

رگرسیون حداقل مربعات فازی

سعید اخلاقی^۱ حسین تقی زاده کاخکی^۲ ناصر رضا ارقامی^۳

چکیده

در این مقاله پس از ذکر مفاهیم و نتایج اولیه نظریه فازی به کاربرد این نظریه در رگرسیون پرداخته و روش مینیمم مربعات را در رگرسیون فازی بر مبنای تعاریف مختلف برای باقیمانده (فاصله دو عدد فازی) بیان کرده و نحوه حل رگرسیون فازی را با استفاده از نرم افزار لینگو از طریق چند مثال توضیح می دهیم.

واژه های کلیدی: رگرسیون فازی، فاصله اعداد فازی، نرم افزار لینگو.

۱. مقدمه

نظریه مجموعه های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پرفسور لطفی عسگرزاده ابداع شد. این نظریه از زمان ارایه تاکنون، گسترش و تعمق زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه های مختلف پیدا کرده است که البته مباحث آماری نیز از این قاعده مستثنی نیستند. یکی از مباحث آماری که مورد توجه علاقه مندان به نظریه مجموعه های فازی قرار گرفته رگرسیون می باشد. از رگرسیون جهت ارایه یک مدل بین یک سری از متغیرها و پیش بینی مقادیر یک متغیر، که متغیر وابسته نامیده می شود، به وسیله سایر متغیرها، که متغیرهای مستقل نامیده می شوند، استفاده می شود. یک مدل رگرسیون معمولی شامل چهار جزء متغیرهای مستقل، متغیر وابسته، پارامترها و جمله خطاست که همگی کمیتهای عددی دقیق هستند. در رگرسیون معمولی فرض بر این است که تفاوت بین مقادیر مشاهده شده و برآورد شده ناشی از تغییرات تصادفی باشد. بنابراین در آنالیز رگرسیون معمولی از روشهای آماری جهت برآورد پارامترهای مدل و استنتاج استفاده می شود. اما برخی مواقع، خطاها به دلیل ابهام در مشاهدات یا در ساختار مدل می باشد. در این گونه از

موارد عدم قطعیت ناشی از فازی بودن است و نه تصادفی بودن. به همین دلیل است که به آنالیز رگرسیون فازی احتیاج داریم.

۲. تعاریف و مفاهیم

تعریف ۱: فرض کنید X مجموعه ای ناتهی باشد. هر زیرمجموعه فازی از X توسط یک تابع $[0, 1]$ $A: X \rightarrow [0, 1]$ به نام تابع عضویت مشخص می شود که در آن برای هر x در X مقدار $A(x)$ میزان عضویت x در آن زیرمجموعه فازی را نشان می دهد [۴].

تعریف ۲: مجموعه تمام زیرمجموعه های فازی X را با $F(X)$ نشان می دهیم.

تعریف ۳: اگر $A \in F(X)$ ، آنگاه

$$A_\omega = \{x \in \mathfrak{R} \mid A(x) > \omega\}$$

$$A_\omega = \{x \in \mathfrak{R} \mid A(x) \geq \omega\} \quad \omega \in [0, 1]$$

را به ترتیب مجموعه تراز ضعیف ω و مجموعه تراز قوی ω ، وابسته به مجموعه فازی A می نامیم [۴]. (شکل ۱-۱ را ببینید.)

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲ گروه ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۳ گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تعریف ۱۱ (اصل گسترش): فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ f آنگاه تابع f یک تابع جدید که مجدداً آن را با f نشان می‌دهیم به صورت زیر القا می‌کند،

$$f: F(X) \rightarrow F(Y)$$

$$A \rightarrow f(A)$$

که در آن

$$f(A)(y) = \begin{cases} \sup_{x: f(x)=y} A(x) & f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases}$$

توسیع فازی f نامیده می‌شود [۴].

مثال ۱: فرض کنید $A = (2, 1, 1)_T$ و $f(x) = x/2$ آنگاه طبق اصل گسترش $B = f(A) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_T$ می‌باشد. عملیات انجام شده را از روی شکل ۱-۲ بهتر می‌توان دید.

تعریف ۱۲: مجموعه‌های فازی $A_i \in F(X_i) \quad i = 1, \dots, n$ را در نظر بگیرید. مجموعه فازی $A_1 \times \dots \times A_n \in F(X_1 \times \dots \times X_n)$ حاصل ضرب مجموعه‌های فازی A_1, \dots, A_n می‌نامیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$A_1 \times \dots \times A_n(x_1, \dots, x_n) = \min(A_1(x_1), \dots, A_n(x_n))$$

تعریف ۱۳ (تعمیم اصل گسترش): تابع f را به صورت،

$$f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$$

در نظر بگیرید. تابع جدیدی که آن را نیز با f نشان می‌دهیم به صورت زیر القا می‌کند،

$$f: F(X_1) \times F(X_2) \times \dots \times F(X_n) \rightarrow F(Y)$$

$$(A_1, A_2, \dots, A_n) \rightarrow f(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

که در آن

$$f(A_1, \dots, A_n)(y) =$$

$$\begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_n): f(x_1, \dots, x_n)=y} A_1 \times \dots \times A_n(x_1, \dots, x_n) & , f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ 0 & , f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases}$$

تعریف ۴: مجموعه فازی $X \in F(\mathbb{R})$ را محدب گوئیم، اگر مجموعه‌های تراز ω وابسته به مجموعه فازی X ، به ازای هر $\omega \in [0, 1]$ ، محدب باشند.

