بیضی‌گونهای پیش‌بینی، کناری و شرطی

منوچهر خردمندنیا[۱] سیدعباس حسینی‌نسب[۱]

چکیده

اگر از یک جامعه نرمال چند متغیره مشاهدات نمونه‌ای تصادفی در اختیار باشد، ناحیه پیش‌بینی $(\alpha-۱)۱۰۰$ درصد برای تحقق جدیدی از بردار متغیرهای تصادفی مورد بررسی نقاط داخل یک بیضی‌گون می‌باشد. اگر تعداد متغیرها ۳ یا کمتر باشند، شکل هندسی بیضی‌گونها قابل تجسم، رسم و مقایسه سریع می‌باشند. ولی اگر تعداد متغیرها بیش از ۳ باشد، نواحی مذکور بیضی‌گون‌هایی هستند که برای انسان سه‌بعدی قابلیت فهم سریع ندارند. در این مقاله ایده‌ای تحت عنوان «بیضی‌گون پیش‌بینی شرطی» معرفی می‌گردد که می‌تواند به عنوان ابزاری برای انتقال اطلاعات از فضائی که بیش از سه بعد دارد به فضائی سه بعدی یا با ابعاد کمتر تلقی گردد. ایده بیضی‌گون شرطی کاربرد بالقوه فراوانی می‌تواند در پزشکی، زیست‌شناسی، کنترل کیفیت آماری و سایر علوم داشته باشد.

واژه‌های کلیدی: بیضی‌گون‌های پیش‌بینی، توزیع نرمال چند متغیره، توزیع ویشارت، توزیع $T^۲$ هتلینگ.

۱. بیضی‌گون

یک بیضی‌گون درفضای p بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{c})'A^{-۱}(\underset{\sim}{y}-\underset{\sim}{c})=d^۲ \qquad (۱-۱)$$

که درآن $\underset{\sim}{y}=(y_۱,\dots,y_p)^T$ نشان‌دهنده p محور مختصات، $A=(a_{ij})$ یک ماتریس $p\times p$ معین مثبت، $\underset{\sim}{c}=(c_۱,\dots,c_p)^T$ مرکز بیضی‌گون و $d^۲$ یک عدد حقیقی مثبت می‌باشد، طول قطر iام بیضی‌گون برابر $l_i=۲d\sqrt{\lambda_i}$ است، که در آن λ_i ها (همه مثبت) $(i=۱,\dots,p)$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

جهت قطر i ام بوسیله بردار ویژه متناظر λ_i که آنرا با $\underset{\sim}{q_i}$ نشان می‌دهیم، مشخص می‌شود. در واقع قطر i ام موازی خطی است که نقطه مبدأ مختصات را به $\underset{\sim}{q_i}$ متصل می‌کند.

بیضی‌گون (۱-۱) برای حالت $p=۱$ به صورت $(y_۱-c_۱)^۲/a_{۱۱}=d^۲$ ساده می‌شود. اگر بجای علامت تساوی، علامت $\le$ را قرار دهیم نامساوی

$$c_۱-d\sqrt{a_{۱۱}}\le y_۱\le c_۱+d\sqrt{a_{۱۱}} \qquad (۲-۱)$$

حاصل می‌شود. طول فاصله‌ای که $y_۱$ درآن قرار دارد، برابر $۲d\sqrt{a_{۱۱}}$ است و هر چه $a_{۱۱}$ کوچکتر باشد، طول این فاصله کمتر می‌شود.

در کاربردهای آماری موردنظر ما A متقارن است، لذا از این به بعد فرض می‌کنیم که A متقارن می‌باشد. در این صورت و در حالت

---
[۱] گروه آمار دانشگاه اصفهان

$p=2$ معادله (۱-۱) معادله یک بیضی است که آن را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right]' \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right] = d^2 \qquad (۱-۳)$$

که در آن a^{ij} درایه سطر i ام وستون j ام ماتریس A^{-1} است، مساحت این بیضی برابر است با

$$\frac{\pi l_1 l_2}{4} = \pi d^2 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = \pi d^2 \sqrt{\det(A)}\,.$$

ملاحظه می‌شود که هر چه دترمینان A کوچکتر باشد مساحت بیضی کوچکتر است. با توجه به اینکه $a^{12} = a^{21}$، پس از عملیات جبری ساده‌ای y_1 را می‌توان بر حسب y_2 به صورت زیر نوشت

$$y_1 = c_1 - \left(\frac{a^{12}}{a^{11}}\right)(y_2 - c_2)^2 \pm \left(\frac{1}{a^{11}}\right)\sqrt{\delta}$$

