برآورد پارامترهای توزیع نرمال بر اساس مشاهدات رکوردی

جعفر احمدی[۱] مهدی دوست پرست[۲]

چکیده

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با تابع توزیع F باشند. X_j را یک رکورد بالا (پایین) گوئیم هرگاه از تمام مشاهدات قبل از خود بزرگتر (کوچکتر) باشد. در این مقاله، فرض شده است که F متعلق به یک خانوادهٔ مکانی - مقیاسی است. بر اساس مشاهدات رکوردی، برآوردگرهایی برای پارامترهای این خانواده به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم، نیاز به حل دستگاه معادلات غیرخطی داریم. در اینجا حالت خاص نرمال بودن توزیع جامعه را در نظر می‌گیریم و با استفاده از روشهای آنالیز عددی، برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم را برای پارامترهای توزیع نرمال محاسبه می‌کنیم. همچنین با استفاده از معیار کمترین توانهای دوم خطا، بهترین برآوردگرهای خطی نااریب را بر اساس مشاهدات رکوردی برای پارامترهای توزیع نرمال به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: روش نیوتن-رافسن، دستگاه معادلات غیرخطی، رکورد بالا (پایین)، خانوادهٔ توزیعهای مکانی-مقیاسی برآوردگر درستنمایی ماکسیمم، بهترین برآوردگر خطی نااریب.

۱. مقدمه

نظریهٔ رکوردها شاخه‌ای نسبتاً جدید می‌باشد و در چند دههٔ اخیر رشد اصلی خود را کرده است. این نظریه، علاوه بر ویژگیهای مهم تئوری دارای کابردهای خاص عملی است. تغییرات جوی، بعضی از مسائل گرافیک، پیشامدهای طبیعی مانند باد و مسائل مربوط به تعیین مقاومت مصالح و محاسبهٔ احتمال کارافت و ... از جمله کاربردهای مهم آن می‌باشد.

تحقیق بر اساس رکوردها تا کنون مورد توجه محققین بسیاری واقع شده است. شاید بتوان گفت چندلر[۳] به طور برجسته‌ای مطالعهٔ مقادیر رکورد را شروع کرد و رزنیک[۴] [۱۳] و شروک[۵] [۱۴]، نظریهٔ مجانبی رکوردها را تکمیل کردند. بعدها، نظرات جالبی برای نسبت دادن مقادیر رکورد با فرایندهای فرین معین معرفی شد. گلیک[۶] [۱۱] با استفاده از عنوان فریبندهٔ "شکستن رکوردها و شکستن مرزها" تحقیقات بیست و پنج سالهٔ اول را جمع‌آوری کرد. در سالهای اخیر استنباط آماری بر اساس رکوردها نیز مورد توجه قرار گرفته است که می‌توان به کارلین و گلفند[۷] [۸]، فیورورگری و هال[۸] [۱۰]، گاتی و پادجت[۹] [۱۲]، احمدی [۱] و احمدی و ارقامی [۲و۳] مراجعه کرد. احمدی و ارقامی [۲] با ارائهٔ نظریهٔ اطلاع فیشر بر اساس رکوردها، نشان دادند که در بعضی موارد، رکوردها بسیار مناسب‌تر از مشاهدات عمل می‌کنند.

در بخش ۲ این مقاله، تعاریف و نمادهای پایه‌ای را ارائه می‌دهیم.

---

[۱] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد

[۳] Chandler

[۴] Resnick

[۵] Shorrock

[۶] Glick

[۷] Carlin and Gelfand

[۸] Feuerverger and Hall

[۹] Gulti and Padgett

در بخش ۳، یک خانوادهٔ مکانی- مقیاسی را در نظر گرفته و بر اساس مشاهدات رکوردی، برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم برای پارامترهای آن را معرفی می‌نماییم. در این مقاله، توزیع نرمال را در نظر می‌گیریم و با استفاده از شبیه سازی، رکوردهای مورد نیاز از توزیع نرمال استاندارد را استخراج می‌کنیم، همچنین بر اساس معیار لوید[۱۰] با محاسبهٔ گشتاورهای رکوردهای حاصل از توزیع نرمال استاندارد، برآوردگرهای خطی نااریب برای پارامترها را به دست می‌آوریم.

۲. تعاریف و نمادها

در این بخش چند تعریف پایه‌ای که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کنیم.

