آشنایی با الگوهای خطی تعمیم یافته

منوچهر خردمندنیا[۱] مصطفی رستگاری[۱]

چکیده

برای سالهای متمادی، مولفین متعددی روی الگوهای غیر نرمال و غیر خطی مختلفی کار کرده‌اند، ولی همانگونه که گرین و سیلورمن [۸] نیز اشاره کرده‌اند، این نلدر و ودربورن بودند [۱۵] که برای اولین بار نشان دادند که بسیاری از الگوهای خطی، غیر خطی، نرمال و غیر نرمال به واسطه خواص مشترکی که دارند، می‌توانند عضوی از یک خانواده واحد به نام خانواده الگوهای خطی تعمیم یافته (GLMs) و نه اعضایی از چند خانواده نامربوط، تلقی گردند. مقاله کلیدی نلدر و دربورن[۱۵] که توسط کوتز و جانسون[۱۱] دوباره به چاپ رسیده است، بدون شک نقش چشمگیری در افزایش امکانات الگوسازی آماری داشته است. از سال ۱۹۷۲ تاکنون کارهای زیادی برای تعمیم مبانی نظری، کاربردی و محاسباتی الگوهای خطی تعمیم یافته انجام شده است.

ما در مقاله حاضر، بر اساس مراجعی که به آنها دسترسی داشته‌ایم، ضمن معرفی ایده‌های کلیدی با نثری ساده و مناسب، کارهای مهمی که از سال ۱۹۷۲ تاکنون در رابطه با GLMs انجام شده است را به اختصار معرفی کرده‌ایم. در فرآیند جستجوی خویش از CDی (Current Index to Statistics, CLS, 1997) نیز بهره گرفته‌ایم. بیشتر مطالب ارائه شده در مقاله حاضر از مراجع بیکر و نلدر [۱]، مک‌کولا و نلدر [۱۲] و فیرت [۶] گردآوری و تلفیق شده‌اند. برای ملاحظه، مثال‌های عددی متعدد مراجع بیکر و نلدر [۱] و دابسن [٤] توصیه می‌شود. در مرجع نلدر و بیکر [١٤] نیز ایده‌های کلیدی به صورت فشرده معرفی شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: برآورد پارامترها، انتخاب مدل.

۱. مقدمه و تاریخچه مختصر

بر اساس مراجع در دسترس، کارهای مهمی که بعد از سال ۱۹۷۲ روی GLMs انجام شده است را به شرح زیر می‌توان خلاصه نمود.

بیکر و نلدر [۱] نرم‌افزار GLIM را برای برازش الگوهای خطی تعمیم یافته با روش عددی ماکسیمم درستنمایی طراحی نمودند. آخرین نسخه این نرم‌افزار در سال ۱۹۹۳ به عنوان نسخه ٤، توسط گروه الگوریتم‌های عددی دانشگاه آکسفورد منتشر شده است. پری‌گیبون [۱۷] ایده آزمون نیکویی تابع پیوند را به عنوان ابزاری برای بررسی درستی تشخیص مدل در خانواده GLMs معرفی نمود. فرانسیسکو [۷] دو خانواده از توابع پیوند را برای پاسخ‌های دو جمله‌ای معرفی و مورد بحث قرار داد. وست، هریسن و میگون [۱۸] الگوهای خطی تعمیم یافته پویا را معرفی کرده‌اند. پیرس و شیفر [١٦] روش‌های مختلف تحلیل باقیمانده‌های GLMs را مورد بررسی قرار دادند. هاستی و

[۱] گروه آمار، دانشگاه اصفهان

[۹] کاربردهایی از الگوهای جمعی تعمیم‌یافته که تعمیمی از الگوهای خطی تعمیم‌یافته هستند را ارائه نمودند.

