اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی توزیع BURR XII

مصطفی رزمخواه[۱] بهاره خطیب آستانه[۱] جعفر احمدی[۱]

چکیده

در یک دنباله از آزمایش‌های تخریبی آماره‌های رکوردی حائز اهمیت هستند. در این مقاله، ما توزیع بر نوع دوازده (BURR XII) را در نظر گرفته و به مقایسه اطلاع فیشر نهفته در n مشاهده مستقل و هم‌توزیع (iid) با همان تعداد آماره رکوردی از این توزیع می‌پردازیم و نشان خواهیم داد که با در نظر گرفتن زمان بین رکوردها میزان اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی این توزیع از همان تعداد متغیر iid بیشتر است. همچنین، ثابت می‌کنیم که اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای بالا و پایین این توزیع با هم برابر هستند؛ این موضوع برای خانواده توزیع‌های متقارن کلیت دارد، هر چند توزیع بر نوع دوازده متقارن نیست.

واژه‌های کلیدی: اطلاع فیشر، رکورد بالا (پایین)، زمان بین رکوردها، تابع درستنمایی، نامساوی کرامر-رائو.

۱. مقدمه

فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از جامعه‌ای با تابع توزیع $F(x;\theta)$ و تابع چگالی $f(x;\theta)$ باشند؛ در این صورت گوییم X_j یک رکورد بالا (پایین) است، هرگاه از تمام مقادیر ماقبل خود بزرگتر (کوچکتر) باشد. بنابراین، $X_۱$ یک رکورد بالا (پایین) است. شماره سریالی که nامین رکورد بالا (پایین) در آن رخ می‌دهد، خود یک متغیر تصادفی است و به زمان رکورد معروف است. در این مقاله زمان nامین رکورد بالا را با U_n نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$U_۱ = ۱ \qquad (۱)$$

$$U_n = \min\{j : X_j > X_{U_{n-۱}}\} \quad n = ۲,۳,\ldots$$

و مقدار nامین رکورد بالا را با X_{U_n} نشان می‌دهیم. به طور مشابه با معکوس نمودن جهت نامساوی در (۱) زمان رکورد پایین تعریف می‌شود. ما در این مقاله، زمان nامین رکورد پایین را با L_n و مقدار آن را با X_{L_n} نشان می‌دهیم. آماره دیگری که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد، تعداد آزمایشات لازم برای رخ دادن یک رکورد جدید است که آن را با T_n نشان می‌دهیم و به صورت $T_n = \Delta_n - ۱$ تعریف می‌کنیم که در آن Δ_n زمان بین رکوردهاست و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Delta_n = U_n - U_{n-۱} \qquad \text{یا} \qquad \Delta_n = L_n - L_{n-۱}$$

رکوردها در مسائلی از قبیل آزمون طول عمر قطعات الکترونیکی گران‌قیمت و یا آزمون استقامت الوارهای چوب، داده‌های مربوط به مسابقات ورزشی، هواشناسی، ژئوفیزیک، زلزله نگاری، سیلاب‌ها، طغیان‌ها و مانند آن نقش شایان توجهی ایفا می‌کنند. اخیراً بررسی اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته است که از آن جمله می‌توان به هافمن و ناگاراجا[۲] [۶] و احمدی و ارقامی[۳] [۳و۴] اشاره کرد.

---

[۱] گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

[۲] Hafman and Nagaraja

[۳] Ahmadi and Arghami

معرفی خانواده توزیع‌های بر[٤] در سال ۱۹٤۲، توسط بر به منظور ایجاد توزیع‌هایی با انعطاف‌پذیری بالا صورت گرفت. بر، دوازده نوع توزیع معرفی کرد که آخرین آنها به توزیع (BURR XII) مشهور است و با تابع توزیع

$$F(x) = 1-\left(1+x^{\theta}\right)^{-k} \quad , \quad x \geq 0$$

و تابع چگالی

$$f(x) = k\theta x^{\theta-1}\left(1+x^{\theta}\right)^{-(k+1)} \quad , \quad x \geq 0$$

نشان داده می‌شود. ملاحظه می‌شود که این توزیع یک توزیع دوپارامتری با پارامترهای k و θ می‌باشد (جزییات بیشتر را می‌توانید در تیمر[٥] [۷] ببینید). این توزیع در عمل بسیار کاربرد دارد که از آن جمله می‌توان به کاربرد این توزیع در بخش‌هایی از کنترل کیفیت، طول عمر یا مدل‌بندی زمان نقص، مدل‌بندی درآمد و آزمون فرض اشاره نمود.