تعریف ۵: $X \in F(\mathbb{R})$ را یک عدد فازی (حقیقی) گوئیم، اگر

(۱) X تک‌نمایی باشد. یعنی دقیقاً یک x_0 وجود داشته باشد به

$$X(x_0) = 1$$

(۲) X قطعه به قطعه پیوسته باشد.

تعریف ۶: اگر عدد فازی $X \in F(\mathbb{R})$ دارای تابع عضویتی به صورت زیر باشد،

$$X(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}) & x \leq m \\ R(\frac{x-m}{\alpha}) & x > m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیر صعودی از \mathbb{R}^+ به $[0, 1]$ و $L(0) = R(0) = 1$ ؛ آنگاه X را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $X = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. که در آن m را مقدار نمایی و α و β را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست عدد فازی X می‌نامیم و L و R توابع مرجع نامیده می‌شوند.

تعریف ۷: اگر $X = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $L=R$ باشد، X را یک عدد فازی L نامیده و با نماد $X = (m, \alpha, \beta)_L$ نشان می‌دهیم [۳].

تعریف ۸: فرض کنید $X = (m, \alpha, \beta)_L$ ، آنگاه X را یک عدد فازی مثلثی نامیم؛ اگر

$$L(x) = \begin{cases} 1-x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{سایر جاها،} \end{cases}$$

باشد.

تعریف ۹: $F_T(\mathbb{R})$ عبارت است از مجموعه کلیه اعداد فازی مثلثی روی اعداد حقیقی.

تعریف ۱۰: عدد فازی $X = (m, \alpha, \alpha)_L$ را یک عدد فازی متقارن نامیده و با نماد $X = (m, \alpha)_L$ نشان می‌دهیم [۳].

اکنون این سؤال را مطرح می‌کنیم که چگونه تابعی از یک عدد فازی را می‌توانیم محاسبه کنیم؟ به طور مثال اگر $A = (2, 1, 1)_T$ ، که نشانگر مفهوم تقریباً ۲ است، و $f(x) = x/2$ ، $f(A)$ را چگونه می‌توانیم محاسبه کنیم؟ تعریف ۱۱ پاسخی به این سؤال می‌باشد.

چنین نیست و علت آن اینست که روش خوشه‌چینی بر پایه تابع هدف، که از مهمترین روشها برای خوشه‌چینی فازی و کنترل نقاط پرت است، فقط در مورد روش حداقل مربعات رگرسیون فازی، آنهم به دلیل وجود تابع هدف در این روش، قابل اجراست ([۱۳] و [۱۵]).

معمولاً در آنالیز رگرسیون خطی فازی از دو روش زیر جهت برآورد پارامترها استفاده می‌شود؛

□ روش بر پایه حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی (روش تاناکا و دیگران [۱۰])

□ روش حداقل مربعات فازی.

نخستین مقالات نوشته شده در زمینه رگرسیون خطی فازی، از روش [۱۰] جهت برآورد پارامترهای مدل رگرسیون خطی فازی (FLR) استفاده کردند که بر حسب اینکه متغیر وابسته ترد و یا فازی باشد و با در نظر گرفتن یک معیار مناسب برای اندازه‌گیری میزان نزدیکی دو عدد فازی و همچنین مشخص کردن یک نقطه شروع و سرانجام حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی، مدل FLR موردنظر بدست می‌آید. اما روش [۱۰] دو عیب دارد؛

- حل مسأله برنامه‌ریزی خطی به منظور دستیابی به مدل موردنظر بسیار پیچیده است، به این دلیل که با اضافه شده یک مشاهده به تعداد مشاهدات، دو نامعادله به مسأله اضافه خواهد شد.

- در روش حداقل مربعات رگرسیون معمولی ضرایب را طوری برآورد می‌کنیم که مجموع مربعات خطا مینیمم شود. حال آنکه در روش [۱۰]، علی‌رغم مقایسه‌هایی که بین این روش و روش رگرسیون حداقل مربعات معمولی انجام می‌پذیرد، اندازه خطاها به منظور دستیابی به بهترین برازش، مدنظر قرار نمی‌گیرد. در روش حداقل مربعات پارامترها را طوری برآورد می‌کنیم که مجموع مربعات مینیمم گردد، در حالی که در روش [۱۰] چنان پارامترها را برآورد می‌کنیم که اختلاف بین مقادیر برآوردشده و مشاهدات از یک مقدار مشخص بیشتر نباشد ([۱] و [۲]).

