۵۸ □ سال هفتم، شماره دوم ـــ

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

آمار فازی؛
مروری بر گذشته و چشم اندازهای آینده

سید محمود طاهری[۱]

چکیده

به کارگیری شیوه‌ها و ابزارهای نظریهٔ مجموعه های فازی در گسترش و تعمیق روشهای آماری، چندی است مورد توجه محققین قرار گرفته است. در این مقاله، تحقیقات کلیدی که در این زمینه انجام شده، معرفی و مرور می‌شوند. از سوی دیگر، با توجه به وضعیت موجود چشم اندازی از تحقیقات آینده نیز ترسیم و زمینه‌ها و موضوعهایی که پیش بینی می‌شود در آینده مورد توجه بیشتر قرار گیرند، مطرح می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: آمار فازی، احتمال فازی، رگرسیون فازی، آمار بیزی فازی.

۱. مقدمه

نظریهٔ آمار و نظریهٔ مجموعه‌های فازی، هر دو برای مطالعهٔ الگوها و سیستمهای شامل عدم قطعیت[۲] وضع شده‌اند. اولی برای مطالعهٔ الگوهای مبتنی بر عدم قطعیت آماری (منسوب به پیشامدهای تصادفی) و دومی برای مطالعهٔ الگوهای مبتنی بر عدم قطعیت امکانی[۳] (ناشی از ابهام و نادقیق بودن) مناسب هستند. این دو نظریه نه متناقض یکدیگرند و نه یکی دیگری را شامل می‌شود. گرچه طبیعت و کاربرد هر یک از این دو نظریه متفاوت از دیگری است، اما این باعث نمی‌شود که نتوان در یک مسأله، از هر دو نظریه استفاده کرد. در واقع، می‌توان روشهای کلاسیک آماری و روشهای فازی را، با هدف توصیف و تحلیل بهتر مسائل دنیای واقعی، با هم تلفیق کرد.

هدف از این مقاله از یک سو مروری بر تحقیقات کلیدی است که در زمینهٔ آمار فازی انجام گرفته است و از سوی دیگر ارائهٔ دورنمایی از آیندهٔ آمار فازی است. با این دیدگاه، مقالهٔ حاضر به ترتیب زیر تنظیم شده است:

در بخش دوم کلیاتی دربارهٔ آمار فازی مطرح می‌شود. در این بخش توضیح خواهیم داد که منظور از آمار فازی چیست و اصولاً یک مدل آماری را با توجه به نظریهٔ مجموعه‌های فازی چگونه می‌توان تعمیم داد.

در بخش سوم و به تفکیک، تحقیقاتی را که در مباحث برآورد (نقطه‌ای و فاصله‌ای)، آزمون فرض، و رگرسیون، در زمینهٔ فازی انجام شده است، مرور و بررسی می‌کنیم. یک سری مباحث خاص در موضوعهای مختلف آماری که در زمینهٔ فازی انجام شده‌اند، نیز در زیربخش ۳-٤ مرور می‌شوند.

در بخش چهارم، موضوعهایی را که به نظر می‌رسد در آینده مورد توجه محققین قرار گیرند، بیان و مباحثی را که زمینهٔ تحقیق در آنها مهیا است، معرفی می‌کنیم.

---

[۱] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

[۲] *Uncertainty*

[۳] *Possibilistic*

۲. کلیاتی دربارهٔ آمار فازی

۲ـ۱ تاریخچه

نظریهٔ مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ معرفی [۲، ۶، ۱۰، ۱۱، ۲۹، ۱۲۰]، اما مطالعات و تحقیقات در آمار و احتمال فازی، به طور عمده از دههٔ هشتاد آغاز شد [۱۰۳]. از آن زمان، به کارگیری روشها و ابزارهای نظریهٔ مجموعه‌های فازی در گسترش و تعمیق روشهای آماری مورد توجه روز افزون بوده است. تاکنون صدها مقاله دربارهٔ آمار و احتمال فازی نگارش و چندین کتاب در این باره تألیف شده است. دربارهٔ بعضی مقالات کلیدی، در بخش آینده و به تفکیک موضوع، بحث خواهیم کرد. در اینجا باید به دو کتاب مهم در زمینهٔ آمار و احتمال فازی اشاره کنیم.

اولین کتاب، اثر کروس و میر[۴] [۶۷] است که ***آمار با داده‌های مبهم*** نام دارد و در سال ۱۹۸۷ چاپ شده است. این کتاب ظاهرا نخستین کتابی است که اختصاصا دربارهٔ آمار و احتمال فازی تألیف شده است.

کتاب دوم، اثر فیتل[۵] [۱۰۹] است که ***روشهای آماری برای داده‌های نادقیق*** نام دارد و در سال ۱۹۹۶ چاپ شده است. در این کتاب مباحث گوناگون از آمار توصیفی تا آمار استنباطی برپایهٔ داده‌های نادقیق مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

لازم است به کتابی با عنوان ***تجزیه و تحلیل و مدلسازی آماری داده‌های فازی*** [۲۵] نیز اشاره شود. این کتاب در واقع مجموعه‌ای از ۱۹ مقاله در زمینه‌های مختلف آمار و احتمال فازی است، که با مقدمه‌ای نسبتا ممتع از پروفسور زاده، در سال ۲۰۰۲ به چاپ رسیده است (پی‌نوشت ۱).

همچنان که اشاره شد در بخش سوم، تحقیقات دربارهٔ آمار فازی را به تفکیک موضوع مرور خواهیم کرد. اما پیش از آن لازم است منظور خود را از آمار فازی روشن سازیم.

۲ـ۲ آمار فازی

هدف از مقالهٔ حاضر، مروری برآنچه هم اکنون آمار فازی نام گرفته است می‌باشد. منظور از آمار فازی، استفاده از روشهای فازی درمباحث گوناگون علم آمار است. در یک تقسیم بندی کلی، این کار تاکنون به صورتهای زیر انجام شده است:

۱) تعمیم مدلهای کلاسیک به مدلهای فازی. برای نمونه، می‌توان به مدلهایی اشاره کرد که در آنها مشاهدات نادقیق مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. در این موارد، چنانچه داده‌های نادقیق به داده‌های دقیق تبدیل شوند، آنگاه مدل اصلی به یک مدل معمولی آماری تقلیل می‌یابد.

۲) استفاده از روشهای فازی به جای روشهای آماری. برای نمونه، می‌توان به مواردی اشاره کرد که احساس می‌شود عدم اطمینان حاکم بر مدل، از نوع امکانی است نه از نوع احتمالی. مثلا در یک مدل رگرسیونی ممکن است خطای مدل به عدم اطمینان ناشی از مبهم بودن و منعطف بودن ارتباط بین متغیرهای سیستم باز گردد و نه به عدم اطمینان منسوب به خطای تصادفی. در این موارد می‌توان از مدلهای رگرسیون امکانی به جای مدلهای رگرسیون معمولی استفاده کرد.

۳) به کارگیری توأم روشهای فازی و روشهای آماری در مدلهایی که هر دو نوع عدم قطعیت (احتمالی و امکانی) در آنها وجود دارند. مثلا در مسئله برآورد یک پارامتر مجهول از یک توزیع احتمال، ممکن است با مشاهدات نادقیق نمونه روبرو شویم. در این حالت می‌توان مشاهدات نادقیق را با مجموعه‌های فازی صورت‌بندی و آنگاه از آنها در استنباط دربارهٔ پارامتر مجهول استفاده کرد.

از بین سه رده‌ای که در بالا به آنها اشاره شد، ردهٔ اول یعنی ردهٔ مربوط به تعمیم مدلهای کلاسیک به مدلهای فازی، مهمترین و گسترده‌ترین حالات را در برمی‌گیرد. اکنون دربارهٔ شیوه‌های این تعمیمها، توضیحاتی بیان می‌کنیم.

۲ـ۳ تعمیمهای یک مدل آماری

یک مدل آماری (و کلا یک مدل ریاضی) را می‌توان با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌های فازی از چهار جنبه تعمیم داد:

۱) متغیرهای تصادفی مدل را به صورت متغیرهای تصادفی فازی در نظر گرفت.

۲) متغیرها به صورت معمولی فرض شوند، اما مشاهدات مربوط به آنها مشاهدات نادقیق باشند.

---

[۴] Kruse and Meyer

[۵] Viertl

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

۶۰ □ سال هفتم، شماره دوم ـــ

۳) متغیرها و مشاهدات مربوط به آنها معمولی باشند، اما پارامترهای مدل فازی، فرض شوند.

۴) متغیرها، مشاهدات مربوط به متغیرها و پارامترهای مدل اصلی، همگی معمولی باشند، اما متغیرها یا فرضها یا توابع مرتبط با مدل (مانند تابع زیان، تابع تصمیم، فرض مورد آزمون، ...) منعطف و نادقیق باشند.

بدیهی است بتوان یک مدل را با توجه به بیش از یک جنبه از چهار جنبه بالا تعمیم داد، همچنان که تاکنون این نوع تعمیمها نیز انجام شده است.