اطلاع فیشر که موضوع اصلی این مقاله می‌باشد، در نامساوی کرامر-رائو برای به دست آوردن کران پایین واریانس برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم ظاهر می‌شود. بخش دوم این مقاله، شامل تعدادی لم‌ها و نتایج مقدماتی است. در بخش سوم، به محاسبه میزان اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای بالا (پایین) در توزیع (BURR XII) و رابطه آنها با یکدیگر می‌پردازیم و میزان اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای بالا (پایین) این توزیع را با همان تعداد متغیر iid مقایسه می‌کنیم. در بخش چهارم، تاثیر دخالت دادن زمان بین رکوردها را در میزان اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای بالا (پایین) و زمان بین آنها بررسی می‌کنیم و آن را با میزان اطلاع فیشر نهفته در همان تعداد متغیر iid مقایسه می‌کنیم و نشان خواهیم داد که با در نظر گرفتن زمان بین رکوردها میزان اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی این توزیع از همان تعداد متغیر iid بیشتر است.

۲. چند لم و نتایج مقدماتی

ما در این مقاله، با فرض معلوم بودن k به محاسبه میزان اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی این توزیع در مورد پارامتر θ می‌پردازیم و بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می‌کنیم $k=1$. در این حالت، تابع چگالی احتمال توزیع (BURR XII) به صورت زیر است.

$$f(x) = \frac{\theta x^{\theta-1}}{\left(1+x^{\theta}\right)^{2}} \quad , \theta > 0 , x \geq 0 \qquad (2)$$

در این بخش ابتدا، تعریف اطلاع فیشر را تحت شرایط نظم ارائه می‌دهیم، سپس سه لم را بیان می‌کنیم که در محاسبه اطلاع فیشر نهفته در رکوردها و متغیرهای iid مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۱ (اطلاع فیشر): مقدار اطلاع فیشر نهفته در بردار تصادفی $X=\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ درباره پارامتر θ تحت شرایط نظم عبارت است از

$$I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_x\left(X;\theta\right)\right)$$

که در آن $\theta \in R$ و $f_x\left(x;\theta\right)$ تابع چگالی توام $X=\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ می‌باشد.

لم ۱: فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع $F_x\left(x;\theta\right)$ و تابع چگالی $f_x\left(x;\theta\right)$ باشند. در این صورت،

الف: تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای iامین رکورد بالا به ازای هر $i \geq 1$ عبارت است از

$$f_{X_{U_i}}(x) = \left(-\log \overline{F}_x(x)\right)^{i-1} f_x(x)/\Gamma(i) \qquad (3)$$

که در آن Γ تابع گامای کامل است.

ب: تابع چگالی احتمال توام نخستین n رکورد بالا به صورت زیر است. (٤)

$$f_{X_{U_1}, X_{U_2}, \ldots, X_{U_n}}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f_X\left(x_i\right)}{\overline{F}_X\left(x_i\right)} f_X\left(x_n\right)$$

ج: تابع چگالی احتمال iامین رکورد پایین به ازای هر $i \geq 1$ به صورت زیر است.

$$f_{X_{L_i}}(x) = \left(-\log F_X(x)\right)^{i-1} f_x(x)/\Gamma(i) \qquad (5)$$

د: تابع چگالی احتمال توام نخستین n رکورد پایین به صورت زیر است.

---

[٤] Burr

[٥] Timr

(۶)

$$g_{X_{L_1},X_{L_2},\dots,X_{L_n}}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{f_X(x_i)}{F_X(x_i)}f_X(x_n)$$

ه: تابع چگالی احتمال توام رکوردهای بالا و زمان بین آنها به صورت زیر است.

(۷)

$$f_{X_{U_1},T_1,\dots,X_{U_n}}(x_1,t_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n-1}f_X(x_i)F_X^{t_i}(x_i)f_X(x_n)$$

و: تابع چگالی احتمال توام iامین رکورد بالا و زمان مربوط به آن به ازای $i\ge 1$ به صورت زیر است.

$$f_{X_{U_i},T_i}(x,t)=\frac{\left(-\log\overline{F}_X(x)\right)^{i-1}}{\Gamma(i)}f_X(x)\overline{F}(x)F_X^{t}(x) \quad (۸)$$

$$t=0,1,2,\dots$$

ز: تابع چگالی احتمال توام رکوردهای پایین و زمان بین آنها به صورت زیر است.

(۹)

$$g_{X_{L_1},T_1,\dots,X_{L_n}}(x_1,t_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n-1}f_X(x_i)\overline{F}_X^{t_i}(x_i)f_X(x_n)$$

ح: تابع چگالی احتمال توام iامین رکورد پایین و زمان مربوط به آن به ازای هر $i\ge 1$ به صورت زیر است.

(۱۰)

$$g_{X_{L_i},T_i}(x,t)=\frac{\left(-\log F_X(x)\right)^{i-1}}{\Gamma(i)}f_x(x)F_X(x)\overline{F}_X^{t}(x)$$

که در آن $t=0,1,2,\dots$.

اثبات: برای مشاهده جزییات اثبات موارد (۳) تا (۶) می‌توان به [۵] و برای موارد (۷) تا (۱۰) به [۲] مراجعه نمود.