۲ـ۱ رکورد

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با توزیع مشترک F باشد. مشاهدهٔ X_j را یک رکورد بالا (پایین) می‌گوییم هرگاه از همهٔ مشاهدات قبل از خود بزرگتر (کوچکتر) باشد.

در ادامه، خود را به رکوردهای بالا محدود می‌کنیم. نتایج حاصل را می‌توان برای رکوردهای پایین با اندکی تغییر مورد استفاده قرار داد.

۲ـ۲ زمان رکورد

طبق تعریف ۲ .۱، زمانی که در آن رکورد رخ می‌دهد یک متغیر تصادفی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود که T_1 با احتمال یک برابر یک است و برای $K \geq 2$،

$$T_k = \min\{j : X_j > X_{T_{k-1}}\}$$

که T_k زمان رخ دادن k امین رکورد بالا می‌باشد.

در این مقاله، n امین رکورد بالا را با U_n نشان می‌دهیم. بنابراین طبق تعاریف بالا، دنبالهٔ رکوردهای بالا عبارت اند از :

$$.U_n = X_{T_n}; \quad n \geq 1$$

۲ـ۳ توزیع رکوردها

اگر $U_1, \ldots, U_n$ رکوردهای بالا در نمونه‌ای تصادفی از یک توزیع با تابع چگالی $f(.)$ و تابع توزیع $F(.)$ باشد، در این صورت تابع چگالی نخستین n رکورد بالا به صورت زیر بیان می‌شود:

$$-\infty < u_1 < \ldots < u_n < \infty \qquad (1)$$

$$f_{U_1,\ldots,U_n}(u_1,\ldots,u_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(u_i)}{1-F(u_i)} \times f(u_n)$$

بنابراین اگر $U_1, \ldots, U_n$ رکوردهای بالا در نمونه‌ای تصادفی از خانوادهٔ مقیاسی- مکانی با تابع چگالی

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} f(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

و تابع توزیع

$$F(x;\mu,\sigma) = F(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

باشد، دراین صورت تابع چگالی نخستین n رکورد بالا به صورت زیر بیان می‌شود:

$$-\infty < u_1 < \ldots < u_n < \infty \qquad (2)$$

$$f_{U_1,\ldots,U_n}(u_1,\ldots,u_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(u_i^*)}{1-f(u_i^*)} \times f(u_n^*)$$

که در آن

$$u_i^* = \frac{u_i - \mu}{\sigma}; i = 1,\ldots,n$$

رکوردهای بالا از توزیع $F(x)$ هستند.

تابع چگالی احتمال توأم U_m و U_n را با $f_{m,n}(x,y)$ نشان داده و داریم:

$$-\infty < x < y < \infty, \quad m = 1,2,\ldots \quad , m < n; \qquad (3)$$

$$f_{m,n}(x,y) = \frac{1}{(m-1)!(n-m-1)!} \times$$

$$[R(x)]^{m-1} \frac{f(x)}{1-F(x)} [R(x)-R(y)]^{n-m-1} f(y)$$

که در آن $.R(x) = -\log(1-F(x))$

تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای U_n را با $f_n(x)$ نشان می‌دهیم که

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} [\log\{1-F(x)\}]^{n-1} f(x)$$

$$;-\infty < x < \infty, \quad n = 1,2,\ldots$$

---

[۱۰] Loyid

اثبات موارد ۱ـ۴ را می‌توان در آرنولد و بقیه[11] [۵] یا احمدی [۱] دید.

مثال ـ فرض کنید دنباله‌ای از مشاهدات با ۱۰= n با مقادیر زیر داشته باشیم:

۱۱، ۱۰، ۳۲، ۴۰، ۱۲، ۳۰، ۲۵، ۱۸، ۲۲، ۲۰

دراین صورت طبق تعریف ۲ـ۲، رکوردهای بالا عبارت اند از:

$$U_۱ = ۲۰, U_۲ = ۲۲, U_۳ = ۲۵, U_۴ = ۳۰, U_۵ = ۴۰$$

و زمان رخ دادن رکوردهای بالا عبارت اند از:

$$T_۱ = ۱, T_۲ = ۲, T_۳ = ۴, T_۴ = ۵, T_۵ = ۷$$

لازم به ذکر است که دنبالهٔ رکوردهای پایین نمونهٔ بالا عبارتند از: ۱۰، ۱۲،۱۸،۲۰.