به منظور رفع معایب فوق، دایموند رگرسیون حداقل مربعات فازی را، که قابل مقایسه با رگرسیون حداقل مربعات معمولی است، بر مبنای یک فاصله $F_{LR}(\mathcal{R})$ که عبارت است از،

(۱)

یکی از کاربردهای تعمیم اصل گسترش عبارتست از توسیع اعمال دوتایی روی یک مجموعه، به اعمال دوتایی روی زیرمجموعه‌های فازی آن مجموعه.

به طور مثال، فرض کنید $M, N \in F_{LR}(\mathcal{R})$ باشند به طوری که $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $N = (n, \gamma, \delta)_{LR}$ باشد. در این صورت طبق اصل گسترش و تعمیم آن،

$$M \oplus N = (m + n, \alpha + \gamma, \beta + \delta)_{LR} \quad (۱)$$

$$\forall \lambda > 0, \lambda M = (\lambda m, \lambda \alpha, \lambda \beta)_{LR} \quad (۲)$$

$$\forall \lambda < 0, \lambda M = (\lambda m, -\lambda \alpha, -\lambda \beta)_{LR}$$

۳. آنالیز رگرسیون خطی فازی

یک مدل رگرسیون فازی شامل سه جزء، متغیرهای مستقل (ورودی)، متغیر وابسته (خروجی) و پارامترهاست که بر حسب نیاز یک، دو و یا هر سه جزء را می‌توان فازی در نظر گرفت. بنابراین هفت نوع مدل رگرسیونی فازی متفاوت وجود دارد که هر کدام کاربردهای خاص خودشان را دارند.

بحث و بررسی در زمینه رگرسیون فازی از اوایل دهه هشتاد آغاز شد. اولین و ساده‌ترین نوع رگرسیون فازی در سال ۱۹۸۲ توسط یاگر [۱۲]، که مبنای آن استفاده از اصل گسترش بود، ابداع شد. سپس تاناکا و دیگران [۱۰] مدل رگرسیونی فازی را ارایه کردند که برآورد پارامترها در راستای حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی بود. ابداع‌کنندگان روش اخیر تلاشهای بسیاری داشتند تا اینکه بتوانند بین روش خود و روش حداقل مربعات در رگرسیون معمولی تشابهاتی بیابند و آن را به عنوان جایگزینی مناسب برای روش حداقل مربعات در حیطه مجموعه‌های فازی معرفی کنند. اما واقعیت این است که به دلایلی که بعداً ذکر خواهد شد نمی‌توان روش تاناکا و دیگران [۱۰] را روشی متناظر با روش حداقل مربعات رگرسیون معمولی دانست.

در سال ۱۹۸۸، دایموند [۳] روشی پیشنهاد می‌کند که خود آن را روش حداقل مربعات فازی می‌نامد، و می‌توان آن را جایگزینی مناسب برای روش حداقل مربعات رگرسیون معمولی دانست. روش دایموند مزیت‌های فراوانی نسبت به روش تاناکا و دیگران [۱۰] دارد. از جمله اینکه می‌توان بر پایه روش دایموند، مدلی تنومند، مدلی که نسبت به نقاط پرت حساس نباشد، بدست آورد. در حالی که در روش [۱۰]

شده، این است که، برای عدد فازی $i = 0, \dots, k$

$$A_i = (m_{ai}, \alpha_{ai}, \beta_{ai})_{LR}$$

(۱) اگر $\hat{\alpha}_{ai} < 0, \hat{\beta}_{ai} < 0$ آنگاه $\hat{A}_i = (\hat{m}_{ai}, -\hat{\alpha}_{ai}, -\hat{\beta}_{ai})_{LR}$

(۲) اگر $\hat{\alpha}_{ai} < 0, \hat{\beta}_{ai} > 0$ و $|\hat{\beta}_{ai}| > |\hat{\alpha}_{ai}|$ آنگاه

$\hat{A}_i = (\hat{m}_{ai}, 0, \hat{\beta}_{ai})_{LR}$ و اگر $|\hat{\beta}_{ai}| < |\hat{\alpha}_{ai}|$ آنگاه
 $\hat{A}_i = (\hat{m}_{ai}, 0, -\hat{\alpha}_{ai})_{LR}$

(۳) اگر $\hat{\alpha}_{ai} > 0, \hat{\beta}_{ai} < 0$ و $|\hat{\beta}_{ai}| < |\hat{\alpha}_{ai}|$ آنگاه

و اگر $|\hat{\beta}_{ai}| > |\hat{\alpha}_{ai}|$ آنگاه $\hat{A}_i = (\hat{m}_{ai}, \hat{\alpha}_{ai}, 0)_{LR}$
 $\hat{A}_i = (\hat{m}_{ai}, -\hat{\beta}_{ai}, 0)_{LR}$

اما نادیده گرفتن شرایط غیرمنفی بودن پهنای پارامترها الزامات جوابهای بهینه برای مسأله را بدست نخواهد داد. به عنوان مثال، مسأله زیر را از [۸] در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2 + x_1 x_2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