لم ۲: فرض کنید X_i ها یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با توزیع (BURR XII) باشند و X_{U_i} iامین رکورد بالای این توزیع باشد. در این صورت به ازای هر $i\ge 1$ داریم،

الف)

$$E\left(\frac{X_{U_i}^{\theta}\log^{2}\left(X_{U_i}\right)}{\left(1+X_{U_i}^{\theta}\right)^{2}}\right)=\frac{1}{\theta^{2}}\varphi_1(i) \quad (۱۱)$$

که در آن

$$\varphi_1(i)=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{y\log^{2}y}{(1+y)^{4}}(\log(1+y))^{i-1}dy$$

ب)

(۱۲)

$$E\left(\frac{X_{U_i}^{\theta}\log^{2}\left(X_{U_i}\right)\left\{\log\left(1+X_{U_i}^{\theta}\right)-X_{U_i}^{\theta}\right\}}{\left(1+X_{U_i}^{\theta}\right)^{2}\log^{2}\left(1+X_{U_i}^{\theta}\right)}\right)=\frac{1}{\theta^{2}}\varphi_2(i)$$

که در آن

$$\phi_2(i)=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{y\log^{2}y\{\log(1+y)-y\}}{(1+y)^{4}}\times\left(\log(1+y)\right)^{i-3}dy$$

ج)

$$E\left(\frac{X_{L_i}^{\theta}\log^{2}\left(X_{L_i}\right)}{\left(1+X_{L_i}^{\theta}\right)^{2}}\right)=\frac{1}{\theta^{2}}\varphi_3(i) \quad (۱۳)$$

که در آن

$$\varphi_3(i)=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{y\log^{2}y}{(1+y)^{4}}\left(\log\left(\frac{1+y}{y}\right)\right)^{i-1}dy$$

د)

(۱۴)

$$E\left(\frac{\log^{2}(X_{L_i})\left[X_{L_i}^{\theta}\log\left(\frac{1+X_{L_i}^{\theta}}{X_{L_i}^{\theta}}\right)-1\right]}{\left(1+X_{L_i}^{\theta}\right)^{2}\log^{2}\left(\frac{1+X_{L_i}^{\theta}}{X_{L_i}^{\theta}}\right)}\right)=\frac{1}{\theta^{2}}\varphi_4(i)$$

که در آن

$$\phi_4(i)=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{\log^2 y\left(y\log\left(\frac{1+y}{y}\right)-1\right)}{(1+y)^4}\times\left(\log\left(\frac{1+y}{y}\right)\right)^{i-3}dy$$

ه) $$E\left(T_i\frac{X_{U_i}^{\theta}\log^2\left(X_{U_i}\right)}{\left(1+X_{U_i}^{\theta}\right)^2}\right)=\frac{1}{\theta^2}\varphi_5(i) \qquad (15)$$

که در آن

$$\phi_5(i)=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{y^2\log^2 y}{(1+y)^4}(\log(1+y))^{i-1}dy$$

و) $$E\left(T_i\frac{X_{L_i}^{\theta}\log^2\left(X_{L_i}\right)}{\left(1+X_{L_i}^{\theta}\right)^2}\right)=\frac{1}{\theta^2}\varphi_6(i) \qquad (16)$$

که در آن

$$\varphi_6(i)=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{\log^2 y}{(1+y)^4}\left(\log\left(\frac{1+y}{y}\right)\right)^{i-1}dy$$

اثبات (الف): با توجه به (۲) و (۳) تابع چگالی احتمال i امین رکورد بالای توزیع (BURR XII) به صورت زیر است،

(۱۷)
$$f_{X_{U_i}}(x)=\frac{1}{\Gamma(i)}\frac{\theta x^{\theta-1}}{\left(1+x^{\theta}\right)^2}\left(\log\left(1+x^{\theta}\right)\right)^{i-1},\ x\geq 0$$

بنابراین، داریم

$$E\left(\frac{X_{U_i}^{\theta}\log^2\left(X_{U_i}\right)}{\left(1+X_{U_i}^{\theta}\right)^2}\right)=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{x^{\theta}\log^2 x}{\left(1+x^{\theta}\right)^4}\times\theta x^{\theta-1}\left(\log\left(1+x^{\theta}\right)\right)^{i-1}dx$$

اکنون با اعمال تغییر متغیر $y=x^{\theta}$ داریم

$$E\left(\frac{X_{U_i}^{\theta}\log^2\left(X_{U_i}\right)}{\left(1+X_{U_i}^{\theta}\right)^2}\right)=\frac{1}{\theta^2\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{y\log^2 y}{(1+y)^4}$$

$$\times\left(\log(1+y)\right)^{i-1}dy=\frac{1}{\theta^2}\varphi_1(i)$$

اثبات بند (ب) مشابه اثبات بند (الف) می‌باشد.

اثبات (ج): با توجه به (۲) و (٤) تابع چگالی احتمال i امین رکورد پایین توزیع (BURR XII) به صورت زیر است.

$$g_{X_{L_i}}(x)=\frac{1}{\Gamma(i)}\frac{\theta x^{\theta-1}}{\left(1+x^{\theta}\right)^2}\left(\log\left(\frac{1+x^{\theta}}{x^{\theta}}\right)\right)^{i-1},\quad x\geq 0 \qquad (18)$$

اکنون مشابه بند (الف) اثبات کامل است.

