بازه‌های اطمینان براساس میانگین و دامنه

ناصررضا ارقامی[1] فاطمه یوسف‌زاده[2]

چکیده

گاهی اوقات پیش می‌آید که ما فقط بخشی از اطلاعات نمونه‌ای مشاهده شده رانگاه می‌داریم.دراین گونه موارد تحلیل اطلا عـات موجود از طریـق روشـهای آماری کلاسیک و متداول میسر نیست و بسته به اینکه چه اطلاعاتی ازنمونه‌های مختلف در دست است، شیوه‌های خاص تحلیل مورد نیاز خواهـد بـود. مـا در ایـن مقاله این مسأله را مورد توجه قرار داده‌ایم که بر اساس مقادیر میانگین ، ماکزیمم و مینیمم از تعداد mنمونه تصادفی از یک جامعـه نرمـال هـر یـک بـه حجـم n چگونه می‌توان بازه اطمینان دقیق برای میانگین به دست آورد و این موضوع را دردو حالت m=۱ و $m > ۱$ مورد بررسی قرار داده‌ایم . نتیجه کار تعـدادی جـدول است که به کمک آنها می‌توان به هدف فوق دست یافت. دراین جداول ضریب اطمینان واقعی زمانی که توزیع جامعه نرمال نیست نیز ارائه شده است.

واژه های کلیدی : ماکسیمم نمونه، مینیمم نمونه، چندک، ضریب اطمینان، تقارن، شبیه‌سازی.

۱. حالت $m = ۱$

فـرض کنیـد $X_۱, X_۲,...X_n$ یـک نمونـه تصـادفی از توزیـع $N(\mu,\sigma^۲)$ ($\mu,\sigma^۲$ هـر دو مجـهول) باشـد و مـا فقـط بـه مقـادیر $\bar{x}, \max, \min$ از مشاهدات دسترسی داریم.

قضیه: $t = \dfrac{\bar{x}-\mu}{r}$ که در آن $r = \max - \min$ دامنه نمونه اسـت، یک کمیت محوری متقارن است.

اثبات: فرض کنید $z_i = \dfrac{x_i-\mu}{\sigma}$ ، $i = ۱,۲,...n$. در ایـن صـورت داریم؛

$$r = \sigma \times r_z \qquad \bar{x} = \sigma \times \bar{z} + \mu$$

که $\bar{z}$ و r_z به تر تیب میانگین و دامنه z_i ها هستند. می‌توان نوشت

$$t = \frac{(\sigma \times \bar{z} + \mu) - \mu}{\sigma \times r_z} = \frac{\bar{z}}{r_z}$$

که چون توزیع z_i ها بـه μ و $\sigma^۲$ بستگی ندارنـد، توزیـع t مسـتقل از پارامترهای مجهول می‌باشد.

برای اثبات تقـارن توزیـع t کـافی است ثـابت کنیـم t و t− هم‌توزیـع هستند. فرض کنید

$$(y_i - \mu) = -(x_i - \mu) \qquad i = ۱,۲,...n$$

در این صورت داریم،

$$r_y = r \qquad \bar{y} = -\bar{x} + ۲\mu$$

در نتیجه

$$-t = \frac{-\bar{x}+\mu}{r} = \frac{(\bar{y}-۲\mu)+\mu}{r_y} = \frac{\bar{y}-\mu}{r_y} = t_y$$

---

[1] گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

[2] دانشجوی کارشناسی آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

از طرفی چون (به خاطر تقارن توزیع نرمال حول میانگین جامعه) n_i ها و y_i ها هم‌توزیع‌اند، t_y و t هم‌توزیع می‌باشند. پس t– و t هم‌توزیع هستند.

متأسفانه توزیع این کمیت محوری به صورت بسته به دست نمی‌آید. با این حال می‌توان توزیع آن را به صورت زیر به دست آورد.

می‌دانیم که (زمانی که σ معلوم و μ مجهول است) $T=\bar{x}$ یک آماره بسنده کامل است و در نتیجه از r که یک آماره فرعی است (بنابر قضیه باسو) مستقل می‌باشد. برای اینکه ببینیم r یک آماره فرعی است کافی است توجه کنیم که توزیع u_iها ($u_i = x_i - \mu$ ، $i=1,2,\dots n$) به μ بستگی ندارد و $r = r_u$.

