

## توابع مفصل<sup>۱</sup> و اندازه‌های ارتباط<sup>۲</sup>

فائزه شفیعی فر<sup>۳</sup> محمد حسین علامت ساز<sup>۴</sup>

### چکیده

هنگامی که چند واحد (سیستم) در یک محیط مشترک قرار دارند، اغلب تحت تاثیر عوامل محیطی، یا ساختار سیستم، دارای وابستگی می‌باشند. این پدیده، در اکثر موارد عملی و برای اکثر داده‌های واقعی رخ می‌دهد. برای تجزیه و تحلیل داده‌های واقعی، در مرحله اول، ساختار وابستگی متغیرها بررسی می‌شود. برای این منظور، اندازه‌های وابستگی گوناگونی معرفی شده‌اند. امروزه، توابع مفصل به عنوان راهی برای مطالعه اندازه‌های آزاد از مقیاس و وابستگی پیشنهاد می‌شوند، زیرا ویژگیهای ناپارامتری بودن، ناوردایی و وابستگی توابع متغیرهای تصادفی را به خوبی بیان می‌کنند. در مقاله حاضر چگونگی کاربرد توابع مفصل برای به دست آوردن انواع ارتباط، وابستگی، ضرایب همبستگی ناپارامتری و اندازه وابستگی دنباله‌ای تشریح می‌شود. کلمات کلیدی: تابع مفصل، ضریب همبستگی ناپارامتری، ضریب وابستگی دنباله‌ای.

### ۱. مقدمه

اندازه‌های ارتباط که از اوایل قرن بیستم معرفی و شناخته شدند، برای اندازه‌گیری شدت وابستگی بدون در نظر گرفتن نوع آن به کار می‌روند.

توابع مفصل در سال ۱۹۵۹ توسط اسکالر معرفی شدند. تابع مفصل تابعی است که یک تابع توزیع چند متغیره را به تابع توزیعهای حاشیه‌ای تک متغیره آن پیوند می‌دهد. طبیعتاً یکی از کاربردهای توابع مفصل ساختن توزیعهای توأم، با استفاده از توزیعهای حاشیه‌ای است، ولی

مفاهیم اولیه وابستگی مثبت و منفی، توسط لهن [۷] بیان شده است. مفاهیمی که توسط وی ارائه شد، همگی در حالت دو متغیره مطرح شده بودند. ازاری و پروشان و والکپ [۴]، ابراهیمی و گوش [۲] و در سالهای اخیر تیلور، بزرگنیا و امینی [۱] مفاهیم وابستگی را تعمیم و در حالت چند متغیره مورد بررسی قرار دادند.

<sup>۱</sup> Copula Function

<sup>۲</sup> Measures of Association

<sup>۳</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه اصفهان

<sup>۴</sup> گروه آمار، دانشگاه اصفهان

مثال ۱- برای  $\delta > 0$  تابع توزیع توأم زیر را در نظر بگیرید:

$$-\infty < x, y < \infty \quad (4)$$

$$H(x, y) = \exp\{-[e^{-x} + e^{-y} - (e^{\delta x} + e^{\delta y})^{-\nu\delta}]\}$$

بدیهی است وقتی  $x \rightarrow \infty$  و  $y \rightarrow \infty$  به ترتیب توابع حاشیه‌ای تک متغیره به دست می‌آیند:

$$F(x) = \exp\{-e^{-x}\} \quad -\infty < x < \infty$$

$$G(y) = \exp\{-e^{-y}\} \quad -\infty < y < \infty$$

پس با در نظر گرفت  $u = F(x)$  و  $v = G(y)$  خواهیم داشت:

$$x = -\ln(-\ln(u)) \quad \text{و} \quad y = -\ln(-\ln(v))$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه ۴ و با استفاده از رابطه ۲، تابع مفصل به دست می‌آید: [۶]

$$0 < u, v < 1$$

$$C(u, v) = uv \exp\{[-\ln u]^{-\delta} + [-\ln v]^{-\delta} - \nu\delta\}$$

### ۳. اندازه‌های ارتباط

با استفاده از توابع مفصل، محاسبه اندازه‌های ارتباط بسیار آسان است.