که در آن

$$\delta = (a^{12})^2 (y_2 - c_2)^2 - a^{11}(a^{22}(y_2 - c_2)^2 - d^2)$$

اگر در معادله (۱-۳) بجای علامت تساوی، علامت $\le$ را قرار دهیم، مجموعه تمامی $\underset{\sim}{y} = (y_1, y_2)'$ های متعلق به $\Re^2$ که در نامساوی حاصله صدق می‌کنند، نقاط داخل و روی بیضی (۱-۳) را تشکیل می‌دهند.

در حالت $p=3$ معادله (۱-۱)، معادله یک بیضی‌گون سه‌بعدی است که به شکل یک کره بیضی‌شکل می‌باشد. حجم بیضی‌گون سه‌بعدی برابر است با

$$\frac{\pi}{6} l_1 l_2 l_3 = \frac{4\pi}{3} d^3 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{4\pi}{3} d^3 \sqrt{\det(A)}$$

در اینجا نیز ملاحظه می‌شود که هر چه دترمینان A کوچکتر باشد، حجم بیضی‌گون سه‌بعدی کمتر است. در حالت $p=3$ و $A = I$ معادله بیضی‌گون در واقع معادله یک کره می‌باشد.

بطور کلی دترمینان یک ماتریس مربعی معین مثبت نشان‌دهنده حجم یک متوازی السطوح است. برای توضیح بیشتر در این مورد استرنج [2] (۱۹۷۶) را ببینید. بطور کلی حجم بیضی‌گون (۱-۱) برابر است با

$$V = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{p\Gamma(\frac{p}{2})} d^p \sqrt{\det(A)}$$

که در آن $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما است. برای توضیح بیشتر در این مورد مرجع جانسون و ویچرن [3] (۱۹۹۲) را ملاحظه کنید. ملاحظه می‌شود که حجم بیضی‌گون به d^2 و $\det(A)$ بستگی دارد و با کوچک شدن هر یک از این کمیت‌ها حجم بیضی‌گون کم می‌شود.

۲. چند نظریه توزیعی چندمتغیره

در این بخش چند نظریه توزیعی استاندارد چند متغیره که در تهیه مقاله حاضر مورد استفاده قرار گرفته‌اند به اختصار ارائه می‌شود. توضیحات مفصل و اثبات‌های مربوطه در اغلب متون استاندارد موجود است. به عنوان مثال مرجع ماردیا و دیگران [4] (۱۹۷۹) را ملاحظه کنید.

۱-۲ توزیع ویشارت

فرض کنید $\underset{\sim}{X}_1, \cdots, \underset{\sim}{X}_k$ یک نمونه تصادفی از $N_p(\underset{\sim}{0}, \Sigma)$ است. در این‌صورت ماتریس $p \times p$ متقارن $W = \sum_{r=1}^{k} \underset{\sim}{X}_r \underset{\sim}{X}'_r$ دارای توزیعی است که آن را توزیع ویشارت می‌نامند. این توزیع به پارامترهای Σ, p, k بستگی دارد و ما به اختصار $W \sim W_p(k, \Sigma)$ می‌نویسیم.

۲-۲ توزیع T^2 ی هتلینگ

فرض کنید $\underset{\sim}{Y} \sim N_p(\underset{\sim}{0}, \Sigma)$ مستقل از $W \sim W_p(k, \Sigma)$ است. در این صورت متغیر تصادفی یک بعدی $T^2 = k\, \underset{\sim}{Y}'\, W^{-1}\, \underset{\sim}{Y}$ دارای توزیع T^2 ی هتلینگ با پارامترهای k و Σ می‌باشد.

۳-۲ رابطه T^2 ی هتلینگ با توزیع F

اگر T^2 ی دارای توزیع T^2 ی هتلینگ با پارامترهای Σ, p, k باشد آنگاه T^2 ی دارای توزیع

---

[2] Strange

[3] Johnson and Wichern

[4] Mardia and et. all

$$\frac{kp}{k-p+1}F(p,k-p+1)$$

می‌باشد.