اثبات بند (د) مشابه اثبات بند (ب) می‌باشد.

اثبات (ه): با توجه به (۲) و (۸) تابع چگالی احتمال توام X_{U_i} و T_i به ازای هر $i\geq 1$ برای توزیع (BURR XII) عبارت است از،

$$f_{X_{U_i},T_i}(x,t)=\frac{1}{\Gamma(i)}\frac{\left(\log\left(1+x^{\theta}\right)\right)^{i-1}}{\left(1+x^{\theta}\right)^3}\theta x^{\theta-1}\left(\frac{x^{\theta}}{1+x^{\theta}}\right)^t$$

$$x\geq 0,\quad t=0,1,2,\ldots$$

بنابراین،

$$E\left(T_i\frac{X_{U_i}^{\theta}\log^2\left(X_{U_i}\right)}{\left(1+X_{U_i}^{\theta}\right)^2}\right)=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{x^{\theta}\log^2 x}{\left(1+x^{\theta}\right)^5}\left(\log\left(1+x^{\theta}\right)\right)^{i-1}\times\frac{x^{\theta}}{1+x^{\theta}}\theta x^{\theta-1}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}t\left(\frac{x^{\theta}}{1+x^{\theta}}\right)^{i-1}\right\}dx$$

از طرفی،

$$\sum_{t=0}^{\infty}t\left(\frac{x^{\theta}}{1+x^{\theta}}\right)^{t-1}=\frac{\left(1+x^{\theta}\right)^2}{x^{\theta}\log x}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{x^{\theta}}{1+x^{\theta}}\right)^t=\left(1+x^{\theta}\right)^2$$

در نتیجه،

$$E\left(T_i\frac{X_{U_i}^{\theta}\log^2 X_{U_i}}{\left(1+X_{U_i}^{\theta}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^\infty \frac{x^{2\theta}\log^2 x}{\left(1+x^\theta\right)^4}\left(\log\left(1+x^\theta\right)\right)^{i-1}\theta x^{\theta-1}dx$$

$$=\frac{1}{\theta^2\Gamma(i)}\int_0^\infty \frac{y^2\log^2 y}{(1+y)^4}\left(\log(1+y)\right)^{i-1}dy$$

$$=\frac{1}{\theta^2}\phi_5(i)$$

اثبات (و): با توجه به (۲) و (۱۰) تابع چگالی احتمال توام X_{U_i} و T_i به ازای هر $i \ge 1$ برای توزیع (BURR XII) عبارت است از

$$x\ge 0\ ,\quad t=0,1,2,\ldots$$

$$g_{X_{L_i},T_i}(x,t)=\frac{1}{\Gamma(i)}\frac{\theta x^{2\theta-1}}{\left(1+x^\theta\right)^3}\times\left(1+x^\theta\right)^{-t}\left(-\log\left(\frac{x^\theta}{1+x^\theta}\right)\right)^{i-1}$$

اکنون مشابه بند (ه) اثبات کامل است.

لم ۳: [1] میزان اطلاع فیشر نهفته در n مشاهده مستقل و هم توزیع با توزیع (BURR XII) در خصوص پارامتر θ به قرار زیر است

$$I_X(\theta)=\frac{n}{\theta^2}\left\{1+\frac{k}{k+2}\left[\frac{\pi^6}{6}+\gamma^2-2\gamma+2(\gamma-1)\times\psi(k+1)+\psi^2(k+1)+\psi'(k+1)\right]\right\}$$

که در آن γ ثابت اویلر، $\psi=\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ و Γ تابع گامای کامل است.

۳. رکوردهای بالا (پایین) بدون در نظر گرفتن زمان

در این بخش، میزان اطلاع فیشر نهفته در n امین رکورد بالا (پایین) و همچنین میزان اطلاع فیشر نهفته در نخستین n رکورد بالا (پایین) را محاسبه می‌کنیم و سپس میزان اطلاع فیشر در رکوردها را با میزان اطلاع فیشر نهفته در همان تعداد مشاهده *iid* مقایسه می‌کنیم. در پایان، بررسی می‌کنیم که چه کسری از اطلاع فیشر نهفته در رکوردها متعلق به رکورد nام است.

۳-۱- میزان اطلاع فیشر نهفته در nامین رکورد بالا

با توجه به (۱۷) می‌توانیم مشتق تابع لگاریتم درستنمایی را برای پارامتر مورد مطالعه توزیع i امین رکورد بالا به صورت زیر محاسبه کنیم،

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_{X_{U_i}}(x)=-\frac{1}{\theta^2}+(i-1)\frac{x^\theta\log^2 x\left\{\log\left(1+x^\theta\right)-x^\theta\right\}}{\left(1+x^\theta\right)\log^2\left(1+x^\theta\right)}-2\frac{x^\theta\log^2 x}{\left(1+x^\theta\right)^2}\tag{19}$$

لم ٤: میزان اطلاع فیشر نهفته در iامین رکورد بالای توزیع (BURR XII) عبارت است از

$$\theta^2 I_{X_{U_i}}(\theta)=1+2\varphi_1(i)-(i-1)\varphi_2(i)\tag{20}$$

که در آن φ_1 و φ_2 به ترتیب در (۱۱) و (۱۲) تعریف شده‌اند.