#### $\tau$ ی کندال:

دو مشاهده مستقل  $(X_1, Y_1)$  و  $(X_2, Y_2)$  از بردار تصادفی  $(X, Y)$  را در نظر بگیرید. تابع

$$\tau = P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - \quad (5)$$

$$P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}$$

به عنوان تفاوت احتمالهای هماهنگی و ناهماهنگی میان دو مشاهده  $(X_1, Y_1)$  و  $(X_2, Y_2)$  از بردار تصادفی پیوسته  $(X, Y)$  با تابع توزیع توأم  $H$  و توابع حاشیه‌ای مشترک  $F$  (برای  $X_1$  و  $X_2$ ) و  $G$  (برای  $Y_1$  و  $Y_2$ ) تعریف می‌شود.

قضیه ۱- فرض کنید  $C$  تابع مفصل باشد. آنگاه:

$$\tau = 4 \iint_I C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (6)$$

امروزه توابع مفصل به عنوان ابزاری برای مطالعه اندازه‌های آزاد از مقیاس و وابستگی استفاده می‌شوند. زیرا آنها ویژگیهای ناپارامتری بودن، نارودایی و وابستگی توابع توزیع متغیرهای تصادفی را به خوبی بیان می‌کنند.

در مقاله حاضر، چگونگی استفاده از توابع مفصل در مورد اندازه‌های ارتباط معروفی چون  $\tau$  کندال،  $\rho$  اسپیرمن و  $\gamma$  جینی و مفاهیم وابستگی مربعی، رگرسیونی، نسبت درستمایی و وابستگی در دنباله را تشریح خواهیم کرد.

### ۲. تابع مفصل

یک تابع مفصل دو بعدی تابعی مانند  $C: I^2 \rightarrow I = [0, 1]$  با ویژگیهای زیر می‌باشد:

$$\forall t \in [0, 1]; \quad (الف)$$

$$C(0, t) = C(t, 0) = 0, \quad C(1, t) = C(t, 1) = t$$

$$\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I; \quad u_1 \leq u_2, \quad v_1 \leq v_2 \quad (ب)$$

$$C(u_1, v_1) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_2, v_2) \geq 0 \quad (۱)$$

تابع مفصل  $C$  نسبت به هر یک از متغیرهای خود، غیر نزولی و پیوسته است.

قضیه معروف اسکالر بیان می‌دارد که اگر  $H$  یک تابع توزیع دوبعدی با تابع توزیعی حاشیه‌ای  $F$  و  $G$  باشد، در نتیجه یک تابع مفصل  $C$  وجود دارد به طوری که  $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ . برعکس، برای هر تابع توزیع تک متغیره  $F$  و  $G$  و هر مفصل  $C$ ، تابع  $H$  مذکور یک تابع دوبعدی با توابع حاشیه‌ای  $F$  و  $G$  تعریف می‌کند. همچنین اگر  $F, G$  پیوسته باشند،  $C$  یکتاست.

بنابراین

$$u, v \in I = [0, 1]; \quad (۲)$$

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

کرانه‌های تابع مفصل توسط فرشه مشخص شد:

$$\begin{cases} W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\} \\ M(u, v) = \min\{u, v\} \\ W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) \end{cases} \quad (۳)$$

اثبات:

مثال ۲- فرض کنید  $(0 \leq \alpha, \beta \leq 1)$ ، مفصل بقا برای خانواده مارشال-الکین  $[10]$ ، از توزیع نمایی دو متغیره، یعنی  $C_{\alpha, \beta}(u, v) = \min(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta})$  منحنی  $u^\alpha = v^\beta$  وقتی  $\alpha\beta > 0$  دارد. بنابراین با استفاده از رابطه (۸) داریم:

$$\begin{aligned} \tau &= 1 - 4 \iint_{I^2, u^\alpha < v^\beta} (1-\beta)v^{1-2\beta} u du dv - \\ &\quad 4 \iint_{I^2, u^\alpha > v^\beta} (1-\alpha)vu^{1-2\alpha} du dv \\ &= 1 - \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha-\alpha\beta+\beta} - 1 + \frac{\alpha}{\beta-\alpha\beta+\alpha} \\ &= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha\beta+\alpha} \end{aligned}$$

$\rho$  ی اسپیرمن

سه مشاهده مستقل  $(X_1, Y_1)$ ،  $(X_2, Y_2)$  و  $(X_3, Y_3)$  از بردار  $(X, Y)$  را در نظر بگیرید. آنگاه کمیت

$$\rho_s = 3[p\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}] \quad (9)$$

به  $\rho$  ی اسپیرمن مشهور است.