۳. بیضی‌گون پیش‌بینی برای $\underset{\sim}{X}$ وقتی $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ معلوم هستند

فرض کنید $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)$ که در آن $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ معلومند. واضح است که $(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}) \sim \chi^2(p)$. بنابراین تحقق جدیدی از $\underset{\sim}{X}$ با احتمال $1-\alpha$ درون بیضی‌گون زیر قرار می‌گیرد

$$(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu})'\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}) = \chi_\alpha^2(p) \qquad (۱\text{-}۳)$$

که در آن $\chi_\alpha^2(p)$ صدک $(1-\alpha)$ ام توزیع χ^2 با p درجه آزادی است.

در عمل ممکن است که پارامترها را تحت فرض صفر $(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)=(\underset{\sim}{\mu}_0,\Sigma_0)$، معلوم تلقی نمود. در این صورت بیضی‌گون

$$(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}_0)'\Sigma_0^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{\mu}_0) = \chi_\alpha^2(p) \qquad (۲\text{-}۳)$$

ناحیه‌ای است که تحت فرض صفر، تحقق جدیدی از $\underset{\sim}{X}$ را با احتمال $1-\alpha$ در بر می‌گیرد.

وضعیت دیگری که $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ را می‌توان (تقریباً) معلوم تلقی نمود، وقتی است که نمونه مشاهده شده بزرگی از $\underset{\sim}{X}$ در اختیار باشد. اگر اندازه نمونه به اندازه کافی بزرگ باشد، بیضی‌گون

$$(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\bar{x}})'S^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\bar{x}}) = \chi_\alpha^2(p) \qquad (۳\text{-}۳)$$

یک بیضی‌گون تقریبی $100(1-\alpha)$ درصد برای $\underset{\sim}{X}$ می‌باشد. که در آن $\underset{\sim}{\bar{x}}$ و S به ترتیب بردار میانگین و ماتریس کوواریانس نمونه هستند.

٤. بیضی‌گون پیش‌بینی برای $\underset{\sim}{X}$ تحت فرض $\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{\mu}_0$

فرض کنید $\underset{\sim}{X}_1,\ldots,\underset{\sim}{X}_{n+1}$ یک نمونه تصادفی از $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)$ است. برآورد حداکثر درستنمائی پارامتر Σ تحت فرض $\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{\mu}_0$ عبارت است از

$$S_0 = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_r-\underset{\sim}{\mu}_0)(\underset{\sim}{X}_r-\underset{\sim}{\mu}_0)'$$

تحت فرض $\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{\mu}_0$ واضح است که $\underset{\sim}{X}_{n+1}-\underset{\sim}{\mu}_0 \sim N_p(0,\Sigma)$ مستقل از $nS_0 \sim W_p(n,\Sigma)$ است. بنابراین، بر اساس تعاریف و نظریه‌های بخش ۲ می‌توان نوشت

$$T^2 = \left(\underset{\sim}{X}_{n+1}-\underset{\sim}{\mu}_0\right)' S_0^{-1}\left(\underset{\sim}{X}_{n+1}-\underset{\sim}{\mu}_0\right)$$

$$\sim \frac{np}{n-p+1}F(p,n-p+1) \qquad (۱\text{-}۴)$$

بنابراین، وقتی که مشاهدات $\underset{\sim}{x}_1,\ldots,\underset{\sim}{x}_n$ در اختیار است، تحقق جدیدی از $\underset{\sim}{X}$ با احتمال $1-\alpha$ درون بیضی‌گون زیر قرار می‌گیرد.

$$(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu}_0)'S_0^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu}_0) = c_\alpha^2 \qquad (۲\text{-}۴)$$

که در آن $c_\alpha^2 = np/(n-p+1)F_\alpha(p,n-p+1)$ و $F_\alpha(p,n-p+1)$ صدک $1-\alpha$ ام توزیع F با p و $n-p+1$ درجه آزادی است و $\underline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_p)'$ نشان‌دهنده p محور مختصات است. بیضی‌گون اخیر را بیضی‌گون پیش‌بینی $100(1-\alpha)$ درصد برای $\underset{\sim}{X}$ تحت فرض $\underset{\sim}{\mu}=\underset{\sim}{\mu}_0$ می‌نامیم. در یک مسأله کنترل کیفیت خط تولید، $\underset{\sim}{\mu}_0$ می‌تواند اندازه‌های استاندارد از p متغیر باشد. در این صورت قطعه تولید شده $(n+1)$ ام در صورتی خارج از کنترل تلقی می‌شود که $\underset{\sim}{x}_{n+1}$ در خارج بیضی‌گون فوق قرار گیرد.