برای توضیح تقسیم بندی بالا، به نمونه‌هایی از تحقیقات در هر قسمت اشاره می‌کنیم. مطالعات مربوط به متغیرهای تصادفی فازی [۷، ۷۲ و ۸۷] و قضایای حدی دربارهٔ آنها [۲۷ و ۸۶]، نمونه‌هایی از حالت اول هستند. تحقیقاتی که دربارهٔ آزمون فرضها بر پایهٔ مشاهدات مبهم انجام شده است مانند [۳۱، ۳۲، ۳۹ و ۵۳]، و مدلهای رگرسیونی با مشاهدات نادقیق [۳۵] در ردهٔ دوم قرار می‌گیرند. مطالعات مربوط به مدلهای رگرسیونی که ضرایب متغیرها فازی فرض می‌شوند، مانند [۱۳ و ۴۲] و یا مبحث استنباط بیزی بر پایهٔ توزیع پیشین فازی [۱۰۹ و ۱۱۲] نمونه‌هایی از حالت سوم اند و سرانجام مسئلهٔ آزمون فرض وقتی فرضهای مورد آزمون مبهم باشند [۱۷، ۱۸، ۱۰۰ و ۱۰۱] نمونه‌ای از حالت چهارم است.

۲ـ۴ چند نکته

همین جا یک نکته را باید خاطر نشان کرد. از دیدگاه یک فازی‌ـ آماردان هدف آن نیست که روشهای فازی به جای روشهای آمار کلاسیک در همهٔ موارد و همهٔ موضوعات جایگزین شود، بلکه هدف بررسی این موضوع است که در مسائلی که روشهای آمار کلاسیک محدودیتهایی دارد، چگونه (و اصولاً آیا) می‌توان از ابزارهای نظریهٔ مجموعه‌های فازی در حل آنها استفاده کرد؟ به بیان دیگر صحبت از مکمل بودن روشهای آماری و روشهای برگرفته از نظریهٔ مجموعه‌های فازی است و نه لزوماً رقیب بودن این روشها.

دربارهٔ تفاوتها و تشابه‌های بین مفهوم تصادفی بودن (عدم اطمینان از نوع احتمالی) و مفهوم فازی بودن (عدم اطمینان از نوع امکانی) مباحث بسیاری انجام و منتشر شده است. برای ورود به مبحث آمار فازی، شایسته است این تفاوتها و تشابه‌ها مورد توجه قرار گیرند. پرداختن به این موضوع، در حوصله و مجال این مقاله نیست. خوانندگان علاقمند می‌توانند برای نمونه به [۵، ۹، ۴۰، ۴۳، ۴۴، ۵۷، ۶۵، ۱۲۱ و ۱۲۲] مراجعه کنند.

شایان ذکر است که در این مقاله، صرفاً به آمار فازی خواهیم پرداخت و مباحث مربوط به احتمال فازی، موضوع این مقاله نیست. بنابراین موضوعهایی مانند احتمال پیشامدهای فازی، متغیرهای تصادفی فازی و قضایای حدی دربارهٔ آنها، فرایندهای تصادفی فازی، توصیف احتمالی مجموعه‌های فازی و ... خارج از چارچوب این بررسی قرار دارند.

۳. مروری بر گذشته

۳ـ۱ برآورد

موضوع برآورد (نقطه‌ای و فاصله‌ای) یک پارامتر مجهول از یک توزیع احتمال، در زمینهٔ فازی، توسط چند تن از محققان مطالعه شده است. نخست به برآورد نقطه‌ای می‌پردازیم.

اولین بار کورال و هیل[۶] [۳۸] درسال ۱۹۸۴ در این باره مطالعاتی انجام دادند. آنان با تعمیم فضای نمونه به فضای نمونهٔ فازی، روش ماکسیمم درستنمایی را به حالتی که مشاهدات مربوط به متغیرهای تصادفی، نادقیق باشند، گسترش دادند (نیز ر.ک. به [۸۳]).

در همین سال، باکلی[۷] [۲۸] مسئلهٔ برآورد با داده‌های فازی را در چارچوب نظریهٔ تصمیم بررسی کرد. به علاوه، هیل و همکاران[۸] [۴۸] درسال ۱۹۸۵ مسئلهٔ برآورد نقطه‌ای با داده‌های فازی را با رهیافت بیزی مطالعه کردند.

از سویی دیگر، و با یک رهیافت متفاوت، کروس[۹] [۶۶] در سال ۱۹۸۴ مسئلهٔ برآورد را وقتی اطلاعات نمونه به صورت داده‌های زبانی[۱۰] باشند، مطالعه کرده است (نیز ر.ک. به [۶۷]).

اشناتا[۱۱] [۹۶] درسال ۱۹۹۳ جنبه‌های مختلف برآورد بیزی را وقتی اطلاعات نمونه و همچنین پارامترهای توزیع پیشین، نادقیق باشند، مطالعه کرده است. در مقالهٔ وی، مفاهیم و مباحثی مانند تابع درستنمایی فازی،

---

۶ *Corral and Gil*

۷ *Buckley*

۸ *Gil et al*

۹ *Kruse*

۱۰ *Linguistic Data*

۱۱ *Schnatter*

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

برآوردگر بیز، تابع پسین فازی و نواحی *HPD* مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند.

بر پایهٔ مفهوم امید ریاضی متغیرهای تصادفی فازی، لوپز و هیل[۱۲] [۷۳] در سال ۱۹۹۸ برآوردگر فازی نااریب میانگین یک جامعه، البته در حالتی خاص را تعریف و بررسی کرده‌اند.

مسئلهٔ برآورد در بررسیهای طولی با حالتهای فازی، توسط مانتون[۱۳] و همکاران [۷۵ و ۷۶] بررسی شده است. فیتل [۱۰۹] استفاده از روشهای ناپارامتری را در برآورد، بر اساس داده‌های نادقیق، مطالعه کرده است.

بهبودیان و محمدپور [۲۳] روشی را برای برآورد یک پارامتر مجهول از یک توزیع وقتی اطلاع نادقیق دربارهٔ آن پارامتر در اختیار داریم، با وجود یک یا چند پارامتر مزاحم، ارائه داده اند. آنها روش خود را با روشهای متداول در برآورد و آزمون فرض دربارهٔ یک پارامتر، وقتی پارامترهای مزاحم وجود دارند، مقایسه کرده‌اند.

بر پایهٔ تعمیم‌هایی از تابع درستنمایی هنگامی که داده‌های نمونه یا اطلاعات مربوط به تابع پیشین نادقیق باشند، گرنتر و هو[۱۴] [۴۷] برآوردگرهای بیزی را تعمیم داده‌اند و از آن در تحلیل داده‌های مربوط به جنگلها استفاده کرده‌اند.

موضوع برآورد فاصله‌ای فازی نیز نخستین بار توسط کورال وهیل [۳۹] درسال ۱۹۸۸ صورت‌بندی و بررسی شد. در تحقیق آنها، برآورد فاصله‌ای به حالتی که با مشاهدات نادقیق (مرتبط با متغیرهای تصادفی معمولی) سروکار داریم، تعمیم داده شده است.

فیتل وهیول[۱۵] [۱۱۱] در سال ۱۹۹۱ بر پایهٔ تعمیمی از قضیهٔ بیز برای حالتی که مشاهدات نمونه مبهم باشند، مفهوم نواحی *HPD* را تعمیم دادند (نیز ر.ک. به [۱۰۸]). در اثر فیتل [۱۰۹] نیز مسئلهٔ ناحیه‌های اطمینان بر پایهٔ داده‌های فازی، مطالعه شده است.

واتانابه[۱۶] [۱۱۵] در سال ۱۹۹۶ با رهیافتی متفاوت، به موضوع برآورد فاصله‌ای فازی پرداخته است. وی بر اساس قضایای حدی دربارهٔ متغیرهای تصادفی فازی، یک نوع فاصله اطمینان برای میانگین یک متغیر تصادفی فازی ارائه کرده است.

در پایان این قسمت، یادآور می‌شویم که مبحث برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای برای پارامتر مجهول یک تابع عضویت[۱۷] نیز توسط بعضی از محققان مورد بررسی قرار گرفته است. البته این بحث متفاوت از مبحث برآورد پارامتر مجهول یک تابع توزیع می‌باشد. برای نمونه‌هایی از این تحقیقات می‌توان به [۳۰ و ۷۷] اشاره کرد.

۳ـ۲ آزمون فرض

آزمون فرضهای آماری، با مشاهدات نادقیق، نخستین بار توسط کازالس و همکاران[۱۸] [۳۱ و ۳۲] در سال ۱۹۸۶ مورد مطالعه قرار گرفت (پی‌نوشت ۲). آنها لم نیمن- پیرسن را برای حالت بالا تعمیم دادند و رهیافت بیزی را به این مسئله بررسی کردند (نیز ر.ک. به [۳۳]). سون و همکاران[۱۹] [۹۹] نیز بر پایهٔ تعمیم لم نیمن- پیرسن، مفهوم تواناترین آزمون فازی را تعریف و یک کاربرد از آن را بررسی کردند. زگورزسکی[۲۰] [۵۳] در سال ۲۰۰۰، رهیافتی را به موضوع بالا پیشنهاد داده است که درآن ، تصمیم دربارهٔ رد یا قبول فرضها، به صورت فازی بیان می‌شود(نیز ر.ک. به [۵۴]). تأثیر ابهام داده‌ها در آزمون فرضهای آماری نیز در [۹۰] بررسی شده است.