که مینیمم مطلق آن در $x_1 = \frac{1}{2}$ و $x_2 = 0$ می باشد. اما در این نقطه

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 1 + x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 + x_1 = \frac{3}{2} \neq 0 \end{cases}$$

در واقع مسأله های (۳) و (۴)، مسأله های غیرخطی با محدودیت های غیرمنفی بودن پهنای پارامترهاست. برای حل این مسایل می توان شرایط کاروش-کوهن-تاكر (KKT) را نوشت و سپس با حل دستگاه معادلات بدست آمده جوابهای مربوطه را محاسبه کرد. حل اینگونه مسایل وقتی که تعداد محدودیتها زیاد است با بررسی حالات مختلف (فعال بودن یا نبودن محدودیتها) بسیار مشکل است. به همین جهت از الگوریتمهای مختلفی که در بسته های کامپیوتری از آنها استفاده می شود، می توان بهره جست. یکی از بسته های کامپیوتری متداول جهت حل اینگونه مسایل بسته نرم افزاری LINGO است، که در ضمیمه ۱، با آن آشنا خواهیم شد.

$$d^x(X, Y) = (m_x - m_y)^2 + ((m_x - a_x) - (m_y - a_y))^2 + ((m_x + \beta_x) - (m_y + \beta_y))^2$$

که در آن $X = (m_x, \alpha_x, \beta_x)_{LR}$ و $Y = (m_y, \alpha_y, \beta_y)_{LR}$ معرفی می کند و با استفاده از فاصله فوق سه مدل FLR به صورت زیر در نظر می گیرد.

۱. فقط ورودی و خروجی فازی است. $(Y, X_i \in F_{LR}(\mathfrak{R}))$

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + \dots + a_k X_k \quad a_i \in \mathfrak{R}, (M_1)$$

۲. ورودی و خروجی و عرض از مبدأ فازی است.

$$Y = A_0 + a_1 X_1 + \dots + a_k X_k \quad a_i \in \mathfrak{R}, (M_2)$$

$$A_0, Y, X_i \in F_{LR}(\mathfrak{R})$$

۳. ورودی ترد، خروجی و پارامترها فازی است.

$$Y = A_0 + A_1 x_1 + \dots + A_k x_k \quad x_i \in \mathfrak{R}, (M_3)$$

$$A_i, Y \in F_{LR}(\mathfrak{R})$$

که در روابط فوق

$$a_i, x_i \in \mathfrak{R}, \quad X_i = (m_{x_i}, \alpha_{x_i}, \beta_{x_i})_{LR}, \quad i = 0, \dots, k$$

$$Y = (m_y, \alpha_y, \beta_y)_{LR}, \quad A_i = (m_{a_i}, \alpha_{a_i}, \beta_{a_i})_{LR}$$

مسأله برآورد پارامترها برای مدل های (M_1) ، (M_2) و (M_3) به ترتیب عبارتند از، تعیین ضرایب به نحوی که J_1 ، J_2 و J_3 مینیمم شود و $\alpha_{a_i} \geq 0$ و $\beta_{a_i} \geq 0$ ، $i = 1, \dots, k$

$$J_1(a_0, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n d^x(Y_i, a_0 + a_1 X_{1i} + \dots + a_k X_{ki}) \quad (2)$$

$$J_2(A_0, a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n d^x(Y_i, A_0 + a_1 X_{1i} + \dots + a_k X_{ki}) \quad (3)$$

$$J_3(A_0, \dots, A_k) = \sum_{i=1}^n d^x(Y_i, A_0 + A_1 X_{1i} + \dots + A_k X_{ki}) \quad (4)$$

مسأله J_1 یک مسأله برنامه ریزی غیرخطی نامقید و مسایل J_2 و J_3 ، مسایل غیرخطی مقید هستند. در [۱۴] برای مینیمم سازی توابع هدف J_2 و J_3 محدودیت های $\alpha_{a_i} \geq 0$ ، $\beta_{a_i} \geq 0$ ، $i = 1, \dots, k$ برای سهولت، در نظر گرفته نشده اند و در واقع با نوشتن شرایط لازم برای مسأله بدون قید، و حل سیستم معادلات ناشی از آن مسأله حل شده است. اما در صورت منفی بودن این مقادیر راه حلی که در [۱۴] پیشنهاد