۵. بیضی‌گون پیش‌بینی برای $\underset{\sim}{X}$ وقتی $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ نامعلوم هستند

فرض کنید $\underset{\sim}{X}_1,\ldots,\underset{\sim}{X}_{n+1}$ یک نمونه تصادفی از $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)$ است و

$$\underset{\sim}{\bar{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \underset{\sim}{X}_r ,$$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(\underset{\sim}{X}_r-\underset{\sim}{\bar X}_n)(\underset{\sim}{X}_r-\underset{\sim}{\bar X}_n)'$$

براساس نظریات استاندارد چندمتغیره بخش ۲ می‌توان نشان داد که $\sqrt{n/(n+1)}\ (\underset{\sim}{X}_{n+1}-\underset{\sim}{\bar X}_n) \sim N_p(0,\Sigma)$ مستقل از $(n-1)S_n \sim W_p(n-1,\Sigma)$ است. بنابراین بر اساس تعریف، متغیر تصادفی

$$T^2 = \frac{n}{n+1}(\underset{\sim}{X}_{n+1}-\underset{\sim}{\bar X}_n)' S_n^{-1}(\underset{\sim}{X}_{n+1}-\underset{\sim}{\bar X}_n)$$

دارای توزیع T^2ی هتلینگ با پارامترهای $n-1$ و Σ است.

با توجه به رابطه‌ای که T^2 ی هتلینگ با F دارد، می‌توان نوشت

$$(\underset{\sim}{X}_{n+1}-\underset{\sim}{\bar X}_n)' S_n^{-1}(\underset{\sim}{X}_{n+1}-\underset{\sim}{\bar X}_n) \sim \frac{(n-1)(n+1)p}{(n-p)n}F(p,n-p) \qquad (۵-۱)$$

بنابراین با احتمال $1-\alpha$ ، تحققی از $\underset{\sim}{X}_{n+1}$ در داخل بیضی‌گون p بعدی زیر قرار می‌گیرد

$$(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\bar x}_n)' S_n^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\bar x}_n) = d_\alpha^2 \qquad (۵-۲)$$

که در آن $\underset{\sim}{x}=(x_1,x_2,\dots,x_p)'$ نشان دهنده p محور مختصات است، $\underset{\sim}{\bar x}_n$ مرکز بیضی‌گون است،

$$d_\alpha^2 = \frac{(n-1)(n+1)p}{(n-p)n}F_\alpha(p,n-p) \qquad (۵-۳)$$

و $F_\alpha(p,n-p)$ صدک $(1-\alpha)$ام توزیع F با p و $n-p$ درجه آزادی است.

۶. بیضی‌گون پیش‌بینی کناری و شرطی

در این بخش ابتدا حالتی را مورد بحث قرار می‌دهیم که در آن μ و Σ معلومند. افراز زیر را در نظر بگیرید

$$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{pmatrix} \sim N_p\left[\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}\right]$$

که در آن $\underset{\sim}{X}_1$ و $\underset{\sim}{X}_2$ به ترتیب $p_1\times 1$ و $p_2\times 1$ هستند، $\underset{\sim}{\mu}_i = E(\underset{\sim}{X}_i)$ ، $\Sigma_{ij} = Cov(\underset{\sim}{X}_i,\underset{\sim}{X}_j)$ ، $(i,j=1,2)$ تحت این شرایط توزیع کناری $\underset{\sim}{X}_1$ عبارتست از $\underset{\sim}{X}_1 \sim N_{p_1}(\underset{\sim}{\mu}_1,\Sigma_{11})$. بنابراین بیضی‌گون زیر یک بیضی‌گون پیش‌بینی (کناری) $100(1-\alpha)$ درصد برای $\underset{\sim}{X}_1$ است.

$$(\underset{\sim}{x}_1-\underset{\sim}{\mu}_1)'\Sigma_{11}^{-1}(\underset{\sim}{x}_1-\underset{\sim}{\mu}_1) = \chi_\alpha^2(p_1) \qquad (۶-۱)$$

توزیع شرطی $\underset{\sim}{X}_1$ به شرط $\underset{\sim}{X}_2=\underset{\sim}{x}_2$ عبارت است از

$$\underset{\sim}{X}_1 \mid \underset{\sim}{x}_2 \sim N_{p_1}(\underset{\sim}{\mu}_{1.2},\Sigma_{1.2})$$