۳. برآورد

در این بخش، با استفاده از مشاهدات رکوردی، پارامترهای جامعه را تخمین می‌زنیم. در زیر بخش ۳ـ۱، یک خانوادهٔ مقیاسی- مکانی را در نظر می‌گیریم و با حل دستگاه معادلات غیرخطی، برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم برای پارامترها را به دست می‌آوریم. در این مقاله، با در نظرگرفتن توزیع نرمال و با استفاده از روشهای عددی و شبیه سازی کامپیوتری، برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم برای میانگین و واریانس توزیع نرمال،بر اساس داده‌های رکوردی به دست می‌آید. همچنین در زیر بخش ۳ـ۲، با استفاده از روش لوید که در آرنولد و بقیه آمده است[۵] ، بهترین برآوردگر خطی نااریب برای پارامترهای توزیع نرمال محاسبه می‌شود.

۳ـ۱ برآورد درستنمایی ماکسیمم

دراین زیر بخش، برآورد درستنمایی ماکسیمم μ و σ را در حالت کلی برای هر خانوادهٔ مکانی- مقیاسی به دست آورده و نتیجه را برای حالت خاصی که توزیع جامعه نرمال باشد، به کار می‌بریم.

اگر توزیع جامعه از خانوادهٔ مکانی- مقیاسی به ترتیب با پارامترهای μ و σ باشد، آنگاه طبق رابطهٔ ۲، تابع درستنمایی بر اساس نخستین n رکورد بالا عبارت است از:

$$L(\mu,\sigma;u_۱,\dots,u_n) = \frac{۱}{\sigma^n}\prod_{i=۱}^{n-۱}\{\frac{f(u_i^*)}{۱-F(u_i^*)}\}f(u_n^*) \quad (۵)$$

می‌دانیم یکی از روشهای به دست آوردن برآوردگر درستنمایی، استفاده از تکنیک مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درستنمایی می‌باشد. لذا از رابطهٔ ۵ داریم:

$$\log(L) = -n\log(\sigma) - \sum_{i=۱}^{n-۱}\log(۱-F(u_i^*)) + \sum_{i=۱}^{n}\log(f(u_i^*)) \quad (۶)$$

با مشتقگیری از رابطهٔ ۶ نسبت به μ و σ به ترتیب داریم:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log(L) = \sum_{i=۱}^{n-۱}\frac{f(u_i^*)}{۱-F(u_i^*)} + \sum_{i=۱}^{n}\frac{f'(u_i^*)}{f(u_i^*)} \quad (۷)$$

و

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\log(L) = n + \sum_{i=۱}^{n-۱}\frac{u_i^* f(u_i^*)}{۱-F(u_i^*)} + \sum_{i=۱}^{n}\frac{u_i^* f'(u_i^*)}{f(u_i^*)} \quad (۸)$$

در معادلات ۷ و ۸، $f'(x)$ مشتق $f(x)$ است. برای به دست آوردن برآوردگر درستنمایی ماکسیمم باید دستگاه معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log(L) = ۰$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\log(L) = ۰$$

از آنجا که توجه ما معطوف به توزیع نرمال است، معادلات ۷ و ۸ را بر اساس رکوردهای استخراج شده از توزیع نرمال استاندارد بازنویسی می‌کنیم. تابع چگالی و تابع توزیع نرمال استاندارد را به ترتیب با $\varphi(x)$ و $\Phi(x)$ نشان می‌دهیم که

$$\varphi(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp\{-\frac{۱}{۲}x^۲\}$$

و

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp\{-\frac{۱}{۲}t^۲\}dt$$

از طرفی برای توزیع نرمال داریم:

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{۲\pi}}\exp\{-\frac{۱}{۲}x^۲\} = -x\varphi(x) \quad (۹)$$

[11] *Arnold et al*

و با جایگذاری در معادله‌های ۷ و ۸ داریم:

$$\sigma\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}-\sum_{i=1}^{n}u_i+n\mu=0 \tag{10}$$

$$n\sigma^2+\sigma\sum_{i=1}^{n-1}\frac{u_i\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}-\sum_{i=1}^{n}u_i^2+\mu\sum_{i=1}^{n}u_i=0 \tag{11}$$