مسئلهٔ آزمون فرضها وقتی مشاهدات، دقیق هستند اما خود فرضها، مبهم و نادقیق اند، نخستین بار توسط آرنولد[۲۱] [۱۶ـ۱۸] مطالعه شد. وی روش خود را با بررسی حالاتی از آزمون فرضهای یکطرفه و دو طرفه توضیح داده است. همین مسئله یعنی آزمون فرضهای فازی (با داده‌های دقیق) توسط دلگادو و همکاران[۲۲] [۴۱] و البته با روشی در چارچوب نظریهٔ تصمیم مطالعه شده است. طاهری و بهبودیان [۱۰۰] در سال ۱۹۹۹ با ارائهٔ تعریفهای مناسبی برای احتمال خطای نوع اول و احتمال خطای نوع دوم، مسئلهٔ بالا را بررسی و لم نیمن- پیرسن را برای آزمون فرضهای فازی، بیان و اثبات کرده‌اند (برای مطالعهٔ یک کاربرد از روش آنها

---

۱۲ *Lopez-Diaz and Gil*

۱۳ *Monton et al.*

۱۴ *Gertner and Zhu*

۱۵ *Viertl and Hule*

۱۶ *Watanabe*

۱۷ *Membership Function*

۱۸ *Casals et al.*

۱۹ *Son et al.*

۲۰ *Grzegorzewski*

۲۱ *Arnold*

۲۲ *Delgado et al*

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

ر.ک. به [۸۴]). همین مسئله با شیوه‌ای متفاوت توسط واتانابه و ایمایزومی[۲۳] [۱۱۶] نیز مطالعه شده است. در روش آنها تابع توان فازی نقش محوری دارد و نتیجهٔ آزمون نیز به صورت فازی بیان می‌شود.

از سوی دیگر، آزمون فرضها در زمینهٔ فازی و به شیوه‌های بیزی مورد توجه محققین بوده است. همچنان که در بالا اشاره شد، اولین گامها در این باره به مطالعات دلگادو و همکاران [۴۱] (آزمون فرضهای فازی با داده‌های معمولی)، و کازالس و همکاران [۳۱ و ۳۲] (آزمون فرضهای معمولی با داده‌های فازی) باز می‌گردد. به علاوه کازالس [۳۴] در سال ۱۹۹۳ مسئلهٔ آزمون فرضهای فازی با داده‌های معمولی را در چارچوب نظریهٔ تصمیم فازی (ارائه شده توسط تاناکا و همکاران[۲۴] [۱۰۴] در سال ۱۹۷۹) بررسی کرده است.

طاهری و بهبودیان [۱۰۱] در سال ۲۰۰۱ یک شیوهٔ بیزی برای آزمون فرضهای فازی با داده‌های معمولی ارائه داده اند. آنها همین مسئله را در حالتی که داده‌های نمونه نیز مبهم باشند، درسال ۲۰۰۲ بررسی کرده‌اند [۱۰۲].

بر پایهٔ مفهوم متغیرهای تصادفی فازی و به کمک قضیه حد مرکزی دربارهٔ آنها کورنر[۲۵] [۶۴] یک آزمون مجانبی برای امید ریاضی یک جامعه، وقتی مشاهدات نمونه فازی هستند، ارائه کرده است. همچنین مونتنگرو و همکاران[۲۶] [۸۰] در سال ۲۰۰۱ آزمون مقایسه میانگینهای دو جامعه را وقتی نمونه‌های حاصل از دو جامعه، مبهم هستند، مطالعه کرده‌اند.

آزمون نیکویی برازش با داده‌های مبهم توسط هیل و همکاران [۴۹ و ۵۰] مطالعه شده است (نیز ر.ک. به [۸]).

کاربرد آزمون فرضهای فازی در زمینه‌های مختلف رو به گسترش است. برای نمونه، در تشخیص پزشکی می‌توان به مقالهٔ لاست و همکاران[۲۷] [۶۸] ، در مخابرات به مقالهٔ سون و همکاران [۹۹] و در فیزیک به مقالهٔ پاریس[۲۸] [۸۴] اشاره کرد.

[۲۳] *Watanabe and Imaizumi*

[۲۴] *Tanaka et al.*

[۲۵] *Korner*

[۲۶] *Montenegro et al.*

[۲۷] *Last et al.*

[۲۸] *Paris*

۳ـ۳ رگرسیون

می‌توان گفت که بیشترین مطالعات در تلفیق روشهای کلاسیک آماری و روشهای فازی، در زمینهٔ رگرسیون انجام گرفته است. در رگرسیون معمولی، متغیرهای مورد مطالعه و مشاهدات مربوط به آنها دقیق هستند. روابط بین متغیرها نیز با اضافه کردن جمله‌ای تصادفی، در قالب مدلهای دقیق بررسی می‌شود. اما اگر در یک سیستم، با متغیرهای نادقیق و یا روابط مبهم روبرو باشیم، آنگاه رگرسیون فازی می‌تواند الگوهای مناسب‌تری را در اختیار بگذارد.

در یک تقسیم بندی کلی، رگرسیون فازی را می‌توان به دو رده طبقه‌بندی کرد:

۱) رگرسیون فازی وقتی متغیرهای مدل و یا مشاهدات مربوط به آنها، فازی و مبهم باشند.

۲) رگرسیون فازی وقتی روابط بین متغیرها، نادقیق و فازی باشد. به بیان دیگر حالتی که متغیرها و مشاهدات مربوط به آنها دقیق اند اما ضرائب مدل رگرسیون، اعداد فازی منظور می‌شوند.

در هر دو حالت بالا، به ویژه حالت اول، مطالعات بسیاری صورت گرفته است که در این بخش تعدادی از آنها را معرفی و مرور کنیم.

رگرسیون فازی، نخستین بار توسط تاناکا و همکاران [۱۰۵] در سال ۱۹۸۲ معرفی شد. در مقالهٔ آنها مدل رگرسیون خطی با ضرایب فازی مورد مطالعه قرار گرفته است. تاناکا و همکارانش، و دیگر محققان، در مقاله‌های متعددی این نوع مدل را از جنبه‌های گوناگون مطالعه، بررسی و تصحیح کرده‌اند. در [۸۸ و ۱۰۶] مروری بر ویژگیهای چند مدل که بر پایهٔ مدل تاناکا و همکاران بنا شده، انجام گرفته است. حشمتی و کاندل[۲۹] [۵۶] مدل بالا را در یک تحقیق بازاریابی، مورد استفاده قرار داده‌اند (نیز ر.ک. به [۴]). در حل بسیاری از مدلهای بالا، مسئلهٔ یافتن مدل رگرسیون فازی مناسب، معادل با یک مسئلهٔ برنامه ریزی خطی می‌شود [۱۳]. با یک رهیافت مشابه، تاناکا و لی[۳۰] [۱۰۶] مدل رگرسیون با ضرایب بازه‌ای را بر پایهٔ مفاهیم امکان[۳۱] و لزوم[۳۲] مطرح کرده‌اند. بررسی این نوع مدلها معادل با یک مسئلهٔ برنامه ریزی غیرخطی (درجه دوم) می‌شود (نیز ر.ک. به [۸۵]). همچنین

[۲۹] *Heshmaty and Kandel*

[۳۰] *Tanaka and Lee*

[۳۱] *Possibility*

[۳۲] *Necessity*

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

باردوسی[۳۳] [۲۱] مدل رگرسیون غیرخطی را که معادل با مسائل کلی‌تر برنامه ریزی می‌شود، مطالعه کرده است. از سوی دیگر، مدلهای رگرسیون که در آنها متغیرهای مستقل، فازی می‌باشند و پارامترهای مدل، اعداد معمولی، توسط محققان مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. برای نمونه، ساکاوا و یانو[۳۴] [۹۱] در سال ۱۹۹۱ و وانگ و لای[۳۵] [۱۱۳] در سال ۱۹۹۰ (مورد اخیر بر پایهٔ روش موسوم به روش ماکسیمم امکان- مینیمم آنتروپی) این نوع مدل را مطالعه کرده‌اند.