که در آن

$$\underset{\sim}{\mu}_{1.2} = E(\underset{\sim}{X}_1\mid\underset{\sim}{x}_2) = \underset{\sim}{\mu}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\underset{\sim}{x}_2-\underset{\sim}{\mu}_2)$$

$$\Sigma_{1.2} = V(\underset{\sim}{X}_1\mid\underset{\sim}{x}_2) = \Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

بنابراین، به شرط $\underset{\sim}{X}_2=\underset{\sim}{x}_2$ ، تحقق جدیدی از $\underset{\sim}{X}_1$ با احتمال $(1-\alpha)$ در داخل بیضی‌گون زیر قرار می‌گیرد

$$(\underset{\sim}{x}_1-\underset{\sim}{\mu}_{1.2})'\Sigma_{1.2}^{-1}(\underset{\sim}{x}_1-\underset{\sim}{\mu}_{1.2}) = \chi_\alpha^2(p_1). \qquad (۶-۲)$$

نظریه‌پردازی‌هایی که به بیضی‌گون اخیر منتهی شد بر اساس فرض معلوم بودن $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ استوار است. چگونه این پارامترها می‌توانند معلوم تلقی شوند؟ در عمل ممکن است تحت فرض صفر $(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)=(\underset{\sim}{\mu}_0,\Sigma_0)$ پارامترها، معلوم تلقی شوند. در این صورت بیضی‌گون شرطی فوق می‌تواند در کنترل کیفیت چندمتغیره کاربرد داشته باشد. وضعیت دیگری که در آن $\underset{\sim}{\mu}$ و Σ (حداقل تقریباً) معلوم تلقی می‌شوند، حالتی است که در آن مشاهدات نمونه تصادفی بزرگی، از $\underset{\sim}{X}$ در اختیار باشد. اگر اندازه نمونه به اندازه کافی بزرگ باشد، بجای $\underset{\sim}{\mu}_{1.2}$ و $\Sigma_{1.2}$ می‌توان برآوردهای آنها، یعنی به ترتیب

$$\underset{\sim}{\bar{x}}_{1.2} = \underset{\sim}{\bar{x}}_1 + S_{12}S_{22}^{-1}(\underset{\sim}{x}_2 - \underset{\sim}{\bar{x}}_2)$$

$$S_{1.2} = S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21}$$

قرار داد. که در آن $\underset{\sim}{\bar{x}}_i$ برآورد $\underset{\sim}{\mu}_i$ و S_{ij} برآورد Σ_{ij} است. در این صورت بیضی‌گون زیر، یک بیضی‌گون (تقریبی) $100(1-\alpha)$ درصد پیش‌بینی برای $\underset{\sim}{X}_1$ به شرط $\underset{\sim}{X}_2 = \underset{\sim}{x}_2$ می‌باشد.

$$(\underset{\sim}{x}_1 - \underset{\sim}{\bar{x}}_{1.2})' S_{1.2}^{-1}(\underset{\sim}{x}_1 - \underset{\sim}{\bar{x}}_{1.2}) = \chi^2_\alpha(p) \qquad (۳-۶)$$

۷. نقش اطلاعات همبسته در افزایش دقت

با این فرض که $\underset{\sim}{X}_1$ و $\underset{\sim}{X}_2$ توأماً دارای توزیع نرمال دو متغیره باشند، به سهولت می‌توان نشان داد که

$$V(X_1 \mid x_2) = V(X_1)(1-\rho_{12}^2) \le V(X_1) \qquad (۱-۷)$$

که در آن $\rho_{12} = corr(X_1, X_2)$ ضریب همبستگی بین X_1 و X_2 است. اگر X_1 و X_2 ناهمبسته باشند، یعنی اگر $\rho_{12} = 0$ ، در این صورت واریانس شرطی X_1 به شرط $X_2 = x_2$ برابر واریانس X_1 است. در حالتی که X_1 و X_2 دارای همبستگی کامل خطی هستند، یعنی اگر $|\rho_{12}| = 1$ ، واریانس X_1 به شرط $X_2 = x_2$ برابر صفر است. هر چه $|\rho_{12}|$ بزرگتر باشد واریانس شرطی X_1 به شرط $X_2 = x_2$ کوچکتر می‌شود. تعبیر عملی رابطه فوق این است که اطلاع از مقدار تحقق‌یافته متغیر X_2 موجب افزایش دقت در پیش‌بینی مقدار متغیر همبسته X_1 می‌شود. میزان افزایش دقت بستگی به میزان همبستگی X_1 و X_2 دارد.