ویلیامز [۱۹] ایده‌های مفیدی راجع به بررسی درستی تشخیص مدل در خانواده GLMs ارائه نمود. دیویسن [۳] ایده استنباط شرطی تقریبی را در خانواده الگوهای خطی تعمیم‌یافته مطرح نمود. مک‌کولاف و نلدر [۱۲] به طور نسبتاً جامع، ایده‌های اساسی مربوط به الگوهای خطی تعمیم‌یافته را ارائه کردند. فیرت [٦] ایده‌های کلیدی الگوهای خطی تعمیم‌یافته را به فرم تکامل یافته‌تری از مقاله کلیدی اولیه ارائه کرد. ابراهیم و لود[۲] [۱۰] با توزیع پیشین جفریز[۳]، یک تحلیل بیزی از الگوهای خطی تعمیم‌یافته ارائه نمودند. مک‌گلیکریست [۱۳] الگوهای مخلوط تعمیم‌یافته، یعنی الگوهای خطی تعمیم‌یافته‌ای که شامل متغیرهای تبیینی تصادفی هستند را مورد بررسی قرار داد. [۸] الگوهای خطی تعمیم‌یافته را از دیدگاهی که آنها روش تاوان ناهمواری[٤] نامیدند، بررسی کردند. بدریک، کریستن‌سن و جانسون [۲] با به کارگیری توزیع‌های پیشین آگاهی بخش، تحلیلی بیزی از الگوهای خطی تعمیم‌یافته ارائه نمودند. فارمیر و توتز [۵] بسیاری از ایده‌های الگوهای خطی تعمیم‌یافته را به حالت چند متغیره تعمیم دادند.

۲. الگوهای خطی تعمیم‌یافته

فرضیات و عناصر تشکیل دهنده یک الگوی خطی تعمیم‌یافته به شرح زیر است،

الف: فرض می‌شود $y_1,\dots,y_N$ متغیرهای پاسخ مستقل از هم هستند و $E(y_i)=\mu_i$ و لذا می‌توان نوشت

$$y_i=\mu_i+\varepsilon_i \quad , \quad E(\varepsilon_i)=0$$

که در آن μ_i را قسمت سیستماتیک مدل و ε_i را خطا می‌نامند.

ب: فرض می‌شود که تابع احتمال y_i از خانواده نمایی و به فرم زیر است.

$$f(y_i,\theta_i,\phi)=\exp\left\{\frac{y_i\theta_i-b(\theta_i)}{\phi/w_i}+c(y_i,\phi,w_i)\right\} \qquad (1)$$

در این تابع، θ_i تابعی از μ_i است که آن را پارامتر طبیعی می‌نامند. برای برآورد θ_i یک آماره کامل و کافی وجود دارد. پارامتر ϕ را پارامتر مقیاس و گاهی پارامتر مزاحم می‌نامند. $b(\cdot)$ و $c(\cdot)$ توابعی معلوم، w_i ها اعداد حقیقی معلومی هستند که آنها را وزن‌های پیشین[٥] می‌نامند. تحت شرایط فوق به سهولت می‌توان نشان داد که،

$$E(y_i)=\frac{\partial}{\partial\theta_i}b(\theta_i)=\mu_i$$

$$Var(y_i)=\frac{\phi}{w_i}\frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2}b(\theta_i)=\frac{\phi}{w_i}V(\mu_i) \qquad (2)$$

که در آن $V(\mu_i)=b''(\theta_i)$ تابع واریانس نامیده می‌شود.

خانواده نمایی شامل توزیع‌های نرمال، پواسن، دو جمله‌ای، گاما و گاوسی وارون[٦] می‌باشد. در بخش‌های ۳ و ٤ به ترتیب پاسخ‌های نرمال و پواسن را به عنوان مثال‌هایی از پاسخ‌های متعلق به رده‌نمایی مورد تعمیق قرار می‌دهیم.

ج: فرض می‌شود مکانیزمی که متغیرهای تبیینی[۷] را به قسمت سیستماتیک مدل مرتبط می‌کند، به شکل زیر است

$$g(\mu_i)=\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\dots+\beta_px_{ip}=\sum_{j=1}^{p}\beta_jx_{ij} \qquad (3)$$

که در آن $\eta_i=g(\mu_i)$ تابعی یکنوا و مشتق‌پذیر از μ_i است که آن را تابع پیوند می‌نامند. $x_{i1},x_{i2},\dots,x_{ip}$ متغیرهای تبیینی معلوم رسته‌ای یا غیر رسته‌ای و β_i ها پارامترهای مجهول هستند. رابطه (۳) را به فرم ماتریسی $\eta=X\beta$ نیز می‌توان نوشت که در آن $X=(x_{ij})$ یک ماتریس $N\times p$ است که درایه سطر iام و ستون jام آن x_{ij} است، β یک بردار $p\times 1$ از پارامترها است که درایه jام آن β_j است و η یک بردار $N\times 1$ است که درایه iام آن η_i می‌باشد.