اما برای مینیم کردن کمیتهای J_1 ، J_2 و J_3 ابتدا لازم است فاصله بین دو عدد فازی تعریف شود. به غیر از فاصله d^r ، که توسط خود دایموند مورد استفاده قرار گرفته است و شرح آن گذشت، دو تعریف دیگر نیز می توان روی فضای $F_{LR}(\mathfrak{R})$ برای فاصله بین دو عدد فازی در نظر گرفت. این فاصله ها که در ینگ و کو [۱۴] و ینگ و لین [۱۵] مورد استفاده قرار گرفته اند؛ عبارتند از،

$$Y_j = a_0 + a_1 X_j \quad j = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$Y_j = A_0 + A_1 X_j \quad j = 1, \dots, n \quad (8)$$

$$Y_j = A_0 + A_1 X_j \quad j = 1, \dots, n \quad (9)$$

که روابط فوق

$$a_0, a_1, x_j \in \mathfrak{R} \quad , \quad X_j = (m_{x_j}, \alpha_{x_j}, \beta_{x_j})_T$$

$$A_0 = (m_{a_0}, \alpha_{a_0}, \beta_{a_0})_T \quad , \quad Y_j = (m_{y_j}, \alpha_{y_j}, \beta_{y_j})_T$$

$$. \quad A_1 = (m_{a_1}, \alpha_{a_1}, \beta_{a_1})_T$$

اکنون قصد داریم برای مدل های فوق، از داده هایی که در [۱۴] آمده اند استفاده کنیم و نتایجی را که بدست خواهیم آورد با نتایج بدست آمده در [۱۴] مورد مقایسه قرار دهیم. لازم به ذکر است که از فاصله D^r برای مدل های (۷)، (۸)، و (۹) فقط در این مقاله استفاده شده است.

تعریف ۱۴ (باقیمانده): معیاری که معمولاً برای مقایسه مدلها و میزان برآزش آنها به داده ها مورد استفاده قرار می گیرد، باقیمانده است که برای تمامی مدل های مورد بحث از فرمول زیر محاسبه می شود،

$$\sum_{j=1}^n d^r(Y_j, \hat{Y}_j)$$

البته در تعریف فوق برای باقیمانده، هر یک از مترهای d^r و d^r_{LR} نیز می تواند جایگزین d^r گردد.

۴. مثالها

مثال ۳: داده های زیر را در نظر بگیرید.

$Y = (m_y, \alpha_y, \beta_y)_T$	$X = (m_x, \alpha_x, \beta_x)_T$
(۴, ۰/۱۶, ۰/۱۸)	(۲۱, ۴/۲, ۲/۱)
(۳, ۰/۱۳, ۰/۱۳)	(۱۵, ۲/۲۵, ۲/۲۵)
(۳/۵, ۰/۳۵, ۰/۳۵)	(۱۵, ۱/۵, ۲/۲۵)
(۲, ۰/۱۴, ۰/۱۴)	(۹, ۱/۳۵, ۱/۳۵)
(۳, ۰/۱۳, ۰/۱۴۵)	(۱۲, ۱/۲, ۱/۲)
(۳/۵, ۰/۱۵۳, ۰/۱۷)	(۱۸, ۳/۱۶, ۳/۱۶)
(۲/۵, ۰/۲۵, ۰/۳۸)	(۶, ۰/۱۶, ۱/۲)
(۲/۵, ۰/۱۵, ۰/۱۵)	(۱۲, ۱/۱۸, ۲/۴)

$$d^r_{LR}(X, Y) = (m_x - m_y)^r + ((m_x - l_{\alpha_x}) - (m_y - l_{\alpha_y}))^r + ((m_x + r\beta_x) - (m_y + r\beta_y))^r$$

که در آن $Y = (m_y, \alpha_y, \beta_y)_{LR}$ و $X = (m_x, \alpha_x, \beta_x)_{LR}$ و $r = \int_0^1 R^{-1}(\omega) d\omega$ و $l = \int_0^1 L^{-1}(\omega) d\omega$ که در آن

$$D^r(X, Y) = \int_0^1 \{(Y_\omega^L - X_\omega^L)^r + (Y_\omega^R - X_\omega^R)^r\} d\omega \quad (6)$$

که در آن

$$Y = (m_y, \alpha_y, \beta_y)_{LR} \quad , \quad X = (m_x, \alpha_x, \beta_x)_{LR}$$

$$Y_\omega^L = m_y - L_y^{-1}(\omega)\alpha_y \quad , \quad Y_\omega^R = m_y + R_y^{-1}(\omega)\beta_y$$

$$X_\omega^L = m_x - L_x^{-1}(\omega)\alpha_x \quad , \quad X_\omega^R = m_x + R_x^{-1}(\omega)\beta_x$$

مثال ۲: فاصله های $d^r(X, Y)$ ، $d^r_{LR}(X, Y)$ و $D^r(X, Y)$ برای دو عدد فازی $Y = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_T$ و $X = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_T$ به ترتیب عبارتند از،

$$d^r(X, Y) = \frac{r}{4}$$

$$d^r_{LR}(X, Y) = (m_x - m_y)^r + ((m_x - l_{\alpha_x}) - (m_y - l_{\alpha_y}))^r + ((m_x + r\beta_x) - (m_y + r\beta_y))^r$$

$$= (1 - \frac{r}{2})^r + ((1 - (\int_0^1 (1 - \omega) d\omega)^{\frac{1}{2}}) - (\frac{r}{2} - (\int_0^1 (1 - \omega) d\omega)^{\frac{1}{2}}))^r + ((1 + (\int_0^1 (1 - \omega) d\omega)^{\frac{1}{2}}) - (\frac{r}{2} + (\int_0^1 (1 - \omega) d\omega)^{\frac{1}{2}}))^r = \frac{r}{4}$$

$$D^r(X, Y) = \int_0^1 (Y_\omega^L - X_\omega^L)^r d\omega + \int_0^1 (Y_\omega^R - X_\omega^R)^r d\omega = \int_0^1 \{(m_x - T_y^{-1}(\omega)\alpha_y) - (m_x - T_x^{-1}(\omega)\alpha_x)\}^r d\omega$$