به طریق مشابه، با این فرض که X_1، X_2 و X_3 توأماً دارای توزیع نرمال سه متغیره باشند، می‌توان نشان داد که

$$V(X_1 \mid x_2, x_3) = V(X_1 \mid x_2)(1-\rho_{13.2}^2) \le V(X_1 \mid x_2) \qquad (۲-۷)$$

که در آن $\rho_{13.2} = corr(X_1, X_3 \mid x_2)$. به طور کلی با این فرض که $X_1,\ldots,X_p$ دارای توزیع نرمال p متغیره باشند، می‌توان نشان داد که

$$V(X_1 \mid x_2,\ldots,x_p) = V(X_1 \mid x_2,\ldots,x_{p-1})(1-\phi^2) \qquad (۳-۷)$$

که در آن $-1 \le \phi = corr(X_1, X_p \mid x_2,\ldots,x_{p-1}) \le 1$. ϕ را ضریب همبستگی جزئی X_1 و X_p می‌نامند.

در حالت چندمتغیره، با در نظر گرفتن افراز $\underset{\sim}{X} = (\underset{\sim}{X}_1' , \underset{\sim}{X}_2')'$ ، بر اساس خواص دترمینان می‌توان نوشت

$$\det(\Sigma) = \det(\Sigma_{11})\det(\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}) \qquad (۴-۷)$$

$$= \det(\Sigma_{11})\det(\Sigma_{22})\det(I - \Sigma_{22}^{-\frac{1}{2}}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-\frac{1}{2}})$$

زیرا

$$\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} = \Sigma_{22}^{\frac{1}{2}}(I - \Sigma_{22}^{-\frac{1}{2}}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-\frac{1}{2}})\Sigma_{22}^{\frac{1}{2}}$$

و در نتیجه

$$\det(\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}) = \det(\Sigma_{22})\det(I - \Sigma_{22}^{-\frac{1}{2}}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-\frac{1}{2}})$$

همچنین می‌توان نوشت

$$\det(\Sigma) = \det(\Sigma_{22})\det(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$$

$$= \det(\Sigma_{22})\det\left[V(\underset{\sim}{X}_1 \mid \underset{\sim}{x}_2)\right] \qquad (۵-۷)$$

اگر در(۴-۷) بجای $\det(\Sigma)$ مقدار آن را از (۵-۷) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\det\left[V(\underset{\sim}{X}_1 \mid \underset{\sim}{x}_2)\right] = \det\left[V(\underset{\sim}{X}_1)\right]\prod_{i=1}^{p_2}(1-\rho_i^{*2})$$

که در آن ρ_i^{*2} ، i امین مقدار ویژه ماتریس $\Sigma_{22}^{-\frac{1}{2}}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-\frac{1}{2}}$ است که بر اساس تعریف i امین ضریب همبستگی متعارف می‌باشد. برای تعریف ضریب همبستگی متعارف به عنوان مثال، مرجع جانسون و ویچرن(۱۹۹۲) را ملاحظه کنید. اکنون با توجه به نامساوی $-1 \le \rho_i^* \le 1$ ، ملاحظه می‌شود که

$$\det\left[V(\underset{\sim}{X}_1 \mid \underset{\sim}{x}_2)\right] \le \det\left[V(\underset{\sim}{X}_1)\right]$$

اما بر اساس مباحث بخش ۱ که هر چه دترمینان ماتریس کوواریانس کوچکتر باشد حجم بیضی‌گون پیش‌بینی کوچکتر است؛

نتیجه می گیریم که حجم بیضی گون پیش‌بینی شرطی $\underset{\sim}{X}_1$ به شرط $\underset{\sim}{X}_2 = \underset{\sim}{x}_2$ کوچکتر از حجم بیضی گون پیش‌بینی کناری $\underset{\sim}{X}_1$ است. بنابراین اطلاع از مقدار تحقق یافته $\underset{\sim}{X}_2$ دقت ما را در پیش‌بینی مقدار $\underset{\sim}{X}_1$ افزایش می‌دهد و میزان افزایش دقت بستگی به ضرائب همبستگی متعارف دارد.