---

[۲] Ibrahim and Laud

[۳] Jefrees

[٤] Roughness penalty

[٥] Prior weights

[٦] Inverse Gussian

[۷] Explantory

۳. الگوهای خطی تعمیم‌یافته با پاسخ نرمال

در این بخش به عنوان مثال‌هایی از الگوهای خطی تعمیم‌یافته، پاسخ‌های نرمال را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید $y_1,\ldots,y_N$ مستقلند و $y_i \sim N\left(\mu_i,\sigma^2\right)$. در این صورت تابع چگالی احتمال y_i عبارت است از،

$$f(y_i;\mu_i,\sigma^2) = \exp\left\{\frac{y_i\mu_i-\mu_i^2/2}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i^2}{\sigma^2}+\ln 2\pi\sigma^2\right)\right\}$$

ملاحظه می‌شود که در اینجا پارامتر طبیعی $\theta_i=\mu_i$ است، $b(\theta_i)=\mu_i^2/2$ ، $\phi=\sigma^2$ و $w_i=1$. اگر y_i میانگین یک نمونه تصادفی n_i تایی از $N\left(\mu_i,\sigma^2\right)$ باشد، یعنی اگر $y_i\sim N\left(\mu_i,\sigma^2/n_i\right)$، در این صورت تابع چگالی احتمال y_i را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$f\left(y_i;\mu_i,\sigma^2\right) = \exp\left\{\frac{y_i\mu_i-\mu_i^2/2}{\sigma^2/n_i}-\frac{1}{2}\left(\frac{n_iy_i^2}{\sigma^2}+\frac{Ln2\pi\sigma^2}{n_i}\right)\right\}$$

ملاحظه می‌شود که در اینجا نیز پارامتر طبیعی $\theta_i=\mu_i$ است، $b(\theta_i)=\mu_i^2/2$، $\phi=\sigma^2$ و $w_i=n_i$. اگر y_i حاصل جمع یک نمونه تصادفی n_i تایی از $N\left(\mu_i,\sigma^2\right)$ باشد، یعنی $y_i\sim N\left(\mu_i,n_i\sigma^2\right)$، در این صورت $w_i=1/n_i$. ملاحظه نمودیم که تابع پیوند طبیعی برای پاسخ‌های نرمال همانی است. یک الگوی همانی خطی را به هر یک از دو صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} y_i &= \beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\ldots+\beta_px_{ip}+\varepsilon_i \\ \mu_i &= \beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\ldots+\beta_px_{ip} \end{aligned}$$

الگوی فوق در واقع یک الگوی خطی وزنی معمولی با وزن‌های معلوم است. اگر متغیرهای تبیینی همه از نوع غیر رسته‌ای باشند، الگوی فوق یک الگوی رگرسیون وزنی معمولی است. اگر متغیرهای تبیینی بعضی رسته‌ای و بعضی غیر رسته‌ای باشند، الگوی فوق یک الگوی آنالیز کوواریانس وزنی معمولی می‌باشد. توجه کنید که در خانواده الگوهای خطی تعمیم‌یافته توابع پیوند متعددی را می‌توان در الگوسازی مورد بررسی قرار داد. به عنوان مثال، با تابع پیوند ریشه دوم داریم: $\eta_i=\sqrt{\mu_i}$. یک الگوی ریشه دوم خطی را به هر یک از سه صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} y_i &= \left(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\ldots+\beta_px_{ip}\right)^2+\varepsilon_i \\ \sqrt{\mu_i} &= \beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\ldots+\beta_px_{ip} \\ \mu_i &= \left(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\ldots+\beta_px_{ip}\right)^2. \end{aligned}$$

با تابع پیوند وارون داریم، $\eta_i=1/\mu_i$. یک الگوی وارون خطی را به هر یک از سه صورت زیر می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned} y_i &= \left(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\ldots+\beta_px_{ip}\right)^{-1}+\varepsilon_i \\ \frac{1}{\mu_i} &= \beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\ldots+\beta_px_{ip} \\ \mu_i &= \left(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\ldots+\beta_px_{ip}\right)^{-1} \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که بسیاری از الگوهای غیر خطی نیز عضوی از خانواده GLMs می‌باشند.