قضیه ۲- متغیر تصادفی  $(X, Y)$  با تابع توزیع توأم  $H$  و توابعهای حاشیه‌ای  $F(x)$  و  $G(y)$  تابع مفصل  $C$  را در نظر بگیرید. آنگاه:

$$\rho_s = 12 \iint_{I^2} uv dC - 3 \quad (10)$$

اثبات:

سه مشاهده مستقل  $(X_1, Y_1)$ ،  $(X_2, Y_2)$  و  $(X_3, Y_3)$  از بردار  $(X, Y)$  را در نظر بگیرید.  $P$  را احتمال این که  $(X_1, Y_1)$  و  $(X_2, Y_2)$  هماهنگ باشند فرض می‌کنیم، یعنی:

$$\begin{aligned} P &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] \quad (11) \\ &= P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] \end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که این تابع تنها از طریق مفصل به توزیع  $(X_1, Y_1)$  و  $(X_2, Y_2)$  وابسته است. فرض کنید

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

باشروطی کردن روی مقادیر  $(X_1, Y_1)$  داریم:

$$\begin{aligned} \tau &= \iint_{R^2} \{P[X_1 < x, Y_1 < y] + P[X_1 > x, Y_1 > y] \\ &\quad - P[X_1 < x, Y_1 > y] - P[X_1 > x, Y_1 < y]\} dH \\ &= \iint_{R^2} \{H(x, y) + [1 - F(x) - G(y) + H(x, y)] \\ &\quad - [F(x) - H(x, y)] - [G(y) - H(x, y)]\} dH \\ &= \iint_{R^2} \{C(u, v) + [1 - u - v + C(u, v)] \\ &\quad - [u - C(u, v)] - [v - C(u, v)]\} dC \end{aligned}$$

که در آن  $u = F(x)$  و  $v = G(y)$  آنگاه:

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC - 2 \iint_{I^2} (u + v) dC + 1 \\ &= 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC - 2E(U + V) + 1 \end{aligned}$$

از آنجائی که  $U$  و  $V$  دارای توزیع یکتواخت بر روی بازه  $[0, 1]$  هستند،

$$E(U) = E(V) = \frac{1}{2} \quad \text{داریم:}$$

$$\tau = 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC - 1 \quad \text{در نتیجه:}$$

و

$$\iint_{I^2} C_1(u, v) dC_1(u, v) = \frac{1}{2} - \quad (7)$$

$$\iint_{I^2} \frac{\partial}{\partial u} C_1(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C_1(u, v) du dv$$

لذا رابطه (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت: [۹]

$$\tau = 1 - 4 \iint_{I^2} \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) du dv \quad (8)$$

$$\rho_s = 12 \iint_{I'} [C(u, v) - uv] dudv \quad (13)$$

مثال ۳- تابع مفصل فرشه را در نظر بگیرید:

$$C(u, v) = \alpha M(u, v) + (1 - \alpha - \beta)uv + \beta W(u, v)$$

رابطه ۱۱ را برای این مفصل به کار می‌بریم:

$$\rho_s = 12 \left\{ \iint_{I', u < v, u+v < 1} [\alpha u + (1 - \alpha - \beta)uv] dudv + \iint_{I', u < v, u+v > 1} [\alpha u + (1 - \alpha - \beta)uv + \beta(u + v - 1)] dudv + \right.$$

$$\left. \iint_{I', u > v, u+v < 1} [\alpha v + (1 - \alpha - \beta)uv] dudv + \iint_{I', u > v, u+v > 1} [\alpha u + (1 - \alpha - \beta)uv + \beta(u + v - 1)] dudv \right\} - 2$$

$$\rho_s = 12 \left\{ \left[ \frac{1}{24} \alpha + \frac{1}{48} (1 - \alpha - \beta) \right] + \left[ \frac{1}{48} \alpha - \frac{1}{48} \beta + \frac{5}{48} \right] + \left[ \frac{1}{48} \alpha - \frac{1}{48} \beta + \frac{1}{48} \right] + \left[ \frac{1}{48} \alpha - \frac{1}{48} \beta + \frac{5}{48} \right] \right\} - 2$$

بنابراین:

$$\rho_s = \alpha - \beta$$

ی جینی:

کمیت زیر یکی دیگر از معیارهای اندازه‌گیری ارتباط است که به

ی جینی معروف است:

$$\gamma = 2E(|F(X) + G(Y) - 1| - |F(X) - G(Y)|) \quad (14)$$

قضیه ۳- فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی با مفصل  $C$  باشند.