حال اگر F تابع توزیع r باشد، بنابراین (بنابر فصل ٦ نخستین درس احتمال . تألیف: اس _ راس ، ترجمه دکتر آذرنوش ، دکتر بزرگ نیا، دکتر مشکانی و دکتر بیرومند.)

$$F(r) = n\int_{-\infty}^{+\infty}[F(x_{(1)}+r)-F(x_{(1)})]^{n-1} f(x_{(1)})d(x_{(1)})$$

$$F(r) = n\int_{-\infty}^{+\infty}[\Phi(\frac{x_{(1)}+r-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma})]^{n-1} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_{(1)}-\mu)^2}dx_{(1)}$$

و از آنجا که

$$f(r) = \frac{\partial}{\partial r}F(r)$$

داریم

$$f(r) = \frac{n(n-1)}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\Phi(\frac{x_{(1)}+r-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma})]^{n-2} \times e^{-\frac{1}{\sigma^2}[(x_{(1)}-\mu+\frac{r}{2})^2+\frac{r^2}{4}]}dx_{(1)}$$

دانستیم که $\bar{x}, r$ مستقلند. بنابراین،

$$f(r,\bar{x}) = f(r)\times f(\bar{x})$$

$$f(r,\bar{x}) = \frac{n(n-1)}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\Phi(\frac{x_{(1)}+r-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma})]^{n-2} \times e^{-\frac{1}{\sigma^2}[(x_{(1)}-\mu+\frac{r}{2})^2+\frac{r^2}{4}]}dx_{(1)}\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\times e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu)^2}$$

.

با انتخاب $t=\frac{\bar{x}-\mu}{r}, u=\bar{x}$ توزیع مشترک t,u را محاسبه می‌کنیم.

ژاکوبین این تبدیل به صورت زیر به دست می‌آید؛

$$J(\bar{x},r) = \frac{\bar{x}-\mu}{r^2}$$

$$f(t,u) = f(\bar{x},r)\times\frac{r^2}{\bar{x}-\mu} = f(u,\frac{u-\mu}{t})\times\frac{u-\mu}{t^2}$$

حال توزیع کناری t عبارتست از؛

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t,u)du = \frac{n\sqrt{n}(n-1)}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma^3}\times \iint\frac{u-\mu}{t^2}e^{-\frac{1}{\sigma^2}[(x_{(1)}-\mu+\frac{u-\mu}{2t})^2+\frac{(u-\mu)^2}{4t^2}]} \times[\Phi(\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma}+\frac{u-\mu}{t\sigma})-\Phi(\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma})]^{n-2} \times e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(u-\mu)^2}dx_{(1)}du$$

گرچه همانطور که ملاحظه می‌شود توزیع t به صورت بسته حاصل نمی‌شود، می‌توان (با توجه به اینکه توزیع t به μ و σ^2 بستگی ندارد) چندکهای توزیع t را با استفاده از شبیه سازی به دست آورده ودرجهت ساختن بازه اطمینان برای میانگین جامعه به کار برد. جدول (١) چندکهای t برای حجم نمونه ١٠ و ٢٠ را نشان می‌دهد. این مقادیر بوسیله شبیه سازی با تکرار ١٠٠٠٠٠ بار انجام گرفته است.

اگر q_α چندک توزیع t متناظر با $1-\alpha$ باشد با توجه به تقارن توزیع t می‌توان نوشت،

$$p(-q_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{r} < q_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

در نتیجه یک بازه اطمینان $(1-\alpha)100$ درصد برای μ عبارتست از

$$(\bar{x} - q_{\frac{\alpha}{2}} \times r, \bar{x} + q_{\frac{\alpha}{2}} \times r) .$$

جدول ۲ ضریب اطمینان واقعی ومتوسط طول بازه اطمینان ۹۰٪ را برای توزیع‌های مختلف نشان می‌دهد.