٤. الگوهای خطی تعمیم‌یافته با پاسخ پواسون

در این بخش به عنوان مثال‌هایی دیگر از الگوهای خطی تعمیم‌یافته، پاسخ‌های پواسون را بررسی می‌کنیم. فرض کنید y_i تا y_N مستقلند و y_i دارای توزیع پواسون با امید ریاضی μ_i است. در این صورت تابع احتمال y_i عبارت است از،

$$f(y_i,\mu_i)=\exp\{y_iLn\mu_i-\mu_i-Lny_i!\}.$$

در اینجا پارامتر طبیعی $\theta_i=Ln\mu_i$ است، $b(\theta_i)=\mu_i$، $\phi=1$ و $w_i=1$. ملاحظه می‌شود که برای پاسخ‌های پواسون، تابع پیوند لگاریتم، تابع پیوند طبیعی تلقی می‌شود. یک الگوی لگاریتم خطی را به هر یک از سه فرم زیر می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} y_i &= \exp\{\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\ldots+\beta_px_{ip}\}+\varepsilon_i \\ Ln\mu_i &= \beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\ldots+\beta_px_{ip} \\ \mu_i &= \exp\{\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\ldots+\beta_px_{ip}\} \end{aligned}$$

الگوی لگاریتم خطی، برای بررسی انواع استقلال در جداول پیشایندی چند طرفه نقش کلیدی دارد. در این حالت، متغیرهای تبیینی همه از نوع رسته‌ای هستند. برای پاسخ‌های پواسون با توجه به اینکه امید ریاضی y_i با واریانس y_i برابر است، اگر μ_i با افزایش i افزایش (کاهش) یابد، آنگاه واریانس y_i نیز افزایش (کاهش) می‌یابد. به

عبارت دیگر، برای پاسخ‌های پواسون واریانس y_i همراه با میانگین y_i تغییر می‌کند.

۵. استنباط آماری راجع به پارامترها

اگر $y_1,\dots,y_N$ مستقل باشد و تابع احتمال y_i به فرم (۱) باشد، واضح است که لگاریتم درستنمایی عبارت است از،

$$l(\mu,\phi,y_i)=\sum_i\left[\frac{y_i\theta_i-b(\theta_i)}{\phi/w_i}+c(y_i,\phi,w_i)\right] \qquad (٤)$$

به سهولت می‌توان نشان داد که،

$$\frac{\partial l(\mu,\phi;y_i)}{\partial\beta_j}=\frac{1}{\phi}\sum_i\frac{w_i(y_i-\mu_i)}{V(\mu_i)}\cdot\frac{x_{ij}}{g'(\mu_i)} \qquad (٥)$$

$$(j=1,2,\dots,p)$$

که در آن

$$.g(\mu_i)=\theta_i=\sum{}_j\beta_jx_{ij} \text{ و } g'(\mu_i)=\frac{\partial}{\partial\mu_i}g(\mu_i)$$

با مساوی صفر قرار دادن طرف راست (۵) معادلات برآورد ماکسیمم درستنمایی (ML) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\sum_i\frac{w_i(y_i-\mu_i)}{V(\mu_i)}\cdot\frac{x_{ij}}{g'(\mu_i)}=0 \quad , \quad (j=1,2,\dots,p) \qquad (٦)$$

به طور کلی دستگاه p معادله p مجهول فوق بر حسب β_i ها غیر خطی است و لذا جواب صریح ندارد. یک استثنای مشهور الگوی همانی خطی با واریانس‌های همگن است. یعنی حالتی که تابع پیوند $g(\mu_i)=\mu_i$ همانی و $Var(y_i)$ ثابت باشد. در این حالت، برای پاسخ نرمال، برآورد ماکسیمم درستنمایی بردار $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_p)'$ همان برآورد کمترین توانهای دوم موزون[8]، یعنی،

$$\beta=(X'WX)^{-1}X'Wy \qquad (٧)$$

می‌باشد که در آن W یک ماتریس قطری $N\times N$ با درایه قطر iام w_i است. اکنون متغیر تصادفی زیر را در نظر بگیرید.

$$z_i=\eta_i+(y_i-\mu_i)g'(\mu_i) \qquad (٨)$$

واضح است که

$$E(z_i)=\eta_i=\sum_j\beta_jx_{ij} \qquad (٩)$$

یعنی، z_i را می‌توان به عنوان پاسخ یک مدل خطی در نظر گرفت. همچنین، واضح است که

$$Var(z_i)=\frac{\phi}{w_i}[g'(\mu_i)]^2V(\mu_i) \qquad (١٠)$$

در عمل μ_i ها نامعلومند. یک روش معقول تکراری برای برآورد پارامترها استفاده از الگوریتم زیر است. این الگوریتم در مرجع فیرث (۱۹۹۱) موجود است.