آنگاه اندازه ارتباط جینی برای  $X$  و  $Y$  عبارت است از:

$$\gamma = 2 \left[ \iint_{I'} M(u, v) dC + \iint_{I'} W(u, v) dC \right] - 2 \quad (15)$$

اثبات:

فرض کنید  $F(x) = u$  و  $G(y) = v$ . در نتیجه

$$\begin{aligned} \gamma &= 2E(|U + V - 1| - |U - V|) \\ &= 2 \iint_{I'} [|u + v - 1| - |u - v|] dC(u, v) \end{aligned}$$

پس با شرطی کردن بر توزیع  $(X_1, Y_1)$  و در نظر گرفتن استقلال  $X_2$  و  $Y_2$  داریم:

$$\begin{aligned} P &= \iint_{R'} \{P[X < x]P[Y < y] + P[X > x]p[Y > y]\} dH \\ &= \iint_{R'} \{F(x)G(y) + (1 - F(x))(1 - G(y))\} dH \\ &= \iint_{I'} \{uv + (1 - u)(1 - v)\} dC \end{aligned}$$

با توجه به اینکه  $U$  و  $V$  دارای توزیع یکنواخت بر بازه  $[0, 1]$  هستند،

$$= 2 \iint_{I'} uv dC$$

پس با توجه به رابطه (۹) داریم:

$$\rho_s = 6p - 2$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\rho_s = 12 \iint_{I'} uv dC - 2$$

فرم دیگر  $\rho_s$  را می‌توان از رابطه ۱۱ و شرطی کردن روی توزیع  $(X_2, Y_2)$  به دست آورد. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} P &= \iint_{R'} \{p[X > x, Y > y] + p[X < x, Y < y]\} dF dG \\ &= \iint_{I'} \{[1 - F(x) - G(y) + H(x, y)] + H(x, y)\} dudv \end{aligned}$$

با توجه به اینکه  $U$  و  $V$  دارای توزیع یکنواخت بر بازه  $[0, 1]$  هستند:

$$= 2 \iint_{I'} C(u, v) dudv$$

در نتیجه

$$\rho_s = 12 \iint_{I'} C(u, v) dudv - 2 \quad (12)$$

با توجه به توزیع  $U$  و  $V$  فرم دیگری را نیز می‌توان از رابطه ۱۱ برای  $\rho_s$  به صورت زیر به دست آورد: [۹]

$$H(x, y) - F(x)G(y) \geq 0$$

حال، چون

و زوج  $(X, Y)$  را وابسته مربعی منفی گویند هر گاه:

$$H(x, y) - F(x)G(y) \leq 0$$

بنابراین اندازه مقطعی وابستگی مربعی در هر نقطه  $(x, y) \in R$  برابر  
 $W(x, y) = H(x, y) - F(x)G(y)$  است. با استفاده از ویژگیهای توابع  
 مفصل می‌توان یک اندازه، برای وابستگی مربعی مورد انتظار به دست  
 آورد. این اندازه عبارت است از:

$$E(W) = E(W(x, y)) \quad (16)$$

$$= \iint_{R^1} [H(x, y) - F(x)G(y)] dH(x, y)$$

$$= \iint_{I^1} [C(u, v) - uv] dC(u, v)$$

و در نتیجه

$$E(W) = \frac{1}{12} (\rho_T - \rho_S)$$

وابستگی رگرسیون<sup>۲</sup>

زوج متغیر تصادفی  $(X, Y)$  را وابسته رگرسیونی مثبت گویند هر گاه  
 $P[Y \leq y | X = x]$  به ازای تمام  $y$ ها بر حسب  $x$  نزولی باشد و  
 وابسته رگرسیونی منفی گویند هر گاه احتمال شرطی فوق بر حسب  $x$   
 صعودی باشد. با استفاده از توابع مفصل بررسی وابستگی رگرسیونی  
 بسیار ساده‌تر می‌شود.