اکنون با استفاده از الگوریتم نیوتن- رافسن دستگاه معادلات ۱۰ و ۱۱ را حل می‌کنیم. برای این منظور قرار دهید:

$$f_1(\mu,\sigma)=\sigma\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}-\sum_{i=1}^{n}u_i+n\mu$$

$$f_2(\mu,\sigma)=$$

$$n\sigma^2+\sigma\sum_{i=1}^{n-1}\frac{u_i\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}-\sum_{i=1}^{n}u_i^2+\mu\sum_{i=1}^{n}u_i$$

$$F(\mu,\sigma)=(f_1(\mu,\sigma),f_2(\mu,\sigma))$$

$$x^{(k)}=(\mu^{(k)},\sigma^{(k)})$$

که $\mu^{(k)}$ مقدار μ و $\sigma^{(k)}$ مقدار σ در مرحلهٔ kام الگوریتم است. برای حل دستگاه $F(\mu,\sigma)=0$ ، بعد از انتخاب یک تقریب اولیهٔ $x^{(0)}$ ، مراحل زیر را اجرا می‌کنیم:

مرحله ۱ـ k را برابر صفر قرار می‌دهیم،

مرحله ۲ـ $F(x^{(k)})$ وماتریس J یعنی

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\mu} & \frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\\ \frac{\partial f_2}{\partial k} & \frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\end{pmatrix}$$

را محاسبه می‌کنیم که درآن

$$\frac{\partial f_1}{\partial\mu}=\sum_{i=1}^{n-1}u_i^*\frac{\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}-\sum_{i=1}^{n-1}\{\frac{\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}\}^2+n$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial\mu}=$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}u_iu_i^*\frac{\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}-\sum_{i=1}^{n-1}u_i\{\frac{\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}\}^2+\sum_{i=1}^{n}u_i$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}+$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}u_i^{*2}\frac{\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}-\sum_{i=1}^{n-1}u_i^*\{\frac{\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}\}^2$$

و

$$\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}=2n\sigma+\sum_{i=1}^{n-1}u_i(1+u_i^*)^2\frac{\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1}u_iu_i^*\{\frac{\varphi(u_i^*)}{1-\Phi(u_i^*)}\}^2$$

مرحله ۳ـ دستگاه معادلات خطی

$$J(x^{(k)})y^{(k)}=-F(x^{(k)})$$

را نسبت به $y^{(k)}$ حل می‌کنیم.

مرحله ٤ـ قرار می‌دهیم:

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+y^{(k)}.$$

مرحله ۵ـ اگر $x^{(k+1)}$ بقدر کافی دقیق نباشد، یعنی

$$\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|_\infty\geq\varepsilon$$

که ε اختیاری است، یک واحد به k افزوده و به مرحله ۲ می‌رویم.

مرحله ٦ـ روند تمام است.

۳ـ۲ بهترین برآوردگر خطی نااریب

دراین بخش، بهترین برآوردگر خطی برای μ و σ با معیار کمترین توانهای دوم بر اساس رکوردهای بالا حاصل از توزیع $N(0,1)$ را به دست می‌آوریم.

اگر $f_n(x)$ تابع چگالی احتمال U_n باشد، در این صورت از رابطهٔ ٤ داریم:

$$-\infty<x<\infty, n=1,2,... \tag{12}$$

$$f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}[\log\{1-\Phi(x)\}]^{n-1}\phi(x)$$

و اگر $f_{m,n}(x,y)$ تابع چگالی احتمال توأم U_n و U_m باشد، در این صورت از رابطهٔ ۳ داریم:

$$-\infty < x < y < \infty, \qquad m = 1,2,\dots \qquad , m < n; \tag{۱۳}$$

$$f_{m,n}(x,y) = \frac{1}{(m-1)!(n-m-1)!} \times$$

$$[-\log\{1-\Phi(x)\}]^{m-1} \frac{\phi(x)}{1-\Phi(x)} \times$$

$$[-\log\{1-\Phi(x)\} + \log\{1-\Phi(y)\}]^{n-m-1} \phi(y)$$

با در نظر گرفتن

$$\alpha_n = E(U_n) \tag{۱۴}$$

$$\alpha_n^{(2)} = E(U_n^2), \quad \alpha_{m,n} = E(U_m U_n)$$

$$\beta_{n,n} = Var(U_n), \beta_{m,n} = Cov(U_m, U_n) \tag{۱۵}$$

قضیهٔ زیر را خواهیم داشت:

قضیهٔ ۱- برای رکوردهای بالا از توزیع نرمال استاندارد داریم:

$$\alpha_{n-1,n} = \alpha_n^{(2)} - 1 \quad ; \quad n \ge 2 \tag{۱۶}$$

برهان: از روابط ۱۲ و ۱۴ برای $n \ge 2$ داریم

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 [-\log\{1-\Phi(x)\}]^{n-1} \phi(x) dx$$

از رابطهٔ ۹ داریم:

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{-1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} x [-\log\{1-\Phi(x)\}]^{n-1} d\phi(x)$$

با استفاده از تکنیک انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توانیم بنویسیم:

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} [-\log\{1-\Phi(x)\}]^{n-1} \phi(x) dx$$

$$+ \frac{1}{(n-2)!} \int_{-\infty}^{\infty} x [-\log\{1-\Phi(x)\}]^{n-2} \frac{\phi(x)}{1-\Phi(x)} dx$$

$$= 1 + \frac{1}{(n-2)!} \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x [-\log\{1-\Phi(x)\}]^{n-2} \frac{\phi(x)}{1-\Phi(x)} \phi(x) dx$$

حال از رابطهٔ ۹

$$\phi(x) = \int_x^{\infty} -\phi'(y) dy = \int_x^{\infty} y \phi(y) dy \tag{۱۷}$$

لذا

$$\alpha_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{(n-2)!} \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{\infty} xy [-\log\{1-\Phi(x)\}]^{n-2} \frac{\phi(x)}{1-\Phi(x)} \phi(y) dy dx$$

$$= 1 + \alpha_{n-1,n}$$

نتیجهٔ ۱- برای $n \ge 2$ داریم:

$$\beta_{n-1.n} = \beta_{n,n} + \alpha_n(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - 1 \tag{۱۸}$$

زیرا

$$\begin{aligned}
\beta_{n-1,n} &= Cov(U_{n-1}, U_n) \\
&= E(U_{n-1}U_n) - E(U_{n-1})E(U_n) \\
&= \alpha_{n-1,n} - \alpha_{n-1}\alpha_n = (\alpha_n^{(2)} - 1) - \alpha_{n-1}\alpha_n \\
&= \alpha_n^{(2)} - \alpha_{n-1}\alpha_n - 1 \\
&= \alpha_n^{(2)} - (\alpha_n)^2 + (\alpha_n)^2 - \alpha_{n-1}\alpha_{n-1} - 1 \\
&= \beta_{n,n} + \alpha_n(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - 1
\end{aligned}$$

در جدولهای ۱ و ۲ به ترتیب مقادیر α_n و $\beta_{m,n}$ را تا $n = 10$ و $m \le n \le 10$ تعیین کرده‌ایم.

حال فرض کنید $U_1, \dots, U_n$ اولین n رکورد بالا از توزیع نرمال باشند، آنگاه با استفاده از روش لوید و با در نظر گرفتن معیار کمترین توانهای دوم [٤]، بهترین برآوردگرهای خطی نااریب برای μ و σ عبارت اند از:

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{n} a_i U_i \quad , \quad \sigma^* = \sum_{i=1}^{n} b_i U_i$$

که در آن بردارهای سطری a و b به صورت زیر داده می‌شوند:

$$a = \frac{\alpha' B^{-1} \alpha 1' B^{-1} - \alpha' B^{-1} 1 \alpha' B^{-1}}{(\alpha' B^{-1} \alpha)(1' B^{-1} 1) - (\alpha' B^{-1} 1)^2} \tag{۱۹}$$

$$b = \frac{1' B^{-1} 1 \alpha' B^{-1} - 1' B^{-1} \alpha 1' B^{-1}}{(\alpha' B^{-1} \alpha)(1' B^{-1} 1) - (\alpha' B^{-1} 1)^2} \tag{۲۰}$$

$$B=(\beta_{ij});۱\le i\le j\le n$$

$$\alpha'=(\alpha_۱,\alpha_۲,\dots,\alpha_n) \quad , \quad ۱'=(۱,۱,\dots,۱)_{۱\times n}$$