۲. حالت $m > 1$

فرض کنید $(\bar{x}_1, \min_1, \max_1), \ldots, (\bar{x}_m, \min_m, \max_m)$ را ازمشاهدات m نمونه تصادفی مستقل nتایی داریم.دراین حالت چندین کمیت محوری می توان تصور کرد .هر کدام را به طورجداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کمیت ۱ :

$$t = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{x}_i - \mu}{r_i}$$

در اینجا نیز مانند قبل ثابت می شود که t یک کمیت محوری است وبه پارامتر جامعه نیز بستگی ندارد. ونیز ثابت می‌شود که توزیع t متقارن است.

با استفاده ازشبیه سازی توزیع نرمال استاندارد برای n,m های مختلف چندکهای توزیع این کمیت را به دست آورده ودر جدول ۳ قرار می‌دهیم.

$$t = \frac{1}{m}\sum \frac{\bar{x}_i - \mu}{r_i} = \frac{1}{m}\sum \frac{\bar{x}_i}{r_i} - \mu \times \frac{1}{m}\sum \frac{1}{r_i}$$

$$t = A - \mu \times B$$

$$p(-q_{\frac{\alpha}{2}} < A - \mu \times B < q_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

بازه اطمینان $(1-\alpha)100$ درصد برای μ عبارتست از

$$.(\frac{A - q_{\frac{\alpha}{2}}}{B}, \frac{A + q_{\frac{\alpha}{2}}}{B})$$

جدول ٤ ضریب اطمینان واقعی ومتوسط طول بازه اطمینان ۹۰٪ را نشان می‌دهد.

کمیت ۲ :

$$t = \frac{\bar{\bar{x}} - \mu}{\bar{r}}$$

به سادگی ثابت می‌شود که t یک کمیت محوری ومتقارن است.

چندکهای توزیع این کمیت در جدول ٥ ارائه شده است.

$$p(-q_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{\bar{x}} - \mu}{\bar{r}} < q_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

بازه اطمینان $(1-\alpha)100$ درصد برای μ عبارتست از،

$$(\bar{\bar{x}} - q_{\frac{\alpha}{2}} \times \bar{r}, \bar{\bar{x}} + q_{\frac{\alpha}{2}} \times \bar{r})$$

در جدول ٦ ضرایب اطمینان واقعی ومتوسط طول بازه اطمینان برای توزیع‌های مختلف به دست آمده است.

کمیت ۳ :

$$t = \frac{\bar{\bar{x}} - \mu}{R} \quad , \quad R = Max - Min$$

در این کمیت Max ماکزیمم تمام نمونه ها و Min مینیمم تمام نمونه‌ها است. چندکهای این کمیت به صورت جدول ۷ است.

بازه اطمینان به صورت زیر به دست می‌آید؛

$$p(-q_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{\bar{x}} - \mu}{R} < q_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha .$$

بازه اطمینان $(1-\alpha)100$ درصد برای μ عبارتست از

$$s(\bar{\bar{x}} - q_{\frac{\alpha}{2}} \times R, \bar{\bar{x}} + q_{\frac{\alpha}{2}} \times R) .$$

جدول ضرایب اطمینان واقعی ومتوسط طول بازه اطمینان ۹۰٪ به صورت جدول ۸ خواهد بود.

کمیت ٤ :

$$t = \frac{\bar{\bar{x}} - \mu}{med} \quad , \quad med = \text{میانه } r_i \text{ ها}$$

چندکهای t با استفاده از توزیع نرمال استاندارد به صورت جدول ۹ به دست آمده است؛

$$p(-q_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{\bar{x}} - \mu}{Med} < q_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

بازه اطمینان $(1-\alpha)100$ درصد برای μ عبارتست از،

$$(\bar{\bar{x}} - q_{\frac{\alpha}{۲}} \times Med, \bar{\bar{x}} + q_{\frac{\alpha}{۲}} \times Med).$$

جدول ۱۰ ضرایب اطمینان واقعی ومتوسط طول بازه اطمینان ۹۰٪ را نشان می‌دهد.