قضیه ۴- زوج متغیر تصادفی  $(X, Y)$  وابسته رگرسیونی مثبت استاگر و تنها اگر  $\frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$  به ازای تمام  $v$ ها بر حسب  $u$  نزولی باشدوابسته رگرسیونی مثبت است اگر و تنها اگر  $\frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$  بر حسب  $u$   
 صعودی باشد.

اثبات:

$$P[Y \leq y | X = x] = \frac{\frac{\partial}{\partial x} H(x, y)}{\frac{d}{dx} F(x)}$$

$$M(u, v) = \min(u, v) = \frac{1}{2} [u + v - |u - v|]$$

بنابراین داریم:

$$2 \iint_{I^1} M(u, v) dC(u, v) =$$

$$2 \iint_{I^1} [u + v - |u - v|] dC(u, v) = A$$

چون تابع مفصل یک تابع توزیع دو متغیره با توزیع حاشیه‌ای تک متغیره  
 یکنواخت بر بازه  $(0, 1)$  می‌باشد، داریم:

$$\iint_{I^1} u dC(u, v) = \iint_{I^1} v dC(u, v) = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$A = 2 - 2 \iint_{I^1} |u - v| dC(u, v)$$

همچنین چون

$$W(u + v) = \frac{1}{2} [u, v - 1 + |u + v - 1|]$$

به طور مشابه داریم:

$$2 \iint_{I^1} W(u, v) dC(u, v) = 2 \iint_{I^1} [u + v - 1] dC(u, v)$$

در نتیجه

$$\gamma = 2E(|U + V - 1| - |U - V|)$$

$$= 2 \left[ \iint_{I^1} M(u, v) dC + \iint_{I^1} W(u, v) dC \right] - 2$$

## ۴. مفاهیم وابستگی

وابستگی مربعی<sup>۱</sup>

فرض کنید  $(X, Y)$  یک زوج متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع توأم  
 $H$  و توابع توزیع حاشیه‌ای  $F$  و  $G$  باشد. زوج  $(X, Y)$  را وابسته مربعی  
 مثبت گویند هر گاه:

حال با جایگذاری  $u$  و  $v$  به ترتیب به جای  $u_r$  و  $v_r$  داریم:

$$T = \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) du dv \quad (19)$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) du dv$$

با توجه به روابط ۵ و ۷ به سادگی مشاهده می شود که انتگرال اول برابر  $\frac{1}{4}(\tau + 1)$  و انتگرال دوم برابر  $\frac{1}{4}(1 - \tau)$  می باشد. بنابراین  $T = \frac{1}{4}\tau$  در نتیجه اگر تابع توزیع  $(x, y)$  مطلقاً پیوسته باشد، عبارت  $\frac{1}{4}\tau$  مشخص کننده یک اندازه متوسط از وابستگی نسبت درستمایی است [۸].

### وابستگی در دنباله<sup>۱</sup>

متغیر تصادفی  $Y$  را صعودی در دنباله راست<sup>۱۱</sup> بر حسب متغیر تصادفی  $X$  گویند، هر گاه  $p[Y \leq y | X > x]$  به ازای تمام مقادیر  $y$ ، بر حسب  $x$  صعودی باشد. اگر  $Y|X$  صعودی در دنباله راست باشد، از نماد  $RTI(Y|X)$  استفاده می شود.

متغیر تصادفی  $Y$  را نزولی در دنباله چپ<sup>۱۱</sup> بر حسب متغیر تصادفی  $X$  گویند اگر و تنها اگر  $p[Y \leq y | X \leq x]$  به ازای تمام مقادیر  $y$ ، بر حسب  $x$  نزولی باشد. اگر  $Y|X$  نزولی در دنباله چپ باشد، آن را با نماد  $LTD(Y|X)$  نشان می دهند [۴ و ۵].

قضیه ۵- فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی با تابع توزیع توأم  $H(x, y)$  و به ترتیب با توابع حاشیه ای  $F(X)$  و  $G(Y)$  باشند و تابع مفصل برابر  $C$  باشد. آنگاه:

الف)  $LTD(Y|X)$  اگر و تنها اگر  $C(u, v)/u$  به ازای تمام  $v$  ها بر حسب  $u$  نزولی باشد.

ب)  $RTI(Y|X)$  اگر و تنها اگر  $C(u, v)/(1-u)$  به ازای تمام  $v$  ها بر حسب  $u$  صعودی باشد، یا  $C(u, v)/(1-u)$  به ازای تمام  $v$  ها بر حسب  $u$  نزولی باشد.