۱) فرض کنید $\mu_i^{(0)}$ یک برآورد اولیه برای μ_i است. این برآورد اولیه حتی می‌تواند یک حدس باشد. شروع $\mu_i^{(0)}=y_i$ را می‌تواند توصیه نمود. سپس $\eta_i^{(0)}=g(\mu_i^{(0)})$ را محاسبه کنید.

۲) در تکرار t ام، با فرض معلوم بودن $\mu_i^{(t)}$ و $\eta_i^{(t)}$ها متغیر پاسخ تعدیل یافته، یعنی

$$z_i^{(t)}=\eta_i^{(t)}+(y_i-\mu_i^{(t)})g'(\mu_i^{(t)}) \quad , \quad (i=1,2,\dots,N)$$

و نیز وزن‌های تکرار t ام یعنی

$$d_i^{(t)}=\frac{w_i}{V(\mu_i^{(t)})(g'(\mu_i^{(t)}))^2} \quad , \quad (i=1,2,\dots,N)$$

را محاسبه کنید.

۳) برآورد β در تکرار $(t+1)$ام از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\beta^{(t+1)}=(X'D^tX)^{-1}X'D^{(t)}Z^{(t)}$$

که در آن، $D^{(t)}$ یک ماتریس $N\times N$ قطری با درایه قطر iام آن $d_i^{(t)}$ می‌باشد و $Z^{(t)}$ یک بردار $N\times 1$ با درایه iام آن z_i^t است. اکنون $\eta^{(t+1)}=X\beta^{(t+1)}$ و $\mu^{(t+1)}=g^{-1}(\eta^{(t+1)})$ را محاسبه کنید که در آن $\eta^{(t+1)}$ یک بردار $N\times 1$ است که درایه iام آن $\eta_i^{(t+1)}$ است و $\mu^{(t+1)}$ یک بردار $N\times 1$ با درایه iام $\mu_i^{(t+1)}$ می‌باشد.

٤) اکنون مراحل ۲ و ۳ را آنقدر تکرار کنید که همگرایی حاصل گردد.

روش فوق را روش کمترین توان‌های دوم موزون تکراری (IWLS) می‌نامند.

در عمل ϕ نیز نامعلوم است و باید برآورد شود. اگر β_1 تا β_p معلوم باشند، یک برآوردگر نا اریب برای $\phi=\dfrac{w_iVar(y_i)}{V(\mu_i)}$ عبارت است از،

---

[8] Weighted Least Squares

$$\frac{1}{N}\sum_i \frac{w_i\left(y_i-\mu_i\right)^2}{V(\mu_i)}$$

در صورت نامعلوم بودن βها با توجه به کاهش درجات آزادی ناشی از برآورد β_i ها برآوردگر زیر که یک برآوردگر سازگار برای ϕ است، پیشنهاد می‌گردد (فیرت، ۱۹۹۱).

$$\tilde{\phi}=\frac{1}{N-P}\sum_i \frac{w_i\left(y_i-\mu_i\right)^2}{V(\mu_i)} \qquad (۱۱)$$

برآوردگر اخیر را، برآورد گشتاوری ϕ می‌نامند. برای انجام استنباط آماری راجع به β_j ها توزیع β را باید داشته باشیم. با توجه به اینکه برآوردگر ماکسیمم درستنمایی بردار β یعنی $\hat{\beta}$ مجانباً نرمال با امید ریاضی β و واریانس

$$Var(\beta)=\phi\left(X'WX\right)^{-1} \qquad (۱۲)$$

می‌باشد. اگر به جای ϕ برآورد سازگار آن $\tilde{\phi}$ را قرار دهیم، نظریات لازم برای استنباط راجع به β_j ها تکمیل می‌گردند.

۶. انتخاب مدل

مطالب این بخش به طور عمده از دو مرجع [۱] و [۶] برداشت و تلفیق شده‌اند. برای مثال‌های عددی متعدد به مراجع [۱] و [۴] مراجعه نمایید.