کمیت ۵:

$$t = \frac{\bar{\bar{x}} - \mu}{Med(\max) - Med(\min)}$$

چندکهای t در جدول ۱۱ آمده است؛

$$p(-q_{\frac{\alpha}{۲}} < \frac{\bar{\bar{x}} - \mu}{Med(\max) - Med(\min)} < q_{\frac{\alpha}{۲}}) = ۱ - \alpha$$

بازه اطمینان $(۱-\alpha)$۱۰۰ درصد برای μ عبارتست از،

$$(\bar{\bar{x}} - (Med(\max) - Med(\min)) \times q_{\frac{\alpha}{۲}},$$
$$\bar{\bar{x}} + (Med(\max) - Med(\min)) \times q_{\frac{\alpha}{۲}})$$

جدول ضرایب اطمینان واقعی ومتوسط طول بازه اطمینان ۹۰٪ برای توزیع‌های مختلف در جدول ۱۲ آمده است.

۳. نتیجه‌گیری

با توجه به جداول بالا به نظر می رسد ضریب اطمینان وا قعی برای توزیع‌های متقارن بیش از توزیع هایی است که دارای چولگی هستند. همچنین برای توزیع‌های متقارن که درآنها دم توزیع ضخیمتر از نرمال است ضریب اطمینان واقعی بیش از نرمال است. حتی برای توزیع‌های نامتقارن زمانی که m,n بزرگ باشد. ضریب اطمینان بیش از ضریب اطمینان اسمی خواهد بود.

جدول ۱

n \ $۱-\alpha$	۰/۰۰۵	۰/۰۱	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۱
۱۰	۰/۳۳	۰/۲۹۵	۰/۲۳	۰/۱۸۵	۰/۱۳۸
۲۰	۰/۱۷۵	۰/۱۵۵	۰/۱۲۶	۰/۱۰۴	۰/۰۷۸

جدول ۲

n		$N(۰,۱)$	$E(۱)$	$\chi^۲_{(۱)}$	$U(۰,۱)$	$Lo(۰,۱)$	$L(۰,۱)$	$C(۰,۱)$
۱۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۸۴	۰/۸۴	۰/۸۸	۰/۹۰	۰/۹۱	۰/۹۴
۱۰	Average Length	۱/۱۳۹	۱/۰۴۶	۱/۰۴۶	۰/۳۰۳	۲/۰۹۰	۱/۶۵۴	۳۵/۶۶۳
۲۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۸۶	۰/۸۶	۰/۸۵	۰/۹۱	۰/۹۲	۰/۹۶
۲۰	Average Length	۰/۷۷۷	۰/۷۳۷	۰/۷۳۷	۰/۱۸۸	۱/۴۷۷	۱/۲۰۶	۴۶/۱۱۹

جدول ۳

m	n	$1-\alpha$	۰/۰۰۵	۰/۰۱	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۱
۵	۱۰		۰/۱۳۹	۰/۱۳۰	۰/۱۰۲	۰/۰۸۵	۰/۰۶۶
	۲۰		۰/۰۷۶	۰/۰۶۷	۰/۰۵۶۵	۰/۰۴۷۷	۰/۰۳۶۷
۱۰	۱۰		۰/۱۰۰	۰/۰۸۸	۰/۰۷۴۷	۰/۰۶۲۵	۰/۰۴۸
	۲۰		۰/۰۶۷	۰/۰۶۱	۰/۰۵۲	۰/۰۴۱۹	۰/۰۳۲

جدول ٤

m	n		$N(0,1)$	$E(1)$	$\chi^2_{(1)}$	$U(0,1)$	$Lo(0,1)$	$L(0,1)$	$C(0,1)$
۵	۱۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۷۶	۰/۷۴	۰/۸۹	۰/۹۲	۰/۹۳	۰/۹۴
۵	۱۰	Average Length	۰/۴۹۴	۰/۴۱۶	۰/۴۱۷	۰/۱۳۷	۰/۸۸۷	۰/۶۷۹	۱/۹۷۸
۵	۲۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۸۳	۰/۸۰	۰/۸۸	۰/۹۳	۰/۹۳	۰/۹۶
۵	۲۰	Average Length	۰/۳۴۵	۰/۳۰۸	۰/۳۰۸	۰/۰۹۳	۰/۶۴۳	۰/۵۱۸	۲/۲۲۰
۱۰	۱۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۶۹	۰/۶۵	۰/۹۱	۰/۹۳	۰/۹۱	۰/۹۵
۱۰	۱۰	Average Length	۰/۳۶۱	۰/۳۰۰	۰/۳۰۱	۰/۱۰۰	۰/۶۴۵	۰/۴۸۹	۱/۳۳۰
۱۰	۲۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۸۸	۰/۸۲	۰/۹۷	۰/۹۸	۰/۹۹	۰/۹۹
۱۰	۲۰	Average Length	۰/۳۰۱	۰/۲۶۸	۰/۲۶۸	۰/۰۴۷	۰/۵۵۶	۰/۴۴۶	۱/۷۷۴