Likelihood ratio dependence<sup>۱</sup>

Right Tail Increasing<sup>۱۱</sup>

Left Tail Decreasing<sup>۱۱</sup>

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$$

و حکم ثابت می شود [۹].

### وابستگی نسبت درستمایی<sup>۱</sup>

زوج متغیر تصافی  $(X, Y)$  با تابع چگالی پیوسته  $h$ ، وابسته نسبت درستمایی مثبت است اگر و تنها اگر

$$\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2;$$

$$h(x_2, y_2)h(x_1, y_1) - h(x_1, y_2)h(x_2, y_1) \geq 0$$

و اگر نامساوی فوق برعکس باشد زوج متغیر تصادفی  $(X, Y)$  وابسته نسبت درستمایی منفی می باشند [۶ و ۷]. تعریف می کنیم:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y_2} \int_{-\infty}^{x_2} [h(x_2, y_2)h(x_1, y_1) \quad (17)$$

$$- h(x_1, y_2)h(x_2, y_1)] dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

با استفاده از ویژگیهای تابع مفصل و  $u = F(x)$  و  $v = G(y)$  داریم:

$$T = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{v_2} \int_0^{u_2} [c(u_2, v_2)c(u_1, v_1)$$

$$- c(u_1, v_2)c(u_2, v_1)] du_1 dv_1 du_2 dv_2$$

که در آن  $c(u, v)$  چگالی مفصل، یعنی

$$c(u, v) = (\partial^2 / \partial u \partial v) C(u, v)$$

می باشد. بنابراین:

$$h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y)$$

که  $f$  و  $g$  توابع چگالی  $X$  و  $Y$  هستند.

برای ارزیابی  $T$ ، ابتدا فرض می کنیم  $T(u_r, v_r)$  بیسانگر انتگرال دوگانه درونی باشد. لذا به سادگی داریم:

$$T(u_r, v_r) = C(u_r, v_r) \frac{\partial^2}{\partial u_r \partial v_r} C(u_r, v_r) \quad (18)$$

$$- \frac{\partial}{\partial u_r} C(u_r, v_r) \frac{\partial}{\partial v_r} C(u_r, v_r)$$

Likelihood Ratio Dependence<sup>۱</sup>

اثبات:

می‌توان نشان داد. ضریب وابستگی در دنباله، اندازه وابستگی در دنباله را نشان می‌دهد. ضریب وابستگی در دنباله بالایی برای متغیرهای تصادفی  $(X, Y)$  عبارت است از:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} P[Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u)] \quad (23)$$

با این شرط که حد فاصله  $[0, 1]$  وجود داشته باشد که در آن:

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in R | F(x) > u\}; \forall u \in (0, 1)$$

اگر  $\lambda_U \in (0, 1]$  و  $X, Y$  را به طور مجانبی وابسته در دنباله بالایی گویند. اگر  $\lambda_U = 0$  و  $X, Y$  را به طور مجانبی مستقل در دنباله بالایی گویند.

ضریب وابستگی در دنباله پایینی عبارت است از:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} P[Y \leq G^{-1}(u) | X \leq F^{-1}(u)] \quad (24)$$

اگر  $\lambda_L \in (0, 1]$  و  $X, Y$  را به طور مجانبی وابسته در دنباله پایینی گویند. اگر  $\lambda_L = 0$  و  $X, Y$  را به طور مجانبی مستقل در دنباله پایینی گویند.

قضیه ۶- فرض کنید  $C$  تابع مفصل  $X$  و  $Y$  باشد، آنگاه:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} (1 - 2u + C(u, u)) / (1 - u) \quad (25)$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} C(u, u) / u \quad (26)$$

اثبات:

معادل با تعریف (۲۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} P[Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u)] &= \\ \frac{P[Y > G^{-1}(u), X > F^{-1}(u)]}{P[X > F^{-1}(u)]} &= \\ \frac{1 - p[X \leq F^{-1}(u)] - p[Y \leq G^{-1}(u)]}{1 - p[X \leq F^{-1}(u)]} &+ \\ \frac{p[X \leq F^{-1}(u), Y \leq G^{-1}(u)]}{1 - p[X \leq F^{-1}(u)]} & \end{aligned}$$