فرض کنید M_F مدل اشباع شده[۹] و M_C مدلی اشباع نشده است. مقصود از مدل اشباع شده مدلی است که تعداد پارامترهای خطی آن برابر N یعنی طول بردار پاسخ است. برای چنین مدلی، مقادیر برازش شده برابر مقادیر مشاهده شده می‌باشند. با فرض معلوم بودن ϕ، آماره منهای دو برابر لگاریتم نسبت درستنمایی برای مقایسه M_C با M_F عبارت است از

$$S(C,F)=2\left[l(y,\phi;y)-l\left(\mu^C,\phi;y\right)\right] \qquad (۱۳)$$

که در آن y و μ^C برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی برای μ به ترتیب تحت مدل‌های M_F و M_C می‌باشند. به طریق مشابه، با این فرض که مدل M_A در مدل M_B آشیانه‌ای[۱۰] است، آماره منهای دو برابر لگاریتم نسبت درستنمایی برای مقایسه M_A و M_B عبارت است از

$$S(A,B)=2\left[l\left(\mu^B,\phi;y\right)-l\left(\mu^A,\phi;y\right)\right] \qquad (۱۴)$$

که در آن μ^B و μ^A برآوردگرهای درستنمایی برای μ به ترتیب تحت مدل‌های M_A و M_B می‌باشند. توجه کنید که مدل M_A را در M_B آشیانه‌ای گویند، هرگاه M_B تمام متغیرهای تبیینی موجود در M_A را دربرداشته، تعداد پارامترهای M_B بیشتر یا مساوی تعداد پارامترهای M_A باشد. در حالت خاص، برابری تعداد پارامترها مدل M_B همان مدل M_A می‌باشد. به سهولت ملاحظه می‌شود که

$$S(A,B)=S(A,F)-S(B,F) \qquad (۱۵)$$

به عنوان مثال، برای پاسخ‌های پواسن داریم،

$$S(C,F)=2\sum_i\left\{y_i Ln\left(y_i/\mu_i^C\right)-\left(y_i-\mu_i^C\right)\right\}$$

که در آن μ_i^C برآورد ماکسیمم درستنمایی برای μ_i تحت الگوی M_C است. به عنوان مثالی دیگر، برای پاسخ‌های نرمال، $y_i \sim N(\mu_i,\phi/w_i)$ داریم

$$S(C,F)=\frac{2}{\phi}\sum_i\left\{w_i\left(y_i-\mu_i^C\right)^2\right\}$$

به طور کلی، برای یک الگوی خطی تعمیم‌یافته، داریم

(۱۶)

$$S(C,F)=\frac{2}{\phi}\sum_i w_i\left\{y_i\left(\theta_i^F-\theta_i^C\right)+b\left(\theta_i^C\right)-b\left(\theta_i^F\right)\right\}$$

که در آن θ_i^F و θ_i^C برآوردگر ماکسیمم درستنمایی برای θ_i به ترتیب تحت الگوی M_F و M_C می‌باشند. کمیت $S(C,F)$ را به شکل $S(C,F)=D(C,F)/\phi$ می‌توان نوشت. به طریق مشابه کمیت $S(A,B)$ را به شکل $S(A,B)=D(A,B)/\phi$ می‌توان نوشت. واضح است که،

$$D(A,B)=D(A,F)-D(B,F) \qquad (۱۷)$$

برای پاسخ‌های پواسون، دو جمله‌ای و نمایی داریم $\phi=1$ و در نتیجه $S(C,F)=D(C,F)$. کمیت $D(C,F)$ را انحراف درستنمایی می‌نامیم و مقصود میزان انحراف درستنمای الگوی M_C از درستنمایی الگوی M_F می‌باشد. اگر فرض نیکویی برازش الگوی M_C درست باشد، $S(C,F)$ به طور مجانبی دارای توزیع خی‌دو با $N-P_C$ درجه آزادی است که در آن P_C تعداد پارامترها (تعداد