می‌باشد. برای اثبات این ادعا نمودار نتایج ینگ، به صورت نقطه‌چین، روی نمودار پراکنش به همراه مدل برازش شده در جدول ۳-۲، آورده شده است.

مقایسه باقیمانده‌ها تحت فاصله‌های d^2 ، d^2_{LR} و D^2 نشان می‌دهد که فاصله d^2_{LR} نسبت به d^2 باعث برازش بهتر مدل مفروض به داده‌ها می‌شود و به طور مشابه فاصله D^2 سبب برازش بهتر این مدل نسبت به دو فاصله دیگر می‌گردد. همچنین مقایسه این باقیمانده‌ها تحت مدل‌های M_1 و M_2 (حالتی که در مدل M_1 عرض از مبدأ نیز فازی در نظر گرفته شود) مشخص می‌کند که فازی فرض کردن عرض از مبدأ باعث برازش بهتر مدل به داده‌ها می‌شود [۲].

مثال ۴: در داده‌های جدول ۳-۳، $X = (m_x, \alpha_x, \beta_x)_T$ متغیر سن و $Y = (m_y, \alpha_y, \beta_y)_T$ متغیر فشار خون برای ۳۰ نفر می‌باشد. از برازش مدل‌های M_1 تا M_7 به این داده‌ها جدول ۳-۴ بدست آمده است.

نتایج جدول ۳-۴ فقط تحت فاصله D^2 می‌باشد زیرا در مثال‌های قبلی ملاحظه کردید که فاصله D^2 باعث برازش بهتر مدل مفروض به داده‌ها می‌شود. تساوی باقیمانده‌ها تحت چهار مدل فوق به این علت است که تمام داده‌ها اعداد فازی مثلثی متقارن با پهنای ۰/۵ می‌باشد.

در داده‌های فوق اگر فقط مقادیر نمایی برای برازش مدل رگرسیون معمولی در نظر گرفته شود، عرض از مبدأ و شیب مدل بدست آمده و همچنین مجموع مربعات باقیمانده‌ها به ترتیب عبارتند از ۹۸/۷۱۵، ۰/۹۷۱ و ۸۳۹۳/۴. البته این اختلاف در باقیمانده‌ها بین مدل رگرسیونی معمولی و مدل‌های رگرسیونی خطی فازی به این علت است که در مدل رگرسیونی معمولی فقط تفاوت بین جفت نقاط در تعیین باقیمانده نقش دارد این در حالی است که در مدل‌های رگرسیونی خطی فازی تحت فاصله D^2 تفاوت‌های بین جفت توابع در تعیین باقیمانده نقش دارند.

۵. ضمیمه: بهینه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار LINGO

LINGO نرم‌افزاری است، جهت بهینه‌سازی مسایل خطی و غیرخطی. معمولاً یک برنامه در نرم‌افزار LINGO شامل سه قسمت می‌باشد. این قسمت‌ها عبارتند از؛

$Y = (m_y, \alpha_y, \beta_y)_T$	$x = m_x$
(۴۰/۱۶۰/۱۸)	۲۱
(۳۰/۳۰/۱۳)	۱۵
(۳/۵۰/۱۳۵۰/۱۳۵)	۱۵
(۲۰/۴۰/۱۴)	۹
(۳۰/۳۰/۱۴۵)	۱۲
(۳/۵۰/۱۵۳۰/۱۷)	۱۸
(۲/۵۰/۱۲۵۰/۱۳۸)	۶
(۲/۵۰/۱۵۰/۱۵)	۱۲

$Y = (m_y, \alpha_y, \beta_y)_T$	x
(۲۱/۶/۱۵/۶/۱۵)	۴۵
(۱۵/۹/۴/۹/۴/۹)	۴۰
(۱۸/۴۵/۱/۳/۱/۳)	۳۵
(۱۲/۵/۲/۷/۲/۷)	۳۰
(۹/۸۵/۳/۳۵/۳/۳۵)	۲۵
(۶/۴۵/۲/۵۵/۲/۵۵)	۲۰
(۴/۹/۳/۳)	۱۵
(۴/۱۵/۱/۱۵/۱/۱۵)	۱۰
(۱/۳۵/۰/۳۵/۰/۳۵)	۵

از برازش مدل‌های M_1 و M_7 به داده‌های جدول ۳-۱-الف و مدل M_7 به داده‌های جدول ۳-۱-ب و پ، تحت فواصل d^2_{LR} ، d^2 و D^2 نتایج جدول ۳-۲ حاصل می‌شوند.