واریانس و کواریانس برآوردگرهای بالا عبارت اند از:

$$\frac{Var(u^*)}{\sigma^۲}=\frac{\alpha'B^{-۱}\alpha}{(\alpha'B^{-۱}\alpha)(۱'B^{-۱}۱)-(\alpha'B^{-۱}۱)^۲} \qquad (۲۱)$$

$$\frac{Var(\sigma^*)}{\sigma^۲}=\frac{۱'B^{-۱}۱}{(\alpha'B^{-۱}\alpha)(۱'B^{-۱}۱)-(\alpha'B^{-۱}۱)^۲} \qquad (۲۲)$$

$$\frac{Cov(\mu^*,\sigma^*)}{\sigma^۲}=\frac{\alpha'B^{-۱}۱}{(\alpha'B^{-۱}\alpha)(۱'B^{-۱}۱)-(\alpha'B^{-۱}۱)^۲} \qquad (۲۳)$$

با استفاده از میانگین، واریانس و کواریانس داده شده در جدولهای ۱ و ۲ ضرایب a و b را با توجه به معادله‌های (۱۹) و (۲۰) برای $n=۲,\dots,۱۰$ تعیین کرده و به ترتیب در جدولهای ۳ و ٤ می‌آوریم. همچنین مقادیر $Var(\mu^*)/\sigma^۲$، $Var(\sigma^*)/\sigma^۲$ و $Cov(\mu^*,\sigma^*)/\sigma^۲$ را از معادله‌های (۲۱)-(۲۳) محاسبه کرده و در جدول ۵ آورده‌ایم.

۳-۳ مثال

در این زیر بخش، به منظور استخراج رکوردهای توزیع نرمال استاندارد از بسته آماری *Minitab R11* استفاده شده است که در این شبیه سازی ٤ رکورد به دست آمده است:

$$U_۱=-۰/۴۱۲۳۵۶,\quad U_۲=۰/۳۵۱۱۰۲,$$
$$U_۳=۰/۵۶۹۱۸۷,\quad U_۴=۰/۶۸۹۹۹۹$$

برای به دست آوردن درستنمایی ماکسیمم پارامترهای توزیع نرمال، روش تکرار عددی نیوتن- رافسن را با فرض $\varepsilon=۰/۱$ طبق الگوریتم بخش ۳-۱ به کار برده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است:

$$\hat{\mu}=-۰/۰۶۴۵۸۸۱\approx-۰/۰۶,\qquad \hat{\sigma}=۰/۳۸۳۲۹۱\approx۰/۴$$

بهترین برآوردگر خطی نااریب μ و σ طبق روابط زیر بخش ۳-۲ عبارت اند از:

$$\begin{aligned}\mu^*&=((-۰/۴۱۲۳۵۶)\times۰/۷۷۹۹)+(۰/۳۵۱۱۰۲\times۰/۳۱۵۲)\\&+(۰/۵۶۹۱۸۷\times۰/۲۰۷۳)+۰/۶۸۹۹۹۹\times(-۰/۳۰۲۵)\\&=-۰/۳۰۱۶۶۱۳۲۶۴\approx-۰/۳\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^*&=(-۰/۴۱۲۳۵۶)\times(-۰/۴۰۶۹)+(۰/۳۵۱۱۰۲)\times\\&(-۰/۱۴۶۰)+(۰/۵۶۹۱۸۷)\times(۰/۰۹۲۶)+\\&(۰/۶۸۹۹۹۹\times۰/۶۴۵۴)=۰/۵۰۹۱۴۵۴۰۲۸\approx۰/۵\end{aligned}$$

همچنین با توجه به جدول ۵ خطای استاندارد برآوردگرهای خطی نااریب عبارت اند از:

$$S.E(\mu^*)=۰/۵۰۹۱۴۵۴۰۲۸\sqrt{۰/۹۴۷۵}\approx۰/۴۹۶$$
$$S.E(\sigma^*)=۰/۵۰۹۱۴۵۴۰۲۸\sqrt{۰/۲۲۲۷}\approx۰/۲۴۰$$

جدول ۱: میانگین رکوردهای بالا از توزیع $N(۰,۱)$

n	۱	۲	۳	٤	٥	٦	٧	٨	۹	۱۰
μ_n	۰.۰۰۰۰	۰.۹۰۳۲	۱.٤۹۹۰	۱.۹٦٧٨	۲.۳٦٦٧	٧۱٤٧،۲	۳.۰۳۳۹	۳.۳۲٤٧	۳.٥۹٤۲	۳٨٤۱.