---

[۹] Saturated model

[۱۰] Nested

βها)ی مدل M_C می‌باشد. بنابراین، فرض نیکویی برازش M_C در سطح α رد می‌شود و هرگاه مقدار مشاهده شده $S(C,F)$ بزرگ‌تر از نقطه $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد توزیع خی‌دو با $N-P_C$ درجه آزادی باشد. در مواردی که $S(C,F)$ بـه ϕ بستگی دارد، مثل پاسخ‌های نرمال، گاما و گاوسی وارون به جای ϕ برآورد سازگار آن ϕ را می‌توان قرار داد. اکنون برای مقایسه در الگوی آشیانه‌ای M_A و M_B فرض کنید که فرض نیکویی برازش هر دو پذیرفته شده است. برای پاسخ‌ها که به ϕ بستگی ندارند، فرض معنی‌دار نبودن اثرات اضافی بین M_A و M_B در سطح α رد می‌شود، هر گاه مقدار مشاهده شده $S(A,B)$ بزرگتر از نقطه $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد توزیع خی‌دو با P_B-P_A درجه آزادی باشد که در آن P_A و P_B به ترتیب تعداد پارامترها (تعداد βها)ی الگوهای M_A و M_B هستند. برای پاسخ‌هایی که به ϕ بستگی دارند، با قرار دادن برآورد سازگار ϕ از همان قاعده قبلی می‌توان استفاده کرد، اما در این حالت آنچه که در متون آماری مرسوم‌تر به نظر می‌رسد، مقایسه مقدار مشاهده شده $\dfrac{D(A,B)}{\phi(P_A-P_B)}$ با عدد بحرانی مناسب از جدول توزیع F می‌باشد.

مراجع

[1] Baker, R.J. and Nelder, J.A., 1978. *The GLIM System, Generalized Linear Interactive Modeling,* Numerical Algorithms Group, Oxford.

[2] Bedrick, E.J., Christensen R. and Johnson, W., 1996. *A New Perspective on Priors for Generalized Linear Models*, J. Amer. Statist. Assoc. 91,436, pp.1450-60.

[3] Davison, A.C., 1998. *Approximate Conditional Inference in Generalized Linear Models*, J. Roy. Statist. Soc., B, 50, pp.445-61.

[4] Dobson, A.J., 2001. *An Introduction to Generalized Linear Models*, 2nd-ed., CRC Press, U.K.

[5] Fahrmeir, L. and Tutz, G., 1994. *Multivariate Statistical Modeling Based on Generalized Linear Models*, Springer.

[6] Firth, D., 1991. *Generalized Linear Models, In Statistical Theory and Modeling*, Edited by D.B. Hinkley, N. Reid and E.J. Snell. Chapman and Hall.

[7] Francisco, J.A.O., 1981. *On Two Families of Transformations to Additivity For Binary Response Data*, Biometrika, 68, pp.537-63.

[8] Green, P.J. and Silverman, B.W., 1994. *Nonparametric Regression and Generalized Linear Models*, Chapman and Hall, London.

[9]Hastie, T. and Tibshirani, R., 1987. *Generalized additive Models: Some Applications*, J. Amer. Statist. Assoc.82, pp.371-86.

[10] Ibrahim, J.G. and Laud, P.W., 1991. *On Baysian Analysis of Generalized Linear Models Using Jeffrey's Prior*, J.R. Stat. Assoc., 86, pp. 981- 986.

[11]Kotz, S. and Johnson N.L., 1992. Breakthroughs in Statistics: Volume II, Methodology and Distributions, Springer, New York.

[12]McCullagh, P. and Nelder J.A., 1989. Generalized Linear Models, Second ed. Chapman and Hall, London.

[13]McGilchrist, C.A., 1994. Estimation in Generalized Mixed Models, J. Roy. Statist. Soc. 56, pp.61-69.

[14]Nelder, J.A. and Baker, R.J., 1983. Generalized Linear Models, Encyclopedia of Statistical Science, Vol. 3, pp.343-348.

[15]Nelder, J.A. and Wedderbum, R.W.M., 1972. Generalized Linear Models, J.R. statist. Soc. A, 135, pp.370-84.

[16]Pierce, D.A. and Schafer, D.W., 1986. Residuals in Generalized Linear Models, J. Amer. Statist. Assoc. 81, pp.977-86.

[17] Pregibon, D., 1980. Goodness of Link Tests for Generalized Linear Models, J. R. Statist., 29, pp. 15-24.

[18] West, M., Harrison, P.J. and Migon, H.S., 1985. Dynamic Generalized Linear Models and Bayesian Forecasting, (with discuccion). J. Amer. Statist. Assoc. 80, pp.73-97.

[19] Williams, D.A., 1987. Generalized Linear Model Diagnostics Using the Deviance and Single Case Deletions, App. Statist. 36, pp. 181-191.