۸. مثال

از جامعه نوزادان یک قلو که در پائیز ۱۳۷۸ در بیمارستان الزهرای اصفهان به دنیا آمده و زنده مرخص شده‌اند، به طور تصادفی ۳۰ نوزاد دختر را انتخاب نموده، وزن $(\underset{\sim}{X}_1)$ ، قد $(\underset{\sim}{X}_2)$ و دور سر $(\underset{\sim}{X}_3)$ هر یک از آنها را در بدو تولد از دفتر مربوطه استخراج نموده‌ایم. به این ترتیب بردار میانگین و ماتریس کوواریانس نمونه زیر به دست آمد.

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} ۲/۹۶ \\ ۴۸/۷ \\ ۳۴/۳۵ \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} ۰/۲۱ & ۰/۷۹ & ۰/۵۹ \\ ۰/۷۹ & ۸/۱۴ & ۲/۳۹ \\ ۰/۵۹ & ۲/۳۹ & ۲/۳۹ \end{bmatrix}$$

بر اساس آزمون کتاب ماردیا و دیگران (۱۹۷۹) که مبتنی بر استفاده از معیارهای چندمتغیره چولگی و کشیدگی است، فرض نرمال بودن سه متغیره $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ در سطح ۰/۰۵ پذیرفته می‌شود.

با قبول این فرض که $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ دارای توزیع نرمال سه متغیره باشد، واضح است که توزیع توأم وزن و قد، نرمال دو متغیره می‌باشد. برآورد این توزیع عبارت است از

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left[\begin{pmatrix} ۰/۹۶ \\ ۴۸/۷ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰/۲۱ & ۰/۷۹ \\ ۰/۷۹ & ۸/۱۴ \end{pmatrix}\right]$$

با توجه به اینکه $\chi^2_{۰/۰۵}(۲) = ۵/۹۹$ ، بیضی زیر برآورد بیضی پیش‌بینی٪۹۵ برای وزن و قد می‌باشد.

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۲/۹۶ \\ ۴۸/۷ \end{pmatrix}\right]' \begin{pmatrix} ۰/۲۱ & ۰/۷۹ \\ ۰/۷۹ & ۸/۱۴ \end{pmatrix}^{-1} \times \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۲/۹۶ \\ ۴۸/۷ \end{pmatrix}\right] = ۵/۹۹$$

مرکز این بیضی نقطه $(۲/۹۶, ۴۸/۷)'$ است، طول قطر بزرگ این بیضی برابر ۱۴/۰۳ $(= ۲\sqrt{۵/۹۹\lambda_1})$ و طول قطر کوچک برابر ۱/۷۸ $(= ۲\sqrt{۵/۹۹\lambda_2})$ می‌باشد. قطر بزرگ موازی با خطی است که نقطه $(۰,۰)'$ را به نقطه $\underset{\sim}{q}_1 = (۰/۹۸, ۰/۹۹)'$ متصل می‌نماید. قطر کوچک موازی با خطی است که نقطه $(۰,۰)'$ را به نقطه $\underset{\sim}{q}_2 = (-۰/۹۸, ۰/۹۹)'$ متصل می‌نمایند. که $\underset{\sim}{q}_1$ و $\underset{\sim}{q}_2$ به ترتیب بردارهای ویژه یکا متعامد متناظر با مقادیر ویژه λ_1, λ_2 می‌باشند. مساحت این بیضی برابر $۶/۲۴\pi$ $(= ۵/۹۹\pi\sqrt{\det(S_{11})})$ است.

حال برآورد توزیع شرطی وزن و قد نوزادانی که دور سرشان ۳۲/۵ است، عبارت است از

$$\left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \mid x_3 = ۳۲/۵\right] \sim N_2\left[\begin{pmatrix} ۲/۴۵ \\ ۴۶/۶۵ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰/۰۶ & ۰/۲ \\ ۰/۲ & ۵/۷۵ \end{pmatrix}\right]$$