جدول ۷

m	n	$1-\alpha$	۰/۰۰۵	۰/۰۱	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۱
۵	۱۰		−۰/۰۹	−۰/۰۸	−۰/۰۶۵	−۰/۰۵۴	−۰/۰۴۲
	۲۰		−۰/۰۵۷	−۰/۰۴۹۵	−۰/۰۴۱	−۰/۰۳۴	−۰/۰۲۵۷
۱۰	۱۰		−۰/۰۵۶	−۰/۰۵۱	−۰/۰۴۲	−۰/۰۳۵	−۰/۰۲۷
	۲۰		−۰/۰۴۹	−۰/۰۴۲	−۰/۰۳۶	−۰/۰۲۹	−۰/۰۲۲

جدول ۸

m	n		$N(0,1)$	$E(1)$	$\chi^2_{(1)}$	$U(0,1)$	$Lo(0,1)$	$L(0,1)$	$C(0,1)$
۵	۱۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۸۹	۰/۸۷	۰/۸۰	۰/۹۳	۰/۹۵	۰/۹۹
۵	۱۰	Average Length	۰/۴۸۵	۰/۴۸۴	۰/۴۸۴	۰/۱۰۴	۰/۹۶۹	۰/۸۲۴	۲۶/۳۰۹
۵	۲۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۹۱	۰/۸۶	۰/۷۴	۰/۹۳	۰/۹۵	۰/۹۹
۵	۲۰	Average Length	۰/۳۴۰	۰/۳۵۳	۰/۳۵۳	۰/۰۶۷	۰/۷۰۴	۰/۶۱۱	۴۷/۰۰۲
۱۰	۱۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۹۲	۰/۹۳	۰/۷۹	۰/۹۵	۰/۹۷	۰/۹۹۸
۱۰	۱۰	Average Length	۰/۳۵۱	۰/۳۶۳	۰/۳۶۳	۰/۰۶۴	۰/۷۲۵	۰/۶۳۱	۵۵/۶۳۶
۱۰	۲۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۹۸	۰/۹۵	۰/۹۰	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۱
۱۰	۲۰	Average Length	۰/۳۰۳	۰/۳۴۰	۰/۳۴۰	۰/۰۴۳	۰/۶۸۲	۰/۵۹۱	۸۷/۲۱۹

جدول ۹

m	n	$۱-\alpha$	۰/۰۰۵	۰/۰۱	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۰۱
۵	۱۰		-۰/۱۴	-۰/۱۱۸	-۰/۰۹۵۵	-۰/۰۸	-۰/۰۶۲
	۲۰		-۰/۰۷۶	-۰/۰۶۷	-۰/۰۵۵	-۰/۰۴۶	-۰/۰۳۵
۱۰	۱۰		-۰/۰۹	-۰/۰۸۳	-۰/۰۷	-۰/۰۵۷۵	-۰/۰۴۴
	۲۰		-۰/۰۶۹	-۰/۰۵۹	-۰/۰۴۹	-۰/۰۴۰	-۰/۰۳