اثبات: با توجه به تعریف ۱ و رابطه (۱۹) اثبات کامل است.

۳-۲- میزان اطلاع فیشر نهفته در نخستین n رکورد بالا

با توجه به (٤) داریم،

$$\log f_{X_U}(x)=\sum_{i=1}^{n}\log f_X(x_1)-\sum_{i=1}^{n-1}\log\overline{F}_X(x_i)$$

که در آن $X_U=\left(X_{U_1},X_{U_2},\ldots,X_{U_n}\right)$. در نتیجه،

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_{X_U}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_X(x_i)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log\overline{F}_X(x_i)$$

بنابراین، در توزیع (BURR XII) داریم،

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_{X_U}(x)\tag{21}$$

$$=-\frac{n}{\theta^2}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^\theta\log^2 x_i}{\left(1+x_i^\theta\right)^2}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i^\theta\log^2 x_i}{\left(1+x_i^\theta\right)^2}$$

$$=-\frac{n}{\theta^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^\theta\log^2 x_i}{\left(1+x_i^\theta\right)^2}-2\frac{x_i^\theta\log^2 x_i}{\left(1+x_i^\theta\right)^2}$$

لم ۵: میزان اطلاع فیشر نهفته در نخستین n رکورد بالای توزیع (BURR XII) عبارت است از،

$$\theta^{2} I_{X_U}(\theta)=n+\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_1(i)+2\varphi_1(n) \qquad (22)$$

که در آن φ_1 در (۱۱) تعریف شده است.

اثبات: با توجه به تعریف ۱ و رابطه (۲۱) اثبات کامل است.

۳-۳- میزان اطلاع فیشر نهفته در n امین رکورد پایین

با توجه به (۱۸) می‌توانیم مشتق تابع لگاریتم درستنمایی را برای پارامتر مورد مطالعه توزیع iامین رکورد پایین به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$\frac{\partial^{2}}{\partial\theta^{2}}\log g_{X_{L_i}}(x)=-\frac{1}{\theta^{2}}+(i-1)\frac{\log^{2}(x)}{\left(1+x^{\theta}\right)^{2}\log^{2}\left(\frac{1+x^{\theta}}{x^{\theta}}\right)}\times\left\{x^{\theta}\log\left(\frac{1+x^{\theta}}{x^{\theta}}\right)-1\right\}-2\frac{x^{\theta}\log^{2}x}{\left(1+x^{\theta}\right)^{2}}$$

لم ۶: میزان اطلاع فیشر نهفته در i امین رکورد پایین توزیع (BURR XII) عبارت است از،

$$\theta^{2} I_{X_{L_i}}(\theta)=1+2\varphi_3(i)-(i-1)\varphi_4(i) \qquad (24)$$

که در آن φ_3 و φ_4 به ترتیب در (۱۳) و (۱۴) تعریف شده‌اند.

اثبات: با توجه به تعریف ۱ و رابطه (۲۳) اثبات کامل است.

هر گاه توزیع جامعه متقارن باشد، در [۳] نشان داده شده که میزان اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای بالا و پایین با هم برابرند. حال این سوال مطرح می‌شود که آیا عکس این موضوع درست است؟ در قضیه زیر نشان خواهیم داد که میزان اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای بالا و پایین توزیع بر نوع دوازده با هم برابرند. هرچند این توزیع متقارن نیست.

قضیه ۱: فرض کنید X_i ها یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع با توزیع (BURR XII) باشند، در این صورت داریم

$$I_{X_{U_i}}(\theta)=I_{X_{L_i}}(\theta)$$

اثبات: با توجه به (۲۰) و (۲۴) ملاحظه می‌گردد که

$$\theta^{2} I_{X_{U_i}}(\theta)=1+2\varphi_1(i)-(i-1)\varphi_2(i)$$

$$\theta^{2} I_{X_{L_i}}(\theta)=1+2\varphi_3(i)-(i-1)\varphi_4(i)$$

بنابراین، کافیست نشان دهیم که $\varphi_1(i)=\varphi_3(i)$ و $\varphi_2(i)=\varphi_4(i)$. با اعمال تغییر متغیر $t=1/y$ داریم،

$$\phi_3(i)=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{\log^{2} y\left\{y\log\left(1+\frac{1}{y}\right)-1\right\}}{(1+y)^{4}}\times\left(\log(1+y)\right)^{i-3}dy$$

$$=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{\log^{2} t\left\{\frac{1}{t}\log(1+t)-1\right\}}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4}}\times\left(\log(1+t)\right)^{i-3}\frac{dt}{t^{2}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{t\log^{2} t\left\{\log(1+t)-t\right\}}{(1+t)^{4}}\times\left(\log(1+t)\right)^{i-3}dt$$