نتایجی که در جدول ۳-۲ آورده شده‌اند با نتایج بدست آمده در [۱۴] تفاوت دارند. مقداری از این تفاوت به این علت است که در [۱۴] برای سادگی، پارامترها متقارن در نظر گرفته شده‌اند. ولی حتی در صورت متقارن بودن نیز نتایج با هم تفاوت دارند. گاهی این تفاوت‌ها قابل اغماض می‌باشند به این دلیل که می‌توان آنها را ناشی از خطای تقریب و یا استفاده از نرم‌افزارها و یا روشهای مختلفی جهت بهینه‌سازی دانست؛ به طور مثال برای داده‌های "الف" و "ب"، مدل‌های M_1 و M_7 و تحت دو فاصله d^2_{LR} و d^2 در جدول ۳-۲. در حالی که این تفاوت‌ها در مورد داده‌های "ج"، مدل M_7 ، تحت فاصله d^2 ، خیلی زیاد می‌باشند. به نظر می‌رسد آن دسته از نتایج که با نتایج ما تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارد احتمالاً در اثر اشتباه یا خطای محاسبه از جانب ینگ

(۲)

(۱) مشخص کردن حدود مشاهدات

SETS:

OBS / ۱... / : $m_y, \alpha_y, \beta_y, x$;

CUT / ۱...۲۵ / : ω ;

TOTAL(OBS, CUT) : TOTAL;

ENDSETS

DATA

$m_y = m_{y_1}, m_{y_2}, \dots, m_{y_n}$;

$\alpha_y = \alpha_{y_1}, \alpha_{y_2}, \dots, \alpha_{y_n}$;

$\beta_y = \beta_{y_1}, \beta_{y_2}, \dots, \beta_{y_n}$;

$x = x_1, x_2, \dots, x_n$;

$\omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25$;

ENDDATA

[OBJ] MIN = $(\frac{1}{25}) * @SUM(TOTAL(i, j) :$

$((m_{a_i} + (m_{a_i} * x(i)) - (1 - \frac{\omega(j)}{25}) * (\alpha_{a_i} + \alpha_{a_i} * @abs(x(i))))$

$- (m_y(i) - (1 - \frac{\omega(j)}{25}) * \alpha_y(i)) ^ 2 + ((m_{a_i} + (m_{a_i} * x(i))$

$- (1 - \frac{\omega(j)}{25}) * (\beta_{a_i} + \beta_{a_i} * @abs(x(i))))$

$- (m_y(i) + (1 - \frac{\omega(j)}{25}) * \beta_y(i)) ^ 2$;

$\alpha_{a_i} \geq 0$;

$\beta_{a_i} \geq 0$;

$\alpha_{a_i} \geq 0$;

$\beta_{a_i} \geq 0$;

END.

(۲) داده‌ها

(۳) تعریف تابع هدف.

برنامه برآورد پارامترهای مدل‌های (۷)، (۸) و (۹) تحت فاصله‌های

d^+ ، d_{LR}^+ و D^+ تقریباً شبیه یکدیگر می‌باشند. به عنوان نمونه، برنامه

برآورد پارامترهای مدل (۷) تحت فاصله d^+ ، که یک مسأله

برنامه‌ریزی غیرخطی نامقید است، و همچنین مدل (۹) تحت فاصله D^+ ،

که یک مسأله برنامه‌ریزی خطی مقید است، به ترتیب عبارتند از،

(۱)

SETS:

OBS / ۱... / : $m_y, \alpha_y, \beta_y, m_x, \alpha_x, \beta_x$;

ENDSETS

DATA:

$m_y = m_{y_1}, m_{y_2}, \dots, m_{y_n}$;

$\alpha_y = \alpha_{y_1}, \alpha_{y_2}, \dots, \alpha_{y_n}$;

$\beta_y = \beta_{y_1}, \beta_{y_2}, \dots, \beta_{y_n}$;

$m_x = m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$;

$\alpha_x = \alpha_{x_1}, \alpha_{x_2}, \dots, \alpha_{x_n}$;

$\beta_x = \beta_{x_1}, \beta_{x_2}, \dots, \beta_{x_n}$;