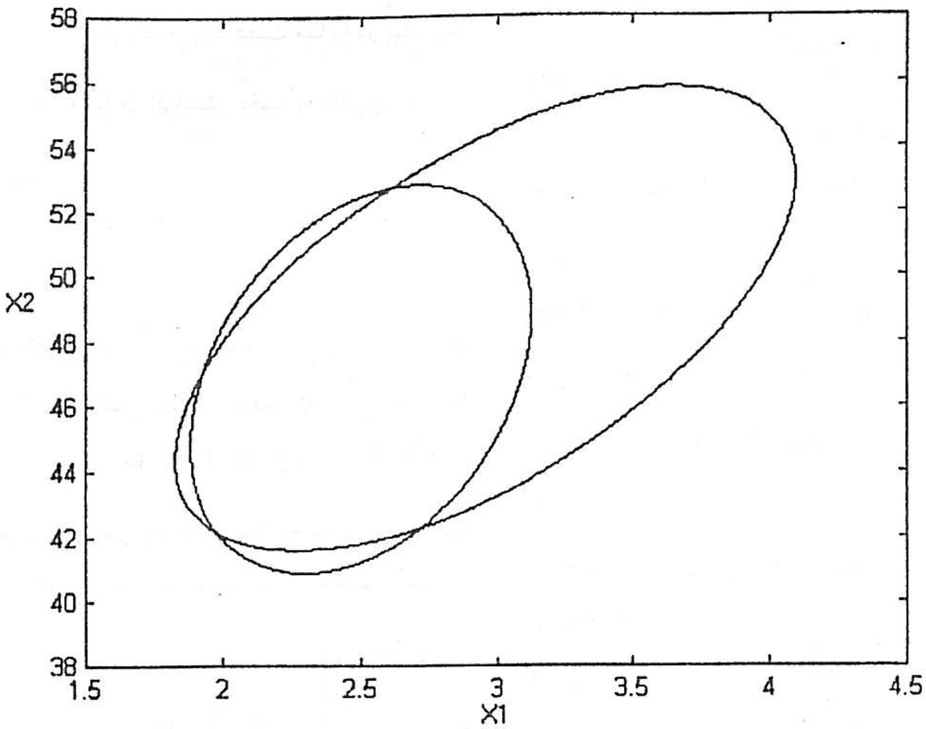
بنابراین بیضی زیر یک بیضی پیش‌بینی ٪۹۵ برای وزن و قد نوزادانی است که دور سرشان ۳۲/۵ است.

$$\left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۲/۴۵ \\ ۴۶/۶۵ \end{pmatrix}\right]' \begin{pmatrix} ۰/۰۶ & ۰/۲ \\ ۰/۲ & ۵/۷۵ \end{pmatrix}^{-1} \times \left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۲/۴۵ \\ ۴۶/۶۵ \end{pmatrix}\right] = ۵/۹۹$$

مساحت این بیضی برابر $۳/۴۵\pi$ $(= ۵/۹۹\pi\sqrt{\det(S_{11.2})})$ می‌باشد، که کمتر از مساحت بیضی گون بالا با مساحت $۶/۲۴\pi$ است.

در شکل ۱ بیضی گون پیش‌بینی ٪۹۵ برای $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ با بیضی گون پیش‌بینی ٪۹۵ برای $\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \mid x_3 = ۳۲/۵\right)$ مورد مقایسه قرار گرفته است.

شکل ۱. مقایسه بیضی پیش‌بینی با بیضی پیش‌بینی شرطی



مراجع

[۱] جانسون و ویچرن، تحلیل آماری چند متغیره کاربردی، ترجمهٔ دکتر نیرومند، (۱۳۷۹)، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

[۲] سریواستاوا و کارتر، آمار چند متغیرهٔ کاربردی، ترجمهٔ دکتر ارقامی و دکتر بزرگنیا، (۱۳۷۰)، انتشارات آستان قدس رضوی.

[۳] ماردیا، کنت و بی بی، تحلیل چند متغیره، ترجمهٔ دکتر طباطبائی، (۱۳۷۶)، مرکز نشر دانشگاهی.

[٤] ناریان سی جری، استنباط آماری چند متغیره، ترجمهٔ دکتر بزرگنیا، (۱۳٦٦)، انتشارات آستان قدس رضوی.

[5] Anderson, T.W., 1974. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley & Sons, New York.

[6] Kettering, J. R., 1982. *Canonical Analysis, Encyclopedia of Statistics Science,* Vol.1, pp.354-365.

[7] Kocherlacota, S.and Kocherlacota, K., 1983. *Generalized Variance, Encyclopedia of Statistics Science,* Vol.3, pp. 354-357.

[8] Strange, G., 1986. *Linear Algebra and Its Applications,* Harcourt Jovanovich International Edition.