همچنان که می‌دانیم یک شیوهٔ متداول در مطالعهٔ مدلهای معمولی رگرسیون، روش کمترین توانهای دوم است. این شیوه توسط بعضی از محققین برای بررسی مدلهای رگرسیون فازی نیز به کار گرفته شده است. در واقع مجموعه‌ای از مطالعات در رگرسیون فازی را می‌توان مطالعات بر پایهٔ روش کمترین توانهای دوم نامید. این شیوه را نخستین بار کلمینس[۳۶] [۳۵] و دایاموند[۳۷] [۴۲] در سال ۱۹۸۷ مورد توجه قرار دادند. نویسندهٔ اخیر هر دو حالت متغیرها معمولی - پارامترها فازی، و متغیرها فازی - پارامترها معمولی را با روش کمترین توانهای دوم بررسی کرده است. دربارهٔ روش کمترین توانهای دوم در بررسی مدلهای رگرسیون فازی، مقالات جدیدی همچون [۴۵، ۵۸، ۸۱، ۹۴ و ۱۱۸] شایان توجه‌اند.

به چند تحقیق دیگر در زمینهٔ رگرسیون فازی اشاره کرده و این بخش را به پایان می‌بریم. آرنولد و استالکر[۳۸] [۱۹] مدل رگرسیون خطی را وقتی اطلاعات نادقیقی دربارهٔ ضرائب مدل و ماتریس کوواریانس جملهٔ خطای تصادفی در اختیار است، مطالعه کرده‌اند. آنها برای این مدل، بهترین پیش بینی کنندهٔ خطی متغیر وابسته را که می‌توان آن را معادل فازی برای پیش بینی کنندهٔ مینیماکس تلقی کرد، تعریف و ویژگیهای آن را بررسی کرده‌اند. تویورا و واتادا[۳۹] [۱۰۷] دو شاخص برای ارزیابی مدلهای رگرسیون فازی ارائه داده‌اند. لوزینسکی و ماتولکا[۴۰] [۷۴] مدل رگرسیون را که به صورت چند جمله‌ای با ضرائب فازی باشد، مطالعه کرده‌اند. همچنین در[۳۷] رگرسیون فازی با استفاده از شبکه‌های تطبیقی فازی مطالعه شده است.

سرانجام به چند مقالهٔ مروری اشاره می‌کنیم. ارقامی [۱] نکات اصلی چند روش مختلف رگرسیون فازی را مورد بررسی، مقایسه و مداقه قرارداده است (نیز ر. ک. به [۱۵]). ردن و وودال[۴۱] [۸۸] تعدادی از شیوه‌های رگرسیون فازی را همراه با نقاط قوت و ضعف آنها مطالعه و بررسی کرده‌اند. کیم و همکاران[۴۲] [۶۳] رگرسیون معمولی را با رگرسیون فازی از جهات مختلف مانند فرضهای اولیه، چگونگی برآورد پارامترها و زمینه‌های کاربردی مقایسه کرده‌اند.

۳-۴ زمینه‌های دیگر

در بعضی زمینه‌های دیگر آماری نیز شیوه‌های فازی به کار گرفته شده‌اند. البته تحقیقات در این زمینه‌ها اندک است و لذا این موارد را همگی در این بخش مرور می‌کنیم.

با آمار توصیفی آغاز می‌کنیم. بعضی مباحث آمار توصیفی بر پایهٔ مشاهدات نادقیق توسط کروس و میر [۶۷] و بعضی نیز توسط فیتل [۱۰۹] مطالعه شده‌اند. ازدیدگاهی متفاوت، کاندل و همکاران [۶۰، ۶۱ و ۹۷] مفاهیم مقدار مورد انتظار فازی[۴۳] و بازهٔ مورد انتظار فازی[۴۴] را معرفی و کاربردهایی از آنها را بررسی کرده‌اند. همچنین در [۹۸]، چگونگی تشکیل هیستوگرام بر پایهٔ داده‌های نادقیق مطالعه شده است (نیز ر.ک. به [۹۵]).

استفاده از نظریهٔ مجموعه‌های فازی در قابلیت اطمینان آماری توسط نیکلسکو و فیتل[۴۵] [۸۲] و صادق‌پور و ژیان [۹۲] مورد بررسی قرار گرفته است. دربارهٔ قابلیت اطمینان بر پایهٔ احتمالهای فازی مقدار، مرجع [۱۱۷] شایان توجه است.

کنترل کیفیت آماری وقتی با داده‌های مبهم روبرو هستیم نیز مورد توجه قرار گرفته است که برای نمونه، می‌توان به تحقیقات وانگ و

---

۳۳ *Bardossy*

۳۴ *Sakawa and Yano*

۳۵ *Wang and Li*

۳۶ *Celmins*

۳۷ *Diamond*

۳۸ *Arnold and Stahlecker*

۳۹ *Toyoura and Watada*

۴۰ *Luczynski and Matolka*

۴۱ *Reden and Woodall*

۴۲ *Kim et al*

۴۳ *Fuzzy Expected Value*

۴۴ *Fuzzy Expected Interval*

۴۵ *Niculescu and Viertl*

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

راز[٤٦] [١١٤]، کاناگاوا و همکاران[٤٧] [٥٩] اشاره کرد. معماریانی و حیدری [١٤] یک نوع نمونه‌گیری را که معمولا در کنترل کیفیت محصولات صنعتی استفاده می‌شود، در نظر گرفته‌اند و حالتی که پارامترهای طرح نمونه‌گیری فازی اند را مورد بررسی قرار داده‌اند.

بعضی از مباحث نظریهٔ اطلاع به حالتی که داده‌های نمونه فازی باشند، تعمیم داده شده‌اند. برای مثال هیل و لوپز[٤٨] [٥١] مفهوم اطلاع فیشر را به حالتی که گفته شد تعمیم داده‌اند. صادق‌پور و ژیان [٩٣] تعیمی از قضیهٔ رائو-بلکول را مطرح کرده‌اند. مبحث بسندگی و بعضی مباحث دیگر نیز توسط منندز و همکاران[٤٩] [٧٨ و ٧٩] مورد مطالعه قرار گرفته است.

لوپز و هیل [٧٣] مباحثی از استنباط آماری را مانند برآورد و آزمون فرض، در چارچوب نظریهٔ تصمیم فازی با توابع زیان فازی، بررسی کرده‌اند.بر پایهٔ بعضی مدلهای رگرسیون فازی، سیدحسینی و کامران [٣] آنالیز واریانس فازی را مورد توجه قرار داده‌اند (نیز ر.ک. به [٨٩]).

استفاده از نظریهٔ مجموعه‌های فازی و منطق فازی در تحلیل داده‌های فضایی[٥٠] و آمار جغرافیایی[٥١] توسط محققان بسیاری مورد توجه واقع شده است. برای نمونه، لی [٧١] برای تحلیل آماری داده‌های جغرافیایی، یک شبکهٔ عصبی ـ فازی را معرفی کرده و به کار می‌گیرد. برای دو نمونه دیگر از تحقیقات در این باره می‌توان به [٢٢ و ٧٠] اشاره کرد.

گارسیا و همکاران[٥٢] [٤٦] نمونه‌گیری طبقه‌ای با مشاهدات فازی را در نظر گرفته‌اند و یک برآوردگر برای امید ریاضی متغیر فازی در این نمونه‌گیری ارائه داده‌اند.

فیتل [١١٠] با معرفی روشی برای انتگرال‌گیری از یک تابع فازی مقدار، چگونگی به دست آوردن تابع توزیع پسین را بر پایهٔ داده‌های فازی وقتی تابع چگالی پیشین، فازی باشد، تشریح کرده است. بر این پایه فیتل و هارتر[٥٣] [١١٢] نواحی اطمینان فازی را مورد بحث قرار داده‌اند.

تحلیل ممیزی وطبقه‌بندی داده‌ها با استفاده از روشهای فازی و کاربردهای آن نیز مورد توجه روزافزون است. در این باره، تعمیم روشهای آماری به ویژه در حالاتی که با اطلاعات مبهم سروکار داریم، مورد بررسی فراوان قرار گرفته است که برای نمونه می‌توان به [٢٦ و ٦٢] اشاره کرد. به علاوه شیوه‌هایی برای طبقه‌بندی فازی داده‌ها، بر پایهٔ تعمیم روش ماکسیمم درستنمایی در طبقه‌بندی، ارائه شده است. خوانندگان علاقمند به این موضوع را به [٥٥ و ١١٩] ارجاع دهیم.

٤. چشم اندازهای آینده

چشم انداز آمار فازی نسبتا گسترده و متنوع است. گرچه نمی‌توان آنچه را در آینده اتفاق خواهد افتاد به طور دقیق پیش بینی کرد اما از قرائن موجود می‌توان دربارهٔ روند آینده حدسهایی زد. بر همین اساس و بدون ادعایی مبنی بر قطعیت، زمینه‌ها و موضوعهایی را که به نظر می‌رسد درآیندهٔ نزدیک مورد توجه محققین قرار گیرد، به طور خلاصه بیان می‌کنیم. پیش از توضیح دربارهٔ گرایشهای خاص، یک نکتهٔ کلی را متذکر می‌شویم. اصولا برای پیشرفت علم آمار در هر شاخه و هر زمینه‌ای، لازم است تا مبانی نظری مربوطه، به ویژه مبانی احتمال مربوط به آن شاخه مورد مطالعه قرار گیرد و بسترهای لازم آماده شود. از این رو و از یک دیدگاه منطقی باید گفت که تحقیقات دربارهٔ نظریهٔ احتمال فازی، مقدم بر تحقیقات دربارهٔ آمار فازی است. بنابراین، دست کم در بعضی از شاخه‌ها، باید در انتظار گسترش نظریهٔ احتمال فازی بود تا بر پایهٔ آن بتوان آمار فازی را گسترش داد. (دربارهٔ استنتاج احتمالی بر اساس مفاهیم نادقیق، مقالهٔ جدید پروفسورزاده [١٢٣] شایان توجه است.)