ENDDATA

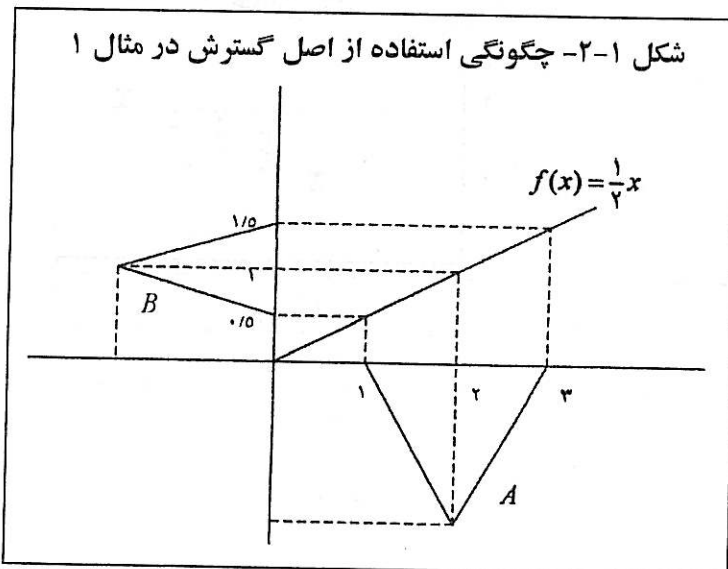
[OBJ] MIN = @SUM(OBS : $(a_o + m_x * a_1 - m_y) ^ 2$

$+ (a_o + (m_x - \alpha_x) * @abs(a_1) - (m_y - \alpha_y)) ^ 2$

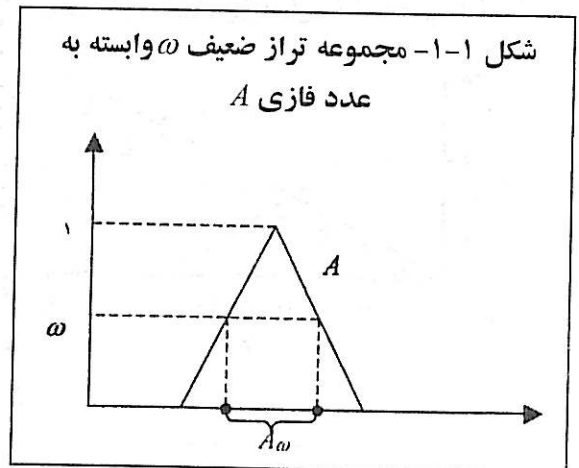
$+ (a_o + (m_x + \beta_x) * @abs(a_1) - (m_y + \beta_y)) ^ 2$;

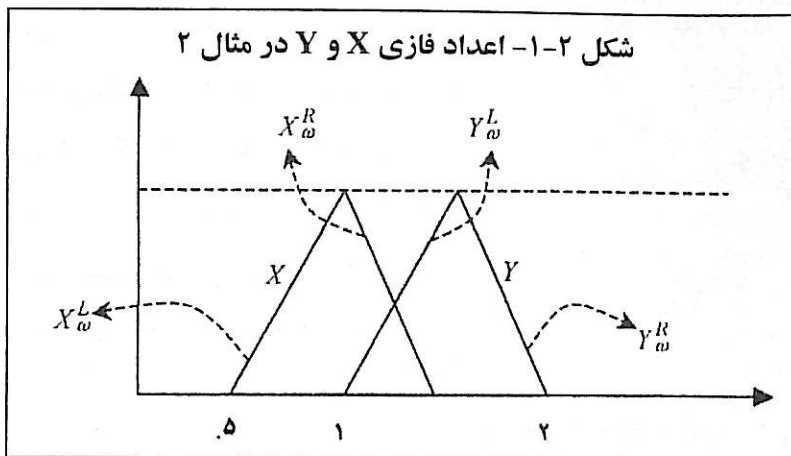
END.

شکل ۱-۲- چگونه استفاده از اصل گسترش در مثال ۱

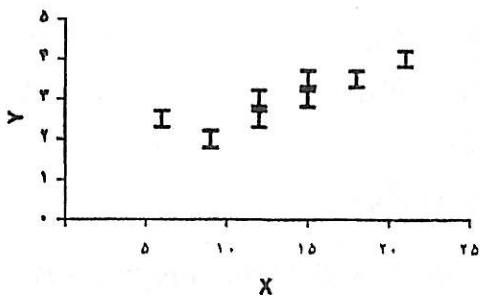


شکل ۱-۱- مجموعه تراز ضعیف ω وابسته به عدد فازی A

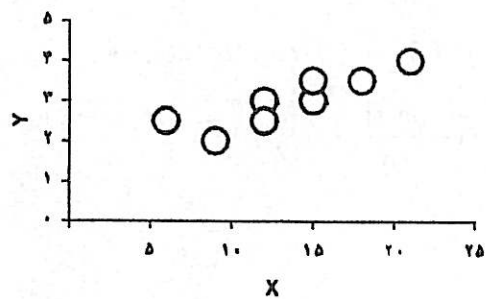




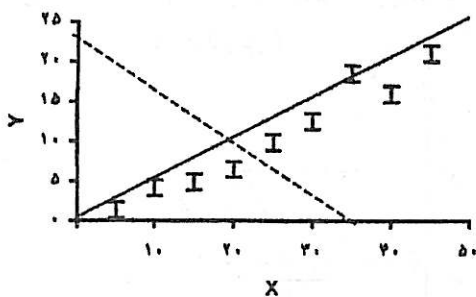
شکل ۳-۲- نمودار پراکنش برای داده‌های جدول ۳ ب