جدول ۱۰

m	n		$N(۰,۱)$	$E(۱)$	$\chi^{۲}_{(۱)}$	$U(۰,۱)$	$Lo(۰,۱)$	$L(۰,۱)$	$C(۰,۱)$
۵	۱۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۸۶	۰/۸۶	۰/۹۰	۰/۹۲	۰/۹۲	۰/۵۳
۵	۱۰	Average Length	۰/۴۸۵	۰/۴۲۵	۰/۴۲۵	۰/۱۳۳	۰/۸۷۸	۰/۶۸۷	۲/۵۹۸
۵	۲۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۸۷	۰/۸۰	۰/۸۵	۰/۹۲	۰/۹۲	۰/۵۷
۵	۲۰	Average Length	۰/۳۴۳	۰/۳۱۴	۰/۳۱۴	۰/۰۹۶	۰/۶۴۴	۰/۵۲۲	۲/۸۲۹
۱۰	۱۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۸۸	۰/۸۵	۰/۹۲	۰/۹۲	۰/۹۳	۰/۴۱
۱۰	۱۰	Average Length	۰/۳۵۰	۰/۳۰۳	۰/۳۰۵	۰/۰۹۶	۰/۶۳۰	۰/۴۸۹	۱/۶۶۰
۱۰	۲۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۹۲	۰/۹۱	۰/۹۷	۰/۹۸	۰/۹۷	۰/۵۲
۱۰	۲۰	Average Length	۰/۳۰۰	۰/۲۶۹	۰/۲۶۹	۰/۰۷۳	۰/۵۵۲	۰/۴۴۸	۲/۳۲۵

جدول ۱۱

m	n	$1-\alpha$	۰/۰۰۵	۰/۰۱	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۱
۵	۱۰		-۰/۱۳	-۰/۱۲	-۰/۰۹۹	-۰/۰۸۰	-۰/۰۶۲۳
	۲۰		-۰/۰۷۸	-۰/۰۷	-۰/۰۵۶	-۰/۰۴۶	-۰/۰۳۵۴
۱۰	۱۰		-۰/۰۹	-۰/۰۸۳	-۰/۰۶۸	-۰/۰۵۷	-۰/۰۴۵
	۲۰		-۰/۰۶۸	-۰/۰۵۹	-۰/۰۵۱	-۰/۰۴۱	-۰/۰۳۰۷

جدول ۱۲

m	n		$N(0,1)$	$E(1)$	$\chi^2_{(1)}$	$U(0,1)$	$Lo(0,1)$	$L(0,1)$	$C(0,1)$
۵	۱۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۸۶	۰/۸۶	۰/۹۲	۰/۹۱	۰/۹۰	۰/۴۵
۵	۱۰	Average Length	۰/۴۸۳	۰/۴۲۹	۰/۴۳۰	۰/۱۳۶	۰/۸۶۱	۰/۶۶۲	۱/۹۷۰
۵	۲۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۸۷	۰/۸۴	۰/۸۹	۰/۹۲	۰/۹۴	۰/۵۰
۵	۲۰	Average Length	۰/۳۳۸	۰/۳۱۲	۰/۳۱۲	۰/۰۸۵	۰/۶۲۵	۰/۵۰۵	۲/۲۸۱
۱۰	۱۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۸۹	۰/۸۲	۰/۹۲	۰/۹۱	۰/۸۹	۰/۳۳
۱۰	۱۰	Average Length	۰/۳۴۴	۰/۳۰۳	۰/۳۰۳	۰/۰۹۵	۰/۶۱۸	۰/۴۸۴	۱/۲۳۲
۱۰	۲۰	Real Confidence Coefficient	۰/۹۰	۰/۹۵	۰/۹۳	۰/۹۷	۰/۹۸	۰/۹۷	۰/۴۳
۱۰	۲۰	Average Length	۰/۳۰۰	۰/۲۷۷	۰/۲۷۷	۰/۰۴۲	۰/۵۴۰	۰/۴۳۴	۱/۷۳۱

مراجع

[۱] پارسیان، احمد، مبانی آمار ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۸.

[۲] راس، شلدون ام.، شبیه‌سازی، ترجمه دکتر حسنعلی آذرنوش، دکتر حسینعلی نیرومند، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۷۸.

[۳] راس، شلدون ام.، نخستین درس در احتمال، ترجمه دکتر حسنعلی آذرنوش، دکتر ابوالقاسم بزرگنیا، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۷۶.

[٤] مود، الکساندر ام.، گریبیل، فرانکلین آ. و بوز، دون اس.، مقدمه‌ای بر نظریه آمار، ترجمه دکتر علی مشکانی، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۷۷.