٤ـ١ کارآیی روشهای فازی در علم آمار

بحث بین موافقین استفاده از نظریهٔ مجموعه‌های فازی و مخالفین، کم و بیش ادامه دارد و به نظر می‌رسد که همزمان با گسترش استفاده از نظریهٔ مجموعه‌های فازی درشاخه‌های گوناگون آمار، این مناقشات نیز گسترش یابد.

گرچه بعضی از مقاومتها، ناشی از عدم درک صحیح ادعاها و قابلیتهای نظریهٔ مجموعه‌های فازی است، اما این نکته را هم باید به خاطر

---

[٤٦] *Wang and Raz*

[٤٧] *Kanagava et al.*

[٤٨] *Gil and Lopez*

[٤٩] *Menendez et al.*

[٥٠] *Spatial Statistics*

[٥١] *Geostatistics*

[٥٢] *Garcia et al.*

[٥٣] *Viertl and Hareter*

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

داشت که اصولا یک نظریه، هنگامی تقویت و تأیید می‌شود که در برابر مقاومتها، محکها و آزمونهای جدی قرار گیرد و از این آزمونها سربلند بیرون آید. به تعبیر فیلسوفان علم، رشد جریان علم در بستر اثباتها و ابطالها، و از دیدگاهی دیگر حدسها و ابطالها، است و این چیزی است که در مورد نظریهٔ مجموعه‌ها و سیستمهای فازی اتفاق افتاده است و در آینده نیز اتفاق خواهد افتاد.

هم اکنون، علیرغم بعضی دیدگاه‌های منتقدانه از هر دو سو، مباحث دربارهٔ مکمل بودن روشهای آمار کلاسیک و روشهای آمار فازی رو به گسترش است. خوانندهٔ علاقمند می‌تواند، برای نمونه، به [۵، ۵۲، ۶۵، ۶۹ و ۱۲۲] مراجعه کند. از سوی دیگر، این توهم که گویی هدف آن است که نظریهٔ مجموعه‌های فازی، جانشین همهٔ روشهای متداول شود، به مرور زمان از بین رفته است و با درک صحیح این نظریه و درک صحیح اهداف آن همگراییها بیشتر شده و تحقیقات مشترک رو به گسترش است. به هر حال پیش بینی می‌شود که بحث دربارهٔ میزان کارآیی نظریهٔ مجموعه‌های فازی در مطالعات آماری، به ویژه مقایسهٔ روشهای معمولی و روشهای مبتنی بر این نظریه، یکی از چالشهای فراروی باشد.

۴ـ۲ برآورد

هنوز بسیاری از مفاهیم و روشهای کلاسیک که در برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای (فاصله اطمینان) استفاده می‌شوند در آمار فازی به کار گرفته نشده‌اند. مفاهیمی مانند بسندگی، ناآریبی و سازگاری و کارآیی در مورد برآوردهای نقطه‌ای، و از سوی دیگر مفاهیمی مانند فاصله اطمینان ناآریب، کوتاهترین فاصله اطمینان و ... دربارهٔ برآوردهای فاصله‌ای هنوز به طور جدی در چارچوب نظریهٔ فازی مطالعه نشده‌اند. البته در این مورد نکته‌ای که در مقدمهٔ این بخش بیان کردیم، یعنی توالی منطقی احتمال فازی و آمار فازی، حائز اهمیت است.

در هر صورت، در زمینهٔ برآورد، به ویژه در موضوعهایی که برشمردیم، میدانهای وسیع برای تحقیق و پژوهش وجود دارد که قطعا توسط احتمال ـ آماردانهای فازی مورد توجه قرار خواهد گرفت.

۴ـ۳ آزمون فرض

همچنان که در بخش ۳ـ۲ اشاره شد، توانمند کردن آزمونهای آماری با استفاده از مفاهیم و روشهای نظریهٔ مجموعه‌های فازی، از چند جنبهٔ مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. البته آنچه صورت گرفته، گامهای نخستین بوده و هنوز نظریهٔ جامعی در این باره حاصل نشده است.

اصولا یک مسئلهٔ آزمون فرض را می‌توان از جنبه‌های گوناگون تعمیم داد: متغیر تصادفی معمولی به متغیر تصادفی فازی، مشاهدهٔ دقیق به مشاهدهٔ نادقیق، فرضهای معمولی به فرضهای مبهم، تصمیم‌گیری دو مقداره (رد یا قبول یک فرض) به تصمیم‌گیری منعطف و فازی و ... . بنابراین روشهای آزمون فرض در زمینه‌های مختلف فازی می‌تواند از جهات گوناگون گسترش یابد. برشمردن همهٔ موضوعهای تحقیق که در این زمینه‌ها در پیش روست دشوار می‌باشد اما موضوعهای زیر نمود بیشتری در افق آینده دارند:

الف) تعمیم روشهای آزمون فرض برای حالتهایی که زیان ناشی از تصمیم‌گیری، نادقیق باشند.

ب) تعیین ملاک بهینگی برای مقایسهٔ آزمونهایی که در زمینهٔ فازی پیشنهاد شده‌اند.

ج) گسترش شیوه‌های آزمون فرضهای فازی به مباحثی مانند رگرسیون.

د) تعمیم روشهای آزمون فرض در قالب نظریهٔ تصمیم فازی و نظریهٔ مطلوبیت فازی.

هـ) تعمیم آزمونهای کلاسیک (مانند آزمون دربارهٔ میانگین یک جامعه، آزمون مقایسهٔ میانگینهای دو جامعه، آزمون مقایسهٔ نسبتها، آزمونهای استقلال و ...) به آزمونهای مناسب در زمینهٔ فازی.

۴ـ ۴ رگرسیون

مبحث رگرسیون بین نظریه پردازان و دانشمندان علوم کاربردی، و ازسویی دیگر بین آماردانها مورد توجه بوده و هست. همچنان که تاکنون مطالعات بسیاری دربارهٔ رگرسیون فازی انجام گرفته است، پیش بینی می‌شود در آینده نیز مطالعات چشمگیری در این زمینه صورت گیرد.

بسترها و ظرفیتهای بسیاری در هر دو زمینهٔ نظری و کاربردی در این باره وجود دارد. در اینجا به چند موضوع که به نظر می‌رسد میدان تحقیق در آنها وسیع است، اشاره می کنیم.

الف) مقایسه‌ای جامع بین روشهای رگرسیون معمولی و روشهای رگرسیون فازی، برحسب مفروضات اولیه، زمینه‌های کاربرد، محدودیتها و تواناییها و ... .

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

ب) تعیین ملاکهای جامع برای بهینگی، به منظور مقایسهٔ روشهای مختلف رگرسیون فازی.

ج) رگرسیون فازی که در آن مشاهدات نادقیق (مربوط به متغیرهای مستقل و متغیر وابسته) همانند قوانین اگر- آنگاه[٥٤] تلقی می‌شوند (پی‌نوشت ٣) [١٢].

٤ـ ٥ آمار بیزی

آمار بیزی از جمله شاخه‌هایی از آمار است که پیش بینی می‌شود گسترشهای بسیاری را در تلفیق با نظریهٔ مجموعه‌های فازی داشته باشد. این نکته، هم بدان جهت است که آمار بیزی، و به طور کلی روشهای بیزی، مورد توجه ویژهٔ محققان در زمینه‌های کاربردی نظریهٔ مجموعه‌های فازی قرار گرفته است.

تلفیق روشهای آمار بیزی و ابزارهای نظریهٔ مجموعه‌های فازی، زمینهٔ گسترده‌ای دارد اما به نظر می‌رسد مباحثی مانند استفاده از توزیعهای پیشین نادقیق در استنباط بیزی، برآوردگرهای بیز در زمینهٔ فازی و تحت توابع زیان مختلف، استنباط بیزی با تابع زیان فازی و ... در آینده مورد توجه بیشتر قرار گیرد.

همین جا می‌توان به استفاده از روشهای فازی در چارچوب نظریهٔ تصمیم نیز اشاره کرد. باید گفت موضوعهایی مانند استفاده از توابع زیان فازی، توابع مطلوبیت نادقیق و توابع تصمیم فازی، افقهای جدیدی رویاروی نظریهٔ تصمیم خواهد گشود.