همچنین

فرض کنید  $C$  یک تابع مفصل برای متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  باشد، و  $u = F(x)$  و  $v = G(y)$ . آنگاه:

$$p[Y \leq y | X \leq x] = \frac{P[Y \leq y, X \leq x]}{P[X \leq x]} \quad (20)$$

$$= \frac{C(u, v)}{u}$$

پس حکم (الف) برقرار است. از طرف دیگر

$$p[Y > y | X > x] = \frac{P[Y > y, X > x]}{P[X > x]} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - P[Y \leq y \text{ or } X \leq x]}{1 - P[X \leq x]} \\ &= \frac{1 - u - v + C(u, v)}{1 - u} \end{aligned}$$

$$P[Y \leq y | X > x] = 1 - P[Y > y | X > x] \quad (22)$$

$$= \frac{v - C(u, v)}{1 - u}$$

بنابراین قسمت (ب) نیز برقرار است.

با توجه به این قضیه، نتیجه زیر بدیهی می‌باشد.

نتیجه - فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی پیوسته با مفصل  $C$

باشند، آنگاه:

الف)  $LTD(Y|X)$  اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq \frac{C(u, v)}{u}$$

ب)  $RTI(Y|X)$  اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \geq \frac{v - C(u, v)}{1 - u}$$

۵. ضریب وابستگی در دنباله<sup>۱۲</sup>

وابستگی در دنباله مفهومی است که از مطالعه وابستگی بین مقادیر انتهایی ناشی می‌شود. این نوع وابستگیها را به خوبی توسط تابع مفصل

$$= \frac{1 - 2u + u^{\frac{1}{\theta}}}{1 - u}$$

در نتیجه

$$P[Y \leq G^{-1}(u) | X \leq F^{-1}(u)] =$$

$$\frac{P[Y \leq G^{-1}(u), X \leq F^{-1}(u)]}{P[X \leq F^{-1}(u)]}$$

و حکم ثابت می‌شود [۳].

مثال ۴- مفصل دو متغیره گامبل به صورت زیر است:

$$\theta \geq 1; \quad (27)$$

$$C_{\theta}(u, v) = \exp(-[(-Lnu)^{\theta} + (-Lnv)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}})$$

آنگاه

$$\frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \frac{1 - 2u + \exp(\frac{1}{\theta} Lnu)}{1 - u}$$

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

$$= 2 - \lim_{u \rightarrow 1} 2^{\frac{1}{\theta}} u^{\frac{1}{\theta} - 1} = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$$

بنابراین برای  $\theta > 1$ ،  $C_{\theta}$  وابستگی در دنباله بالایی دارد و برای  $\theta = 1$  به طور مجانبی مستقل در دنباله بالایی می‌باشد.

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} C(u, u) / u = 0; 1 \leq \theta < \infty$$

$C_{\theta}$  به طور مجانبی مستقل در دنباله پایینی می‌باشد.

## مراجع:

[۱] امینی دهک، محمد، ۱۳۷۳، تحلیل پیوندهای منفی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد.

[2] Ebrahimi, N. and Ghosh, M., 1981, *Multivariate Negative Dependence*, Commun.Stat. Theory Methods, 4, 307-337.

[3] Emberechts, P., Lindskog, F. and Mcneil, A., 2001, *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, Risklab.ETHZ, Zurich, WWW.math.ethz.ch/finance, will appear in : Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance.

[4] Esary, J.D., Proschan, F. and Walkup, D.W., 1967, *Association of Random Variables with Applications*, Ann.Math.Statist., 38, 1466- 1474.

[5] Esary, J.D and Proschan, F., 1972, *Relationships among Some Concepts of Bivariate Dependence*, Ann.Math.Statist., 43, 651- 655.

[6] Joe, H., 1997, *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, London.

[7] Lehman, E.L., 1966, *Some Concept of Dependence*, Ann.Math.Statist, 37, 1137- 1153.

[8] Nelsen. R.B., 1992, *On Measures of Association as Measures of Positive Dependence*, Statistics & Probability Letters 14, 269- 274.

[9] Nelsen, R.B., 1999, *An Introduction to Copuals*, Springer, New York.

[10] Nelsen, R.B., 2001, *Concordance and Copulas: A Survey Distributions with Given Marginals and Statistical Modeling*, (C.Cuadras, J.Fortiana, J.A.Rodriguez Lallena, Eds), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, in press.