$$=\varphi_1(i)$$

و

$$\phi_4(i)=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{y\log^{2} y}{(1+y)^{4}}\left(\log\left(1+\frac{1}{y}\right)\right)^{i-1}dy$$

$$=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{\log^{2} t}{t\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4}}\left(\log(1+t)\right)^{i-1}\frac{dt}{t^{2}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(i)}\int_0^{\infty}\frac{t\log^{2} t}{(1+t)^{4}}\left(\log(1+t)\right)^{i-1}dt$$

$$=\varphi_2(i)$$

۳-۴- میزان اطلاع فیشر نهفته در نخستین n رکورد پایین

در مورد نخستین n رکورد پایین می‌توانیم مشابه بخش ۳-۲ و با استفاده از (۶) مشتق تابع لگاریتم درستنمایی را محاسبه کنیم

$$\frac{\partial^{2}}{\partial\theta^{2}}\log_{X_L}(x) \qquad (25)$$

$$= -\frac{n}{\theta^{2}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{X_{L_i}^{\theta} \log^{2}\left(X_{L_i}\right)}{\left(1 + X_{L_i}^{\theta}\right)^{2}} - 2\frac{X_{L_n}^{\theta} \log^{2}\left(X_{L_n}\right)}{\left(1 + X_{L_n}^{\theta}\right)^{2}}$$

که در آن $X_L = \left(X_{L_1}, X_{L_2}, \ldots, X_{L_n}\right)$.

لم ۷: میزان اطلاع فیشر نهفتـه در نخستین n رکـورد پـایین توزیـع (BURR XII) عبارت است از،

$$\theta^{2} I_{X_L}(\theta) = n + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_2(i) + 2\varphi_2(n) \qquad (26)$$

که در آن φ_2 در (۱۳) تعریف شده است.

اثبات: با توجه به تعریف ۱ و رابطه (۲۵) اثبات کامل است.

قضیه ۲: فرض کنید X_i ها یک دنبالـه از متغیرهـای تصـادفی هـم توزیع با توزیع (BURR XII) باشند، در این صورت داریم

$$I_{X_U}(\theta) = I_{X_L}(\theta)$$

اثبات: با توجه به (۲۲) و (۲۶) ملاحظه می گردد که

$$\theta^{2} I_{X_U}(\theta) = n + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_1(i) + 2\varphi_1(n)$$

$$\theta^{2} I_{X_L}(\theta) = n + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_2(i) + 2\varphi_2(n)$$

بنابراین، کافیست نشـان دهـیم بـه ازای هـر i داریـم $\varphi_1(i) = \varphi_2(i)$. مشابه قضیه (۱) اثبات کامل است.

۳-۵- مقایسه اطلاع فیشر رکوردها

به منظور مقایسه مـیزان اطـلاع فیشـر نهفتـه در n مشـاهده مسـتقل و هـم توزیع با توزیع (BURR XII) و همـان تعـداد رکـورد از آن توزیـع بـه کمک محاسبات عددی جدول ۱ بـه ازای nهـای متفـاوت تنظیـم شـده است که در آن

$$\xi(n) = \theta^{2} I_{X_1,\ldots,X_n}(\theta)$$

لازم به ذکر است که کلیه نتایج عددی این مقاله بـا اسـتفاده از نرم‌افـزار ریاضی (MAPLE V8) به دست آمده است.

با توجه به جدول ۱ مشاهده می گردد که،

۱- اطلاع فیشر نهفته در رکوردهای بالا (پایین) کمتر از متغیرهـای iid می‌باشد.

۲- با افزایش n، تفاضل اطلاع فیشر رکوردهای بالا (پایین) و متغیرهـای iid افزایش می‌یابد.

همچنین، به منظور مشاهده میزان اطلاع فیشر نهفته در آخرین آمـاره رکوردی در بیـن نخسـتین n رکـورد بـالا (پـایین) جـدول ۲ بـه کمـک محاسبات عددی به ازای nهای متفاوت تنظیم شده است، که در آن

$$\upsilon(n) = \theta^{2} L_{X_{U_n}}(\theta) = \theta^{2} I_{X_{L_n}}(\theta)$$

$$\rho(n) = \frac{\upsilon(n)}{\psi(n)}$$

و $\psi(n)$ در جدول ۱ تعریف شده است.

با توجه به جدول ۲ مشاهده می گردد که،

۱- میزان اطلاع فیشر نهفته در رکورد nام نسبت به n صعودی است.

۲- نسبت میزان اطلاع فیشر نهفته در رکورد n ام به نخسـتین n رکـورد، به ازای $x \geq 3$ صعودی است.

۳- بیش از ٦٧ درصد اطلاع فیشر رکوردها در رکورد nام نهفته است

٤- چنین به نظر می‌رسد که $\left(X_{L_n}\right)X_{U_n}$ یـک آمـاره بسـنده مجـانبی برای θ است.

