر σ^2 باشد، لذا

$$E\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{|h|}$$

$$\lim_{h \to 0} E\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)^2 = \infty \qquad (۷ـ۲)$$

چنانچه فرایند وینر مشتق پذیر می‌بود، آنگاه

$$\lim_{h \to 0} E\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h} - W'(t)\right)^2 = 0$$

در نتیجه

$$\lim_{h \to 0} E\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)^2 = E(W'(t))^2 \qquad (۸ـ۲)$$

که این با رابطهٔ (۲ـ۷) متناقض است.

روش دوم ـ در این روش ابتدا قانون مکرر لگاریتم[۶] را بدون اثبات بیان می‌کنیم، سپس مشتق پذیر نبودن فرایند وینر را به کمک این دو اثبات می‌کنیم.

۵ـ۲ قانون مکرر لگاریتم ـ [۷] شکل اصلی قانون مکرر لگاریتم برای فرایند وینر می گوید که:

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \log\log(1/t)}} = 1$$

(۹ـ۲)

[۶] LIL: Law of the Integrated Logarithm

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

$$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \log\log(1/t)}} = -1$$

پیشامدهایی با احتمال یک هستند.

۲ـ۶ لم ـ [۷] فرض کنید که $W = \{W(t), t \geq 0\}$ یک فرایند وینر باشد، آنگاه برای هر $s \geq 0$ فرایند $W = \{W(t+s) - W(s), s \geq 0\}$ نیز یک فرایند وینر می باشد.

حال نشان می دهیم که فرایند $W = \{W(t+s) - W(s), s \geq 0\}$ در $t = 0$ مشتق پذیر نیست.

بنابر تعریف $\limsup$ و $\liminf$ داریم:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists t_n \downarrow 0;$$

$$\frac{W(t_n + s) - W(s)}{\sqrt{2t_n \log\log(1/t_n)}} > (1 - \varepsilon) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{W(t_n + s) - W(s)}{t_n} > (1 - \varepsilon)\sqrt{\frac{2\log\log(1/t_n)}{t_n}} \qquad (۲ـ۱۰)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists t'_n \downarrow 0;$$

$$\frac{W(t'_n + s) - W(s)}{\sqrt{2t'_n \log\log(1/t'_n)}} \leq (-1 + \varepsilon)$$

حال اگر $n \to \infty$، آنگاه $t_n, t'_n \downarrow 0$ و لذا

$$\sqrt{\frac{2\log\log(1/t_n)}{t_n}} \to \infty$$

در نتیجه

$$\frac{W(t_n + s) - W(s)}{t_n} \to \infty$$

و

$$\frac{W(t'_n + s) - W(s)}{t'_n} \to -\infty$$

لذا مسیرهای نمونه ای از $W(t)$ با احتمال یک، تابع مشتق پذیر از زمان نمی‌باشند. لذا تابعهای نمونه‌ای از فرایند وینر با احتمال یک در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیستند.

۲ـ۷ تعریف نوفهٔ سفید (مشتق فرایند وینر) ـ فرض می‌کنیم $W = \{W(t), t \geq 0\}$ یک فرایند وینر استاندارد باشد و برای $h > 0$ ثابت تعریف می کنیم $\varepsilon_h = \{\varepsilon^h(t), t \geq 0\}$ را به طوری که برای هر $t \geq 0$

$$\varepsilon^h(t) = \frac{W(t+h) - W(t)}{h}$$

باشد. اگر $h \to 0$، $\lim_{h \to 0} \varepsilon^h(t) = \varepsilon(t)$ را نوفهٔ سفید (مشتق فرایند وینر) می‌نامیم. ثابت شد فرایند وینر در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیست، لذا نوفهٔ سفید به معنی یک «فرایند تصادفی» نبوده و قابل تجسم فیزیکی هم نمی‌باشد.

مسألهٔ سوم ـ انتگرال گیری از فرایند وینر [۸] ـ فرض می کنیم $W = \{W(t), t \geq 0\}$ یک فرایند وینر با پارامتر σ^2 و f تابعی مشتق پذیر روی فاصلهٔ $[a,b]$ باشد به طوری که a و b متناهی باشند. از آنجایی که فرایند وینر مشتق پذیر نمی باشد، لذا انتگرالهای زیر به مفهوم معمولی وجود ندارند:

$$\int_a^b f(t)\,dW(t) \qquad (۱)$$

$$\int_a^b f(t)W'(t)\,dt \qquad (۲)$$

اما انتگرال (۲) را با شرط این که حد وجود داشته باشد، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\int_a^b f(t)W'(t)\,dt = \lim_{h \to 0} \int_a^b f(t)\left[\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right]dt$$

برای اطمینان از موجود بودن حد و محاسبهٔ آن داریم:

$$\int_a^b f(t)\left[\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right]dt =$$

$$\int_a^b f(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} W(s)\,ds\right)dt$$

در نتیجه با انتگرال گیری جزء به جزء، سمت راست رابطهٔ بالا برابر است با:

$$= \left[f(t)\frac{1}{h}\int_t^{t+h} W(s)\,ds\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} W(s)\,ds\right)dt$$

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

از طرفی فرایند وینر دارای توابع نمونه‌ای پیوسته می‌باشد. لذا طرف راست رابطهٔ بالا چنانچه $h \to ۰$ به

$$f(t)W(t)\big|_a^b - \int_a^b f'(t)W(t)dt$$

همگرا می‌باشد. اگر $h \to ۰$ آنگاه $\int_a^b f(t)dW(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^b f(t)dW(t) = f(b)W(b) - f(a)W(a) - \int_a^b f'(t)W(t)dt$$

۳. انتگرال ایتو

در این بخش انتگرال تصادفی (ایتو) را تعریف کرده و تمایز آن را با انتگرال‌گیری معمولی و دستور ایتو بیان می‌کنیم.برای این منظور معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$dx = a(t,x)$$

اگر $x(t) = x(t; t_۰, x_۰)$ یک جواب از این معادلهٔ دیفرانسیل باشد که در شرط اولیهٔ $x(t_۰) = x_۰$ صدق کند، آنگاه با انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$x(t) = x(t_۰) + \int_{t_۰}^{t} a(s, x(s))ds \qquad (۱\text{ـ}۳)$$

۱ـ۳ تعریف ـ اگر معادلهٔ دیفرانسیل (۱ـ۳) توسط یک فرایند تصادفی مختل شود، معادلهٔ دیفرانسیل حاصل را معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی می‌نامیم. فرض کنید ε_t یک فرایند تصادفی باشد و

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))\varepsilon_t dt \qquad (۲\text{ـ}۳)$$

در این صورت $X = \{X(t), t \geq ۰\}$ یک فرایند تصادفی و معادلهٔ (۲ـ۳) یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی است که دو فرایند $X = \{X(t), t \geq ۰\}$ و $\varepsilon = \{\varepsilon_t, t \geq ۰\}$ را به هم مربوط می‌سازد. حال اگر این فرایند اخلال کننده «ناشی از بمباران مولکولی» باشد،آنگاه با استدلال فیزیکی می توان نتیجه گرفت که ε_t به صورت نوفهٔ سفید (مشتق فرایند وینر) با یک پارامترمناسب است [۲].

با انتگرال گیری از معادلهٔ (۲ـ۳) داریم:

$$X(t,w) = X(t_۰, w) + \int_{t_۰}^{t} a(s, X(s,w))ds + \int_{t_۰}^{t} b(s, X(s,w))\varepsilon_s(w)ds$$

وقتی

$$\varepsilon_s(w) = \lim_{s \to ۰} \frac{W(t+s) - W(t)}{s} .$$

در نتیجه

$$X(t,w) = X(t_۰, w) + \int_{t_۰}^{t} a(s, X(s,w))ds + \int_{t_۰}^{t} b(s, X(s,w))dW_s(w) \qquad (۳\text{ـ}۳)$$

اما می‌دانیم که فرایند $W(s,w)$ مشتق پذیر نیست و $\varepsilon_s(w)$ به عنوان یک فرایند تصادفی از s وجود خارجی ندارد. لذا انتگرال دوم یک انتگرال معمولی نیست.

۲ـ۳ انتگرال ایتو ـ برای $b(t,x) \equiv b$ انتظار داریم که انتگرال دوم در (۳ـ۳) را اگر بتوانیم تعریف کنیم، مساوی $b(W(t) - W(t_۰))$ شود. این نقطهٔ شروع برای تعریف ایتو از یک انتگرال تصادفی است و انتگرال از یک تابع f روی فاصلهٔ زمانی واحد $۰ \leq t \leq ۱$ را با

$$I(f)(w) = \int_۰^۱ f(s,w)dW_s(w) \qquad (۴\text{ـ}۳)$$

نشان داده و در نهایت آن را برای یک فاصلهٔ زمانی دلخواه تعمیم می‌دهیم.

۳ـ۳ تعریف ـ اگر $[t_i, t_{i+۱}]$ را i ـ امین فاصلهٔ زمانی فرض کنیم، آنگاه انتگرالی را که با انتخاب نقاط ابتدای بازه (انتهای چپ فاصلهٔ زمانی) $t_j^* = t_j$ تعریف شود، انتگرال ایتو نامیده و با نماد

$$I(f)(w) = \int_۰^T f(s,w)dW_s(w) \qquad (۵\text{ـ}۳)$$

نمایش می‌دهیم و انتگرالی را که با انتخاب نقاط میانی بازهٔ $t_j^* = \frac{۱}{۲}(t_j + t_{j+۱})$ تعریف می‌شود، انتگرال استراتنویچ[۷] نامیده و به شکل زیر نشان می‌دهیم:

---

[۷] Stratonovich

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

$$\int_{0}^{T} f(s,w) \circ dW_s(w)$$

نکته ـ در انتگرال تصادفی (ایتو) برخلاف انتگرال ریمان ـ استیلتیس (معمولی) انتخاب نقاط از افراز، دلخواه نیست و با انتخاب نقاط مختلف، نتایج متفاوتی به دست می‌آید.

در این بخش وجود انتگرال

$$\int_{0}^{t} f(s,w) dw_s(w)$$

را برای دستهٔ وسیعی از توابع $f:[0,T]\times\Omega \to R$ وقتی که $W=\{W(t), t\in T\}$ یک فرایند وینر است، بررسی می‌کنیم.

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و $W=\{W(t), t\geq 0\}$ فرایند وینر و $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ خانوادهٔ صعودی از δـ میدانهای $\mathcal{F}$ باشند، به طوری که $W(t)$ نسبت به $\mathcal{F}_t$ اندازه پذیر باشد و برای هر $t \leq s \leq 0$ داشته باشیم:

$$E\big(W(t)-W(s)\,|\,W(s)\big)=0 \quad a.s.$$

$$E\big(W(t)\,|\,\mathcal{F}_0\big)=0$$

۴ـ۳ تعریف ـ برای $0<T<\infty$، $\mathcal{L}_T^2$ را دستهٔ همهٔ توابع $f:[0,T]\times\Omega \to R$ تعریف می‌کنیم به طوری که در شرایط ذیل صدق کنند:

۱) f نسبت به $\mathcal{L}\times\mathcal{F}$ اندازه پذیر باشد.

۲) $\int_{0}^{T} E\big(f(t,.)\big)^2 dt<\infty$

۳) $E\big(f(t,.)\big)^2<\infty \quad ; 0\leq t\leq T$

۴) برای هر $0\leq t\leq T$، $f(t,.)$ نسبت به $\mathcal{F}_t$ اندازه پذیر باشند.

۵ـ۳ تعریف ـ S_T^2 را زیر مجموعه‌ای از توابع پله‌ای در $\mathcal{L}_T^2$ تعریف می‌کنیم،

$$S_T^2 = P\Big(\{f(\mathcal{L}_T^2\,|\,$$
$$f(t,w)=f_j(w), t_j\leq t<t_{j+1}; j=1,\ldots,n, a.s.\}\Big)$$

۶ـ۳ قضیه ـ [۲و۴] برای هر $f,g\in S_T^2$ و $\alpha,\beta\in R$، انتگرال تصادفی ایتو در خواص ذیل صدق می‌کند:

۱) $I(f)$ نسبت به $\mathcal{F}_t$ اندازه پذیر باشد.

۲) $E\big(I(f)\big)=0$

۳) $E\big(I(f)^2\big)=\int_{0}^{T} E\big(f(t,.)\big)^2 dt$

۴) $I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g) \quad a.s.$

۷ـ۳ تعریف ـ می‌گوییم $f\in\mathcal{L}_T^w$ است اگر f نسبت به $\mathcal{L}\times\mathcal{F}$ اندازه پذیر و $f(t,.)$ برای هر $t\in[0,T]$ نسبت به $\mathcal{F}_t$ اندازه پذیر و با احتمال یک

$$\int_{0}^{T} f^2(s,w)ds<\infty$$

برقرار باشد. در نتیجه $\mathcal{L}_T^2\subset\mathcal{L}_T^w$ می‌باشد.

$f_n\in\mathcal{L}_T^w$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_n(t,w)=\begin{cases} f(t,w) & ; \int_{0}^{T} f^2(s,w)ds\leq n \\ 0 & ; \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

ثابت می‌شود که انتگرالهای تصادفی ایتو $I(f_n)$ از f_n برای $0\leq t\leq T$ خوش تعریف و با احتمال یک به $I(f)$ از $f\in\mathcal{L}_T^w$ روی فاصلهٔ $0\leq t\leq T$ همگرا هستند.

فرض کنید a و b دو تابع $a,b\in\mathcal{L}_T^w$ باشند به طوری که a و b در خاصیتهای مورد نیاز از یک تابع در $\mathcal{L}_T^w$ به جز انتگرال پذیری صدق کنند. معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی

$$dX_t(w)=a(t,w)dt+b(t,w)dW_t(w)$$

را در نظر می‌گیریم. برای هر $0\leq s\leq t\leq T$ داریم:

$$X_t(w)-X_s(w)=$$
$$\int_{s}^{t} a(u,w)du+\int_{s}^{t} b(u,w)dW_u(w) \quad a.s. \quad (۶ـ۳)$$

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

انتـگرال دوم یک انتـگرال ایتو می‌باشد. انتـگرال ایتو برای انتـگرالده $f \in \mathcal{L}_T^w$ را همانند حد از انتـگرالهای ایتو برای انتـگرالده‌های در $\mathcal{L}_T^2$ تعریف می‌کنیم. همچنین فرض می‌کنیم که $X(t)$ اندازه پذیر با مسیرهای نمونه‌ای با احتمال یک پیوسته باشد، وقتی که a و b بسته به t نیستند، آنها متغیرهای تصادفی می‌باشند که نسبت به $\mathcal{F}_0$ اندازه پذیـر و نموهای $X(t)-X(s)$ روی فاصله‌های جدا از هم مستقلند و

$$E\big(X(t)-X(s)\big)=E(a)(t-s)$$

$$Var\big(X(t)-X(s)\big)=E(b^2)(t-s)$$

۳ـ۹ لـم ـ [۲و۴] فـرض کنیـد $u:[0,T]\times R\to R$ دارای مشتقـــات جزیـــی پیوستـــهٔ $\frac{\partial u}{\partial t}$، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ باشـد و برای هــر $t,t+\Delta t\in[0,T]$ و $x,x+\Delta x\in R$ ثابتهای $0\le\alpha\le 1$ و $0\le\beta\le 1$ وجود دارد به طوری که

$$u(t+\Delta t,x+\Delta x)-u(t,x)=\frac{\partial u}{\partial t}(t+\alpha\Delta t,x)\Delta t$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x+\beta\Delta x)(\Delta x)^2$$

۳ـ۱۰ قضیهٔ دستور ایتـو ـ [۲و۴] فـرض کنیـد $Y_t=u(t,X_t)$، $0\le t\le T$، باشد به طوری که u در لم ۳ـ۹ و X_t در معادلـهٔ (۳ـ۶) با $a,b\in\mathcal{L}_T^w$ صدق کنند. آنگاه برای هر $0\le s\le t\le T$ داریم:

$$Y_t-Y_s=\int_s^t\left(\frac{\partial u}{\partial t}(u,X_u)+a_u\frac{\partial u}{\partial x}(u,X_u)+\frac{1}{2}b_u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(u,X_u)du\right)du$$

$$+\int_s^t b_u\frac{\partial u}{\partial x}(u,X_u)dW_u\quad a.s.$$

مثال ـ فرض کنید $dX_t=b_t dW_t$ و $u(t,x)=e^x$. از دستور ایتو داریم:

$$Y_t=u(t,X_t)\quad\text{و}\quad dY_t=\frac{1}{2}b_t^2Y_tdt+b_tY_tdW_t\,.$$

اگر

$$u(t,x)=\exp(x-\frac{1}{2}\int_0^t b_u^2du)$$

باشد، آنگاه $dY_t=b_tY_tdW_t$ می‌باشد.

مثال ـ فرض کنید $dX_t=b_tdW_t$. با استفاده از دستور ایتو نشان می‌دهیم که برای هر $n\ge 1$ داریم:

$$d(X_t^{2n})=n(2n-1)b_t^2X_t^{2n-2}dt+2nb_tX_t^{2n-1}dW_t$$

و $d(W_t^{2n})$ برای $n\ge 1$ برابر خواهد بود با:

$$Y_t=u(t,X_t)\ ،\ u(t,x)=x^{2n}\ ،\ dX_t=b_tdW_t$$

$$u_t=0\ ،u_x(t,x)=2nx^{2n-1}$$

$$u_{xx}(t,x)=2n(2n-1)x^{2n-2}$$

$$d(X_t^{2n})=dY_t=\frac{1}{2}b_t^2u_{xx}dt+b_tu_xdW_t$$

$$=n(2n-1)b_t^2X_t^{2n-2}dt+2nb_tX_t^{2n-1}dW_t$$

حال اگر $b_t\equiv 1$، آنگاه $X_t\equiv W_t$ و لذا

$$d(W_t^{2n})=n(2n-1)W_t^{2n-2}dt+2nW_t^{2n-1}dW_t$$

و سرانجام با فرض $n=1$ خواهیم داشت:

$$d(W_t^2)=1(2\times1-1)W_t^{2\times1-2}dt+2\times1W_t^{2\times1-1}dW_t$$

$$=dt+2W_tdW_t$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطهٔ فوق داریم:

$$W_t^2=\int dt+2\int W_tdW_t$$

در نتیجه

$$\int W_tdW_t=\frac{1}{2}W_t^2-\frac{t}{2}\,.$$

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

مراجع

[1] Karlin, S. and Taylor, H. M., (1981), *A Second Course in Stochastic Process,* Academic Press.

[2] Kloeden, P.,E. and Platern E., (1995), *Numerical Solution of Stochastic Differential Equation,* Springer.

[3] Kloeden, P.,E., Platern, E., and Shurz, H., (1999), *Numerical Solution of SDEs through Computer Experiment,* Springer.

[4] Mao, X., (1997), *Stochastic Differential Equation and Application.*

[5] Milstein, G.N., (1995), *Numerical Integration of Stochastic Differential Equation,* Kluwer Academic Publishers.

[6] Strook, D.W. and Varadhan, S.R.S., (1977), *Multidimensional Diffusion*, Springer.

[۷] ساموئل کارلین، هروارد ام. تیلور، نخستین درس در فرایندهای تصادفی، ترجمهٔ دکترعالم زاده و دکتر پاشا، ۱۳۷۳.

[۸] هوئل، پورت، استون، آشنایی با فرایندهای تصادفی، ترجمهٔ دکتر افقهی، ۱۳۷۶.

[۹] مصطفا یی، حمید رضا، معادلات دیفرانسیل تصادفی، پایان نامهٔ کارشناسی ارشد، گروه آمار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، استاد راهنما: دکتر پاشا، شهریور ۱۳۷۹ .

اساس علم مشاهده، اثبات، استنتاج و تعمیم است.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]