٥. جمع بندی و نتیجه گیری

به کارگیری توأم روشهای نظریهٔ مجموعه‌های فازی و روشهای کلاسیک آماری رو به گسترش است (پی‌نوشت ٤). در این مقاله از دو جنبه به این موضوع پرداختیم. نخست، پژوهشهای کلیدی را که تاکنون در شاخه‌های گوناگون آمار فازی انجام شده است، مرور و آنگاه دورنمایی از وضعیت آینده را ترسیم کردیم. به علاوه برای پژوهشگران علاقمند به آمار فازی، موضوعهایی را معرفی کردیم که قابلیتهای پژوهشی در آنها وجود دارد و یا این که نیازهای کاربردی، مستلزم مطالعهٔ بیشتر در آن موضوعها است.

و سخن آخر، پیش بینی می‌شود که درآینده‌ای نه چندان دور، آمار و احتمال فازی، به یک گرایش مهم در آمار و احتمال تبدیل شود. شایسته است از هم اکنون این موضوع، مورد توجه گروههای آموزشی آمار دانشگاهها و نیز گروههای پژوهشی مؤسسات آماری قرار گیرد.

پی نوشتها

١) گفته شود که یک کتاب نیز با عنوان ***کاربردهای آماری مجموعه‌های فازی*** [٧٦] در سال ١٩٩٤ منتشر شده است. محتوای این کتاب چندان با عنوان آن سازگاری ندارد و صرفا مباحث خاصی در تحلیل داده‌های طولی[٥٥] را شامل می‌شود (نیز ر.ک. به [٧٥]). همچنین دو بخش از کتاب ***تحلیل داده‌های فازی*** [٢٠] به مباحثی از احتمال فازی و رگرسیون فازی اختصاص دارد.

٢) این نکته که فرضهای دقیق، مانند فرض $\theta = \theta_0$ ، فرضهایی واقعی نیستند، توسط بعضی آماردانها مورد توجه و نقادی قرار گرفته است. برای نمونه می‌توان به مقالهٔ برگر و دلامپادی[٥٦] [٢٤] اشاره کرد.

٣) شاید بتوان این رهیافت را از جهت مقابل نیز به کار گرفت. مجموعه‌ای از قوانین اگر- آنگاه را همانند مجموعه‌ای از مشاهدات یک رگرسیون فازی در نظر گرفت. در این صورت مسائل کنترل فازی، که بر پایهٔ روشهای استنتاج فازی صورت می‌گیرند، به مسائل رگرسیونی تبدیل می‌شوند.

٤) رویکرد مؤسسات آماری به نظریهٔ فازی شایان ذکر است. برای نمونه می‌توان به انستیتو آمارهند (*ISI*) اشاره کرد. این انستیتو که مقر آن در شهر کلکته هند است (و البته شعباتی در شهرهای دیگر هند نیز دارد) با بیش از نیم قرن سابقه، از اعتبار بین المللی قابل ملاحظه‌ای در مجامع علمی آمار برخوردار بوده و ناشر مجلهٔ معروف شانکیا[٥٧] است. انستیتو آمار هند در فوریهٔ ٢٠٠٢ میزبان و برگزار کنندهٔ پنجمین کنفرانس بین المللی سیستمهای فازی، از سری کنفرانسهای دو سالانه *AFSS* (انجمن آسیایی مجموعه‌ها و سیستمهای فازی) بود.

---

٥٤ *If - Then Rules*

٥٥ *Longitudinal Data*

٥٦ *Berger and Delampady*

٥٧ *Sankhya*

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

مراجع

[۱] ارقامی، ناصررضا؛ ۱۳۷۱، *مروری بر رگرسیون فازی*، گزارش اولین سمینار مجموعه‌های مشکک و کاربردهای آن، دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[۲] برزوئی، رجبعلی؛ ۱۳۸۱، (ویراستار)، *مباحثی در مجموعه‌های فازی (مجموعه مقالات)*، دانشگاه سیستان و بلوچستان.

[۳] سید حسینی، محمد؛ شهانقی، کامران؛ ۱۳۸۱، *اندازه گیری اثرات متغیرهای توصیفی همراه با تعاملات آنها با استفاده از روش آنالیز واریانس فازی*، گزارش سومین همایش مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ۸۳ ـ ۷۵.

[٤] طاهری، محمدرضا؛ ۱۳۷٤، *اعداد فازی و رگرسیون فازی*، پایان نامهٔ کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه تربیت معلم.

[۵] طاهری، سید محمود؛ ۱۳۷٤، *امکان و احتمال به عنوان دو رهیافت به عدم اطمینان*، پیک ریاضی، ج ٦، ش ۱: ٤۲ ـ ۱۹.

[٦] طاهری، سید محمود؛ ۱۳۷۵، *آشنایی با نظریهٔ مجموعه‌های فازی*، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد.

[۷] طاهری، سید محمود؛ ارقامی، ناصررضا؛ ۱۳۷۵، *متغیرهای تصادفی فازی*، گلچین ریاضی، ج۳، ش ۱: ۱۵ـ ٦.

[۸] عسگری، جواد؛ لوکس، کارو؛ ۱۳۷٤، *معیاری جدید برای مرغوبیت برازش با اطلاعات فازی*، مجلهٔ بین المللی علوم مهندسی، ج ٦، ش ۱: ۸ ـ ۱.

[۹] غفاری، علی و همکاران؛ ۱۳۷۷، *تفکر فازی(ترجمه)*، انتشارات دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی.

[۱۰] ماشین چی، ماشاءا...؛ ۱۳۷۸، *تاریخچهٔ مختصری از ریاضیات مشکک*، اندیشهٔ آماری، ج. ٤، ش ۱: ۱٤ ـ ۱۰.

[۱۱] ماشین چی، ماشاءا... ؛ ۱۳۷۹، *مجموعه‌های مشکک*، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[۱۲] ماشین چی، ماشاءا... ؛ ۱۳۷۹، *رگرسیون با استفاده از پایگاه اطلاعاتی مشکک*، اندیشه‌آماری ، ج ۵، ش ۲: ۱۹ـ ۱۳.

[۱۳] مجدی، سعید؛ طاهری، سید محمود؛ علامت‌ساز، محمد حسین؛ ۱۳۸۱، *رگرسیون خطی با ضرائب فازی*، گزارش ششمین کنفرانس آمار ایـران، دانشگاه تربیت مدرس.

[۱٤] معماریانی، عزیزا... ؛ حیدری، مهدی؛ ۱۳۷۸، *تعیین مشخصه‌های کیفی در نمونه گیری یک مرحله‌ای با پارامترهای فازی*، مجلهٔ بین المللی علوم مهندسی، ج ۱۰، ش ٤: ٦۸ـ ٦۱.

[۱۵] یلتقیان، فرانک؛ ۱۳۷۸، *رگرسیون فازی*، پایان نامهٔ کارشناسی ارشد صنایع، دانشگاه صنعتی شریف.

[16] Arnold, B.F., 1995, *Statistical Tests Optimally Meeting Certain Fuzzy Requirements on the Power Function and on the Sample Size*, Fuzzy Sets Syst., 75: 365- 372.

[17] Arnold, B.F., 1996, *An Approach to Fuzzy Hypothesis Testing*, Metrika, 44: 119-126.

[18] Arnold, B.F., 1998, *Testing Fuzzy Hypothesis with Crisp Data*, Fuzzy Sets Syst., 94: 323- 333.

[19] Arnold, B.F. and Stahlecker, P., 1998, *Perdiction in Linear Regression Combining Crisp Data and Fuzzy Prior Information*, Statistics and Decisions, 16: 19-33.

[20] Bandemer, H. and Nather, W., 1992, *Fuzzy Data Analysis*, Kluwer, Dordrecht.

[21] Bardossy, A., 1990, *Note on Fuzzy Regression*, Fuzzy Sets Systs., 37: 65-75.

[22] Bardossy, A., Kelly, W.E., and Bogardi, I., 1998, *Imprecise (Fuzzy) Information in Geostatistics*, Math. Geol., 20: 189- 203.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

[23] Behboodian, J. and Mohammadpour, A., 2002, *Estimation of a Fuzzy Parameter and Its Application in Hypothesis Testing,* Proc. of the Third Seminar on Fuzzy Sets and Its Applications, Univertsity of Sistan and Baluchetsan, pp:23-45.

[24] Berger, J.O. and Delampady, M., 1987, *Testing Precise Hypothesis,* Stat. Sci., 2: 317- 352.

[25] Bertoluzza, C., Gil, M.A. and Ralescu, D.A. (Eds.), 2002, *Statistical Modeling, Analysis and Mangement of Fuzzy Data,* Springer.

[26] Bezdek, J. and Pal, S., 1992, *Fuzzy Models for Pattern Recognition,* IEEE Press, New York.

[27] Boswell, S.B., 1987, *A Central Limit Theorem for Fuzzy Random Variables,* Fuzzy Sets Systs., 24: 331-344.

[28] Buckley, J.J., 1985, *Fuzzy Decision Making with Data: Applications to Statistics,* Fuzzy Sets Systs., 16: 139-147.

[29] Buckley, J.J. and Eslami, E., 2002, *An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets,* Springer.