جدول ٢: واریانس و کوواریانس n رکورد بالای اول از توزیع $N(0,1)$

	m									
n	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
١	١.٠٠٠									
٢	٠.٥٩٥٦	٠.٧٧٩٩								
٣	٠.٤٥٣٤	٠.٥٩٥٣	٠.٧٠٢٢							
٤	٠.٣٧٧٥	٠.٤٩٦٤	٠.٥٨٥٩	٠.٦٦١١						
٥	٠.٣٢٩٣	٠.٤٣٣١	٠.٥١١٥	٠.٥٧٧٣	٠.٦٣٥٣					
٦	٠.٢٩٥١	٠.٣٨٨٥	٠.٤٥٨٩	٠.٥١٨١	٠.٥٧٠٢	.٠ ٦١٧٤				
٧	٠.٢٦٩٦	٠.٤١٩٤	٠.٤١٩٤	٠.٤٧٣٢	٠.٥٢١٢	٠.٥٦٤٣	٠.٦٠٤١			
٨	٠.٢٤٩٥	٠.٣٨٨٣	٠.٣٨٨٣	٠.٤٣٨٥	٠.٤٨٢٧	٠.٥٢٢٦	٠.٥٥٩٥	٠.٥٩٣٨		
٩	٠.٢٣٣٢	٠.٣٠٧٣	٠.٣٦٣١	٠.٤١٠٠	٠.٤٥١٤	٠.٤٨٨٨	٠.٥٢٣٣	٠.٥٥٥٤	٠.٥٨٥٦	
١٠	٠.٢١٩٧	٠.٢٨٩٥	٠.٤٣٢١	٠.٣٨٦٤	٠.٤٢٥٣	٠.٤٦٠٦	٠.٤٩٣١	٠.٥٢٣٤	٠.٥٥١٩	٠.٥٧٨٨

جدول ٣: ضرایب بهترین برآوردگرهای خطی نا اریب μ بر اساس n رکورد اول بالا از توزیع $N(\mu,\alpha^2)$

	m									
n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
٢	١.٠٠٠	٠.٠٠٠								
٣	٠.٨٦٣٩	٠.٣٤٤٢	–٠.٢٠٦٣							
٤	٠.٧٧٩٩	٠.٣١٥٢	٠.٢٠٧٣	–٠ .٣٠٢٥						
٥	٠.٧٢١١	٠.٢٩٥٦	٠.١٩٥٣	٠.١٤٥٥	–٠.٣٥٧٦					
٦	٠.٦٧٦٨	٠.٢٨٠٦	٠.١٨٥٣	٠.١٣٨٩	٠.١١٠٦	–٠ .٣٥٧٦				
٧	٠.٦٤١٧	٠.٢٦٨٥	٠.١٧٨٤	٠.١٣٣٥	٠.١٠٦٤	٠.٠٨٨٣	–٠ .٤١٦٧			
٨	٠.٦١٣٠	٠.٢٥٨٦	٠.١٧٢١	٠.١٢٨٩	٠.١٠٢٩	٠.٠٨٥٤	٠.٠٧٣٠	–٠.٤٣٣٩		
٩	٠.٥٨٨٩	٠.٢٥٠١	٠.١٦٦٨	٠.١٢٥١	.٠ ٠٩٩٩	٠.٠٨٣٠	٠.٠٧٩٠	٠.٠٦١٨	–٠ .٤٤٣٩	
١٠	٠.٥٦٨٣	٠.٢٤٢٨	٠.١٦٢١	٠.١٢١٧	٠.٠٩٧٣	٠.٠٨٩٠	٠.٠٦١٩١	٠.٠٦٠٣	٠.٠٥٣٤	٠–.٤٥٦٠

جدول ٤: ضرایب بهترین برآوردگرهای خطی نا اریب σ بر اساس n رکورد اول بالا از توزیع $N(\mu,\alpha^{2})$