٤. رکوردهای بالا (پایین) با در نظر گرفتن زمـان بین آنها

آماره‌های U_i و L_i بـه تـنهایی حـاوی هیچگونـه اطلاعـی دربـاره پارامتر θ نیستند، اما در کنار مقادیر رکوردها حائز اهمیت می‌باشند؛ این موضوع در [٤] مورد بررسی قرار گرفته اسـت. مـا در ایـن بخـش، تـاثیر دخالت زمان رکوردها را در میزان اطلاع فیشر نهفته در مقادیر آنها مورد بررسی قرار می‌دهیم و رکوردهای بالا و پایین را با در نظر گرفتن زمـان بین آنها مورد بررسی و مقایسه قرار می‌دهیم.

٤-١- رکوردهای بالا با در نظر گرفتن زمان بین آنها

در مورد رکوردهای بالا و زمان بین آنها می‌توانیم مشابه بخش ۳-۲ و با استفاده از (۷) مشتق تابع لگاریتم درستنمایی را محاسبه کنیم.

$$\frac{\partial^{2}}{\partial\theta^{2}} \log f_{X_U,T}(x,t) \qquad (27)$$

$$= \frac{n}{\theta^{2}} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\theta} \log^{2} x_i}{\left(1 + x_i^{\theta}\right)^{2}} - \sum_{i=1}^{n-1} t_i \frac{x_i^{\theta} \log^{2} x_i}{\left(1 + x_i^{\theta}\right)^{2}}$$

که در آن $T=\left(T_1,T_2,\dots,T_{n-1}\right)$.

لم ۸: اطلاع فیشر نهفته در نخستین n رکورد بالا و زمان بین آنها در توزیع (BURR XII) عبارت است از

$$\theta^2 I_{X_U,T}(\theta)=n+2\sum_{i=0}^{n}\varphi_1(i)+\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_5(i) \qquad (28)$$

که در آن φ_1 و φ_5 به ترتیب در (۱۱) و (۱۵) تعریف شده‌اند.

اثبات: با توجه به تعریف ۱ و رابطه (۲۷) اثبات کامل است.

۴-۲- رکوردهای پایین با در نظر گرفتن زمان بین آنها

در مورد رکوردهای پایین و زمان بین آنها می‌توانیم مشابه بخش ۳-۲ و با استفاده از (۹) مشتق تابع لگاریتم درستنمایی را محاسبه کنیم.

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log g_{X_L,T}(x,t) \qquad (29)$$

$$=\frac{n}{\theta^2}-2\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\theta}\log^2 x_i}{\left(1+x_i^{\theta}\right)^2}-\sum_{i=1}^{n-1}t_i\frac{x_i^{\theta}\log^2 x_i}{\left(1+x_i^{\theta}\right)^2}$$

لم ۹: اطلاع فیشر نهفته در نخستین n رکورد پایین و زمان بین آنها در توزیع (BURR XII) عبارت است از،

$$\theta^2 I_{X_L,T}(\theta)=n+2\sum_{i=0}^{n}\varphi_3(i)+\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_6(i) \qquad (30)$$

که در آن φ_3 و φ_6 به ترتیب در (۱۳) و (۱۶) تعریف شده‌اند.

اثبات: با توجه به تعریف ۱ و رابطه (۲۹) اثبات کامل است.

قضیه ۳: فرض کنید X_i ها یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع (BURR XII) باشند. در این صورت داریم،

$$I_{X_U,T}(\theta)=I_{X_L,T}(\theta)$$

اثبات: با توجه به (۲۸) و (۳۰) ملاحظه می گردد که،

$$\theta^2 I_{X_U,T}(\theta)=n+2\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(i)+\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_5(i)$$

$$\theta^2 I_{X_L,T}(\theta)=n+2\sum_{i=1}^{n}\varphi_3(i)+\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_6(i)$$

بنابراین، کافیست نشان دهیم که $\varphi_1(i)=\varphi_3(i)$ و $\varphi_5(i)=\varphi_6(i)$. مشابه قضیه ۱ اثبات کامل است.

۴-۳- مقایسه اطلاع فیشر رکوردها و زمان بین آنها با متغیرهای iid

برای مشاهده تجربی میزان تاثیر در نظر گرفتن زمان بین رکوردها، $I_{X_U,T}(\theta)$ را به ازای nهای مختلف و به کمک روش‌های عددی محاسبه کرده و آن را با اطلاع فیشر در همان تعداد متغیر (iid) مقایسه کرده‌ایم. نتایج در جدول ۳ آمده است که در آن

$$\tau(n)=\theta^2 I_{X_{U_1},T_1,\dots,X_{U_n},T_n}(\theta)$$
$$=\theta^2 I_{X_{L_1},T_1,\dots,X_{L_n},T_n}(\theta)$$
$$\eta(n)=\tau(n)-\xi(n)$$

و $\xi(n)$ در جدول ۱ تعریف شده است.

با توجه به جدول ۳ ملاحظه می گردد که،

۱- با در نظر گرفتن زمان بین رکوردها، میزان اطلاع فیشر نهفته در رکوردها و زمان بین آنها از میزان اطلاع فیشر نهفته در متغیرهای (iid) بیشتر می‌شود.