[30] Cai, K.Y., 1993, *Parameter Estimators of Normal Fuzzy Variables,* Fuzzy Sets Syst., 55: 179- 185.

[31] Casals, M.R., Gil, M.A. and Gil ,P., 1986, *On the Use of Zadeh's Probabilistic Defintion for Testing Statistical Hypothesis from Fuzzy Information,* Fuzzy Sets Syst., 20: 175- 190.

[32] Casals, M.R., Gil, M.A. and Gil, P., 1986, *The Fuzzy Decision Problem :An Approach to the Problem of Testing Statistical Hypothesis with Fuzzy Information,* Euro. J. Oper. Res., 27: 371-382.

[33] Casals, M.R., Gil, M.A. and Gil, P., 1989, *A Note on the Operativeness of Neyman- Pearson Tests with Fuzzy Information,* Fuzzy Sets Syst., 30: 215- 220.

[34] Casals, M.R., 1993, *Bayesian Testing of Fuzzy Parametric Hypothesis from Fuzzy Infromation,* RAIRO, Operations Research, 27: 189-199.

[35] Celmins, A., 1987, *Least Squares Model Fitting to Fuzzy Vector Data,* Fuzzy Sets Syst., 22: 260- 269.

[36] Chang, Y.O., 2001, *Hybrid Fuzzy Least- Squares Regression Analysis and Its Reliability Measure,* Fuzzy Sets Syts., 119: 225- 246.

[37] Cheng, C.B. and Lee, E.S., 1999; *Applying Fuzzy Adaptive Network to Fuzzy Regression Analysis,* Comput. Math. Appl., 38: 123- 140.

[38] Corral, N. and Gil, M.A., 1984, *The Minimum Inaccuracy Fuzzy Estimation: An Extention of the Maximum Likelihood Principle,* Stochastica, 6: 63- 81.

[39] Corral, N. and Gil, N., 1988, *A Note on Interval Eatimation with Fuzzy Data,* Fuzzy Sets Syst. 28: 209-215.

[40] Dale, D.I., 1980, *Probability, Vague Statements, and Fuzzy Sets,* Philos. Science, 47: 38- 55.

[41] Delgado, M., Verdegay, J.L., and Vial, M.A., 1985, *Testing Fuzzy Hypotheses, A Bayesian Approach,* In: Gupta, M.M,; et al. (Eds.), Approximate Reasoning in Expert Systems, Elsevier.

[42] Diamond, P., 1987, *Least Squares Fitting of Several Fuzzy Variavbles,* Proc. of the Second IFSA Congress, Tokyo, pp: 20- 25.

[43] Dubois, D. and Prade, H., 1986, *Fuzzy Sets and Statistical Data,* Euro. J. Oper. Res., 25: 345- 356.

[44] Dubois, D. and Prade, D., 1993, *Fuzzy Sets and Probability : Misunderstanding, Bridges, and Gaps,* In: Proc. of the Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Piscataway, pp: 1059- 1068.

[45] D'Urso, P. and Gastaldi, T., 2000, *A Least- Squares Approcach to Linear Regression Analysis,* Comp. Stat. and Data Anal., 34: 427- 440.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

[46] Garcia, D., Lubiano, M.A. and Alonso, C.M., 2001, *Estimating the Expected Value of Fuzzy Random Variables in the Stratified Random Sampling from Finite Populations,* Inform. Sci., 138: 165- 184.

[47] Gertner, G.Z. and Zhu, H., 1997, *Bayesain Estimation in Forest Surveys when Samples Prior Information are Fuzzy,* Fuzzy Sets Syst., 77: 277- 290.

[48] Gil, M.A., Gorral, N. and Gil, P., 1985, *The Fuzzy Decision Problem: An Approach to the Point Estimaition Problem with Fuzzy Information,* Euro. J. Oper. Res., 22: 26- 34.

[49] Gil, M.A., Corral, N. and Gil, P., 1985, *The Minimum Inaccuracy Estimates in* χ^2 *Tests for Goodnes of Fit with Fuzzy Observartions,* J. Stat. Plan. Inf., 19: 95- 115.

[50] Gil, M.A., Corral, N. and Casals, M.R., 1989, *The Likelihood Ratio Test for Goodness of Fit with Fuzzy Experimental Observation,* IEEE Trans. System Man Cybernet., 19: 771-779.

[51] Gil, M.A. and Lopez, M.T., 1993, *The Fisher Infromation Associated with a Fuzzy Infromation System,* Infrom. Sci., 77: 277- 290.

[52] Goodman, I.R. and Nguyen, H.T., 2002, *Fuzziness and Randomness,* In: Bertoluzza, C., et al. (Eds.) , Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data, Springer, pp: 3-24.

[53] Grzegorzewski, P., 2000, *Testing Statistical Hypothesis with Vague Data,* Fuzzy Sets Syst., 112: 502- 510.

[54] Grzegorzewski, P., 2002, *Testing Fuzzy Hypotheses with Vague Data,* In: Bertoluzza, C., et al. (Eds.) Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data, Springer, pp: 213- 225.

[55] Hathaway, R.J. and Bezdek, J.C., 1986, *On the Asymptotic Properties of Fuzzy C-Means Cluster Prototypes as Estimators of Mixture Supbopulation Centers,* Commun. Statist., Theory and Methods, 15: 505-513.

[56] Heshmaty, B. and Kandel, A., 1985, *Fuzzy Linear Regression and Its Applications to Forecasting in Uncertian Environment,* Fuzzy Sets Syst., 15: 159- 191.

[57] Hisdal, B., 1988, *Are Grades of Membership Probabilites?,* Fuzzy Sets Syst., 25: 325- 348.

[58] Hong, D.H., Song, J. and Do, H.Y., 2001, *Fuzzy Least-Squares Linear Regression Analysis Using Shape Preseving Operations,* Infrom. Sci., 138: 185- 193.

[59] Kanagava, A., Tamaki, F. and Ohta, H., 1993, *Control Charts for Process Average and Variability Based on Linguistic Data,* Int. J. Production Resarch, 2: 913- 922.

[60] Kandel, A., 1978, *Fuzzy Statistic and Forecast Evaluation,* IEEE Trans. on System Man and Cybernet., Vol. SMC-8, No. 5: 369- 401.

[61] Kandel, A. and Byatt, W.J., 1978, *Fuzzy Sets, Fuzzy Algebra, and Fuzzy Statistics,* Proc. of the IEEE Vol. 66, No. 12: 1619- 1639.

[62] Kersten, P.R., 1999, *Fuzzy Order Statistics and their Application to Fuzzy Clustering,* IEEE Trans. on Fuzzy Systerms, 7: 708- 712.

[63] Kim, K.J., Moskowitz, H. and Koksalan, M., 1996, *Fuzzy Versus Statistical Linear Regression,* Euro. J. Oper. Res., 92: 417- 434.

[64] Korner, R., 1990, *An Asymptotic* α *–Test for Expectaion of Random Fuzzy Variables,* J.Stat.Plan.Inf., 83: 331 - 346.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

۷۰ □ سال هفتم، شماره دوم ـــ

[65] Kosko, B., 1990, *Fuzziness Vs. Probability,* Inter. J. General Systems, 17: 211- 240.

[66] Kruse, R., 1984, *Statistical Estimation with Linguistic Data,* Infrom. Sci., 33: 197- 207.

[67] Kruse, R. and Meyer, K.D., 1987, *Statistics with Vague Data,* Reidal Publ. Comp., Dordech, Netherlands.

[68] Last, M., Schenker, A. and Kandel, A., 1999, *Applying Fuzzy Hypothesis Testring to Medical Data,* In Zhong, N.; Skowron, A.; Ohsuga, S. (Eds.), New Directions in Rough Sets, Data Minung, and Granular- Soft Computing, Lecture Notes in Artificial Intelligence Series, Vol. 1711, Springer, pp: 221- 229.

[69] Laviolette, M. and Seaman, J.W., 1992, *Evaluating Fuzzy Representations of Uncertainty,* The Mathematical Scientist, 17: 26- 41.

[70] Lee, E.S., 1995, *Fuzzy Spatial Statistics,* In: Selected Papres of Engineering Chemistry and Metallurgy, Institute of Chemical Metallurgy, Chinese Academy of Science, pp: 151- 157.

[71] Lee, E.S., 2000, *Neuro-Fuzzy Estimation in Spatial Statistics,* J. Math. Anal. Appl., 249: 221- 231.

[72] Lopez-Diaz, M. and Gil, M.A., 1997, *Constructive Definitions of Fuzzy Random Variables,* Stat. and Prob. Letters, 36: 135- 143.

[73] Lopez-Diaz, M. and Gil, M.A., 1998, *Reversing the Order of Integration in Iterated Expectations of Fuzzy Random Variables, and Statistical Applicarions,* J. Stat. Plan. Inf., 74: 11-29.

[74] Luczynski, W. and Matolka, M., 1995, *Fuzzy Regression Models and Their Applications,* J. Fuzzy Math., 3: 583- 589.