	m									
n	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
٢	-١.١٠٧٢	١.١٠٧٢								
٣	-٠.٥٨٦٠	-٠.٢٠٤١	-٠.٢٠٦٣							
٤	-٠.٤٠٦٩	-٠.١٤٦٠	-٠.٠٩٢٦	٠.٦٤٥٤						
٥	-٠.٣١٥٠	-٠.١١٥٥	-٠.٠٧٣٨	-٠.٠٥٣٧٣	٠.٥٥٨٠					
٦	-٠.٢٥٨٨	-٠.٠٩٦٤	-٠.٠٦١٩	-٠.٠٤٣٥	-٠.٠٢٥٣	٠.٤٩٧٩				
٧	-٠.٢٢٠٧	-٠.٠٨٣٣	-٠.٠٥٣٧	-٠.٠٣٩٤	-٠.٠٣٠٩	-٠.٠٢٥٣	٠.٤٥٣٣			
٨	-٠.١٩٣٠	-٠.٠٦٦٢	-٠.٠٤٧٧	-٠.٠٣٥٠	-٠.٠٢٧٥	-٠.٠٢٢٦	-٠.٠١٩١	٠.٤١٨٦		
٩	-٠.١٧١٩	-٠.٠٦٦٢	-٠.٠٤٣٠	-٠.٠٣١٦	-٠.٠٢٧٩	-٠.٠٢٠٥	-٠.٠١٧٤	-٠.٠١٥٠	٠.٣٩٠٦	
١٠	-٠.١٥٥٣	-٠.٠٦٠٣	-٠.٠٣٩٢	-٠.٠٢٨٩	-٠.٢٢٨	-٠.٠١٨٨	-٠.٠١٥٩	-٠.٠١٣٨	-٠.٠١٢١	٠.٣٦٧٣

جدول ٥: واریانس و کوواریانس بهترین برآوردهای خطی نا اریب بر اساس n رکورد بالای اول از توزیع $N(\mu,\alpha^{2})$

n	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
$Var(u^*)/\sigma^2$	١.٠٠٠	٠.٩٧٤٣	٠.٩٤٧٥	٠.٩٢٣٠	٠.٩٠١١	٠.٨٨١٦	٠.٨٦٤٢	٠.٨٤٨٥	٠.٨٣٤٢
$Var(\sigma^*)/\sigma^2$	٠.٧٢١٥	٠.٧٢١٥	٠.٢٢٢٧	٠.٢٢٢٧	٠.١٢٧٩	٠.١٠٤٩	٠.٠٨٨٥	٠.٠٧٦٦	٠.٠٦٧٤
$Cov(u,\sigma^*)/\sigma^2$	-٠.٤٤٧٧	-٠.٣٤٩٣	-٠.٢٩٢١	-٠.٢٩٢١	-٠.٢٠٥٠	-٠.٢٠٥٠	-٠.١٨٨١	-٠.١٧٤٤	-٠.١٦٢٩

مراجع

[1]Ahmadi, J., 2000, *Record Values-Theory and Applications,* Ph.D. Thsies, Ferdowsi Univeristy of Mashhad, Iran.

[2]Ahmadi, J. and Arghami, N.A., 2001, *On the Fisher Information in Record Values,* Metrika 53, 3, 195-206.

[3]Ahmadi, J. and Arghami, N.A., 2002, *Nonparametric Confidence Intervals Based on Record Values Data, to apear in Statistical Papers.*

[4]Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N., 1992, *A First Course in Order Statisitcs,* John Wiley, New York.

[5]Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N., 1998, *Records,* John Wiley, New York.

[6]Balakrishnan, N. and Chan, P.S., 1998, *On the Normal Record Values and Associated Inference,* Statistics and Probability Letters, 39, 73-80.

[7]Balakrishnan, N. and Cohen, A.C., 1991, *Order Statistics and Inference: Estimation Method,* Academic Press, San Diego.

[8]Carlin, P.B. and Gelfand, A.E., 1993, *Parametric Likelihood Inference for Record Breaking Problems,* Biometrika, 80, 3, 507-515.

[9]David, H.A., 1981, *Order Statistics,* 2nd Ed, Wiley, New York.

[10]Feuerverger, A. and Hall, P., 1998, *On Statistical Inference Based on Record Values,* Extermes, 12, 169-190.

[11]Glick, N., 1978, *Breaking Records and Breaking Boards,* Am.Math.Monthely 85, 2-26.

[12]Gulati, S. and Padgett, W.J., 1994, *Smooth Nonparametric Estimation of the Distribution and Density Functions from Record-Breaking Data,* Comm.Stat., Theory Methods, 23(5), 1259-1274.

[13]Resnick, S.I., 1973, *Records Values and Maxima,* Ann.Probab. 1, 650-662.

[14]Shorrock, R.W., 1973, *Record Values and Inter-Record Times,* J.Appl.Probab. 10, 543-555.