۲- با افزایش حجم نمونه، میزان اطلاع فیشر نهفته در رکوردها و زمان بین آنها افزایش می‌یابد.

جدول ۱. مقادیر عددی $\xi(n)$، $\psi(n)$ و $\delta(n)$ به ازای $n=1,2,\dots,20$

n	$\xi(n)$	$\psi(n)$	$\delta(n)$	n	$\xi(n)$	$\psi(n)$	$\delta(n)$
۱	۱/۴۳	۱/۴۳	۰	۱۱	۱۵/۷۳	۱۲/۶۴	۳/۰۶
۲	۲/۸۶	۲/۷۱	۰/۱۵	۱۲	۱۷/۱۶	۱۳/۶۴	۳/۵۲
۳	۴/۲۹	۴/۰۲	۰/۲۷	۱۵	۲۱/۴۵	۱۶/۶۴	۴/۸۱
۴	۵/۷۲	۵/۲۶	۰/۴۶	۱۷	۲۴/۱۳	۱۸/۶۴	۵/۶۷
۶	۸/۵۸	۷/۵۲	۱/۰۶	۱۸	۲۵/۷۴	۱۹/۶۴	۶/۱۰
۱۰	۱۴/۳	۱۱/۶۳	۲/۶۷	۲۰	۲۸/۶	۲۱/۶۴	۶/۹۶

جدول ۲. مقادیر عددی $\psi(n)$، $\upsilon(n)$ و $\rho(n)$ به ازای $n = ١,٢,...,٢٠$

n	$\psi(n)$	$\upsilon(n)$	$\rho(n)$	n	$\psi(n)$	$\upsilon(n)$	$\rho(n)$
١	١/٤٣	١/٤٣	١	١١	١٢/٦٤	١٠/٩٩	٠/٨٧
٢	٢/٧١	١/٨٨	٠/٦٩	١٢	١٣/٦٤	١٢/٠٠	٠/٨٨
٣	٤/٠٢	٢/٧٤	٠/٦٨	١٥	١٦/٦٤	١٥/٠٠	٠/٩٠
٤	٥/٢٦	٣/٧٧	٠/٧٢	١٧	١٨/٦٤	١٧/٠٠	٠/٩١
٦	٧/٥٢	٥/٩٠	٠/٧٨	١٨	١٩/٦٤	١٨/٠٠	٠/٩٢
١٠	١١/٦٣	٩/٩٩	٠/٨٦	٢٠	٢١/٦٤	٢٠/٠٠	٠/٩٢

جدول ۳. مقادیر عددی $\xi(n)$، $\tau(n)$ و $\eta(n)$ به ازای $n = ١,٢,...,٢٠$

n	$\xi(n)$	$\tau(n)$	$\eta(n)$	n	$\xi(n)$	$\tau(n)$	$\eta(n)$
١	١/٤٣	١/٤٣	٠	١١	١٥/٧٣	٤٤٩/٤٠	٤٤٣/٦٧
٢	٢/٨٦	٤/٣٥	١٤/٤٩	١٢	١٧/١٦	٥٨٢/٣٨	٥٦٥/٢٢
٣	٤/٢٩	١٠/٩٨	٦/٦٩	١٥	٢١/٤٥	١٣٧٣/٣٦	١٣٥١/٩١
٤	٥/٧٢	٢٣/٥٥	١٧/٨٣	١٧	٢٤/٣١	١٦٤٧/٣٦	١٦٢٣/٠٥
٦	٨/٥٨	٧٤/٨٩	٦٦/٣١	١٨	٢٥/٧٤	١٩٥٤/٣٦	١٩٢٨/٦٢
١٠	١٤/٣٠	٣٣٨/٤٣	٣٢٤/١٣	٢٠	٢٨/٦	٢٦٧٨/٣٦	٢٦٤٩/٧٦

مراجع

[۱]احمدی، ج. و رزمخواه، م. (۱۳۱)، اطلاع در توزیع بر نوع دوازده، مجموعه مقالات ششمین سمینار بین‌المللی آمار، جلد اول، ۴۰-۲۶.

[2] Arnold,.B.C., Balakrishman, N. and Nagaraja, N,H., 1998. *Records,* John Wiley, New York.
[3] Ahmadi, J. and Arghami, N.R., 2001. *On The Fisher Information in Record Values,* Metriaka, 53(3), pp.195-205.
[4] Ahmadi, J. and Arghami, N.R., 2003. *Conparing the Fisher Information in Record Values and iid Observation. Statistics,* 37(5), pp. 435-441.
[5] Click, N., 1978. *Breaking Record and Breaking Boards*, Amer. Math. Monthly, 85, pp. 2-26.
[6] Hofman, G. and Nagaraja, H.N., 2003. *Fisher Information in Record Data*, Metrika, 57, pp. 177-193.
[7] Timr, L. Fry, 1993. *University and Multivariate BURR Distributions*, Pak. J. Stat., A, pp. 1-24.