[75] Manton, K.G., Stallard, E. and Woodbury, M.A., 1991, *A Multivariate Event History based upon Fuzzy States: Estimation from Longitudinal Surveys with Informative Nonresponse,* J. Official Statistics, 7: 261- 293.

[76] Manton, K.G., Woodbury, M.A. and Tolley, D.H., 1994, *Statistical Applications Using Fuzzy Sets,* Wiley, New York.

[77] McCain, R.A., 1983, *Fuzzy Confidence Intervals,* Fuzzy Sets Syst., 10: 281- 290.

[78] Menendez, M.L., Pardo, J.A. and Pardo, L., 1989, *Sufficient Fuzzy Information Systems,* Fuzzy Sets Syst., 32: 97- 105.

[79] Memedez, M.L., Pardo, J.A. and Pardo, L., 1992, *Some Statistical Applications of Generalized Jensen Difference Divergence Measures for Fuzzy Information Systems,* Fuzzy Sets Syst., 52: 169-180.

[80] Montenegro, M., Casals, M.R., Lubiano, M.A. and Gil, M.A., 2001, *Two-Sample Hypothesis Tests of Means of a Fuzzy Random Variables,* Infrom. Sci., 133: 89-100.

[81] Nather, W. and Korner, R., 1998, *Linear Regression with Random Fuzzy Numbers,* In: Ayyub, B.M.; Gupta, M.M. (Eds.), Uncertainty Analysis in Engineering and Science, Kluwer, pp: 193- 211.

[82] Niculescu, S.P. and Viertl, R., 1989, *A Comparison between two Fuzzy Estimators for the Mean,* Fuzzy Sets Syst., 48: 341- 350.

[83] Okuda, T., 1987, *A Statistical Treatment of Fuzzy Observations: Estimation Problems,* Preprints of the Second IFSA Congress, pp: 51- 55.

[84] Paris, M.G.A., 2001, *Nearly Ideal Binary Communication in Squeezed Channels,* Physical Review A, 64: 14304- 14308.

[85] Perters, G., 1994, *Fuzzy Linear Regression with Fuzzy Intervals,* Fuzzy Sets Syst., 63: 45-55.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

[86] Proske, F.N. and Puri, M.L., 2001, *Central Limit Theorem for Banach Space Valued Fuzzy Random Variables,* Proc. Amer. Math. Soc., 130: 1493- 1501.

[87] Puri, M.L. and Ralescu, D.A., 1986, *Fuzzy Random Variables,* J. Math. Anal. Appl., 114: 409- 422.

[88] Reden, D. and Woodall, W., 1994, *Properties of Certain Fuzzy Linear Regression Methods,* Fuzzy Sets Syst., 65: 361- 375.

[89] Rojas, L., Ortega, J., Pelayo, F.J. and Prieto, A., 1999, *Statistical Analysis of the Main Parameters in the Fuzzy Inference Process,* Fuzzy Sets Syst., 102: 157- 173.

[90] Romer, C. and Kandel, A., 1995, *Statisical Tests for Fuzzy Data,* Fuzzy Sets Syst., 72: 1-26.

[91] Sakawa, M. and Yano, H., 1991, *Multiobjective Fuzzy Linear Regression Analysis for Fuzzy Data,* Fuzzy Sets Syst., 47: 173- 181.

[92] Sadeghpour, B. and Gien, D., 2002, *A Goodness of Fit Index to Reliability Analysis in Fuzzy Model,* 3rd WSES Int. Conf. on Fuzzy Sets and Fuzzy Systems, Interlaken, Switzerland.

[93] Sadeghpour, B. and Gien, D., 2002, *Dp, q-Distance and Rao- Blackwell Theorem for Fuzzy Rndom Variables,* 8th Int. Conf. on Fuzzy Theory and Tech., Durham, USA.

[94] Salas, A., Corral, N. and Bertoluzza, C., 2002, *Linear Regression in a Fuzzy Context: The Least Square Method,* In: Bertoluzza, C., et al. (Eds.), Statistical Modelling , Analysis and Management of Fuzzy Data, Springer, pp: 255-281.

[95] Schnatter, S., 1992, *On Statistical Inference for Fuzzy Data with Applications to Descriptive Statistics,* Fuzzy Sets Syst., 50: 143-165.

[96] Schnatter, S., 1993, *On Fuzzy Bayesian Inference,* Fuzzy Sets Syst., 60: 41-58.

[97] Schneider, M. and Kandel, A., 1998, *Properties of the Expected Value and the Fuzzy Expected Interval,* Fuzzy Sets Syst., 26: 373- 385.

[98] Schneider, M. and Craig, M., 1992, *On the Use of Fuzzy Sets in Histogram Equalization,* Fuzzy Sets Syst., 45: 271-278.

[99] Son, J.C., Song, I. and Kim, H.Y., 1992, *A Fuzzy Decision Problem Based on the Generalized Neyman-Pearson Criterion,* Fuzzy Sets Syst., 47: 65- 75.

[100] Taheri, S.M. and Behboodian, J., 1999, *Neyman-Pearson Lemma for Fuzzy Hypotheses Testing,* Metrika, 49: 3-17.

[101] Taheri, S.M. and Behboodian, J., 2001, *A Bayesian Approach to Fuzzy Hypotheses Testing,* Fuzzy Sets Syst. 123: 39- 48.

[102] Taheri, S.M. and Behboodian, J., 2002, *Fuzzy Hypothesis Testing with Fuzzy Data: A Bayesian Approach,* In: Nikhil, R.P., Sugeno, M. (Eds.), Advances in Soft Computing AFSS 2002, Springer, pp: 527- 533.

[103] Taheri, S.M., 2003, *Trends in Fuzzy Statistics,* Austrian J. Stat. Vol. 32, No. 3.

[104] Tanaka, H., Okuda, T. and Asai, K., 1979, *Fuzzy Information and Decision in Statistical Model,* In Gupta, M.M., et al. (Eds.), Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, North Holland, Amsterdam, pp: 303- 320.

[105] Tanaka, H., Uejima, S. and Asai, K., 1982, *Linear Regression Analysis with Fuzzy Model,* IEEE Trans. Systems Man Cybernet., 12: 903- 907.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

[106] Tanaka, H. and Lee, H., 1998, *Interval Regression Analysis by Quadratic Programming Approach,* IEEE Trans. Fuzzy Systems, 6: 473-481.

[107] Toyoura, Y. and Watada, J., 2000, *Evaluation of Fuzzy Regression Analysis,* Proc. of the Fourth Asian Fuzzy Systems Symposium, Tsukuba, Japan, pp: 1015- 1020.

[108] Viertl, R., 1987, *Is it Necessary to Develop a Fuzzy Bayesian Inference?,* In: Viertl, R. (Ed.), Probability and Bayesian Statistics, Plenum Press, New York.

[109] Viertl, R., 1996, *Statistical Methods for Non-Precise Data,* CRC Press.

[110] Viertl, R., 1999, *Statistics and Integration of Fuzzy Functions,* Environmetrics, 10: 487- 491.

[111] Viertl, R. and Hule, H., 1991, *On Bayes Theorem for Fuzzy Data,* Statisical Papers, 32: 115- 122.

[112] Viertl, R. and Hareter, D., 2002, *Bayes Theorem for Non-Precise A-Priori Distribution and Non-Precise Data,* Preprint.

[113] Wang, Z.Y. and Li, S.M., 1990, *Fuzzy Linear Regression Analysis of Fuzzy Valued Variables,* Fuzzy Sets Syst. 36: 125- 136.

[114] Wang, J.H. and Raz, T., 1990, *On the Construction of Control Charts Using Linguistic Variables,* Inter. J. Production Research, 28: 477-487.

[115] Watanabe, N., 1996, *Fuzzy Random Variables and Statistical Inference,* Japanese J. Fuzzy Theory and Systems, 8: 833- 846.

[116] Watanabe, N. and Imaizumi, T., 1993, *A Fuzzy Statistical Test of Fuzzy Hypotheses,* Fuzzy Sets Syst., 53: 167-178.

[117] Wu, H.C., 1997, *Fuzzy Reliability Analysis Based on Closed Fuzzy Numbers,* Inform. Sci., 103: 135- 159.

[118] Xu, R., 1997, *S-Curve Regression Model in Fuzzy Environment,* Fuzzy Sets Syst., 90: 317- 326.

[119] Yang, M.S., 1993, *On a Class of Fuzzy Classification Maximum Likelihood Procedures,* Fuzzy Sets Syst., 57: 365-375.

[120] Zadeh, L.A., 1965, *Fuzzy Sets,* Information and Control, 8: 338- 359.

[121] Zadeh, L.A., 1973, *The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning , Part I,* Infrom. Sci., 8: 199-249.

[122] Zadeh, L.A., 1995, *Probability and Fuzziness are Completibility rather than Contradictory,* Technometrics, 37: 271- 277.

[123] Zadeh, L.A., 2002, *Toward a Perception-Based Theory of Probabilistic Reasoning with Imprecise Probabilities,* J. Stat. Plan. Inf., 105: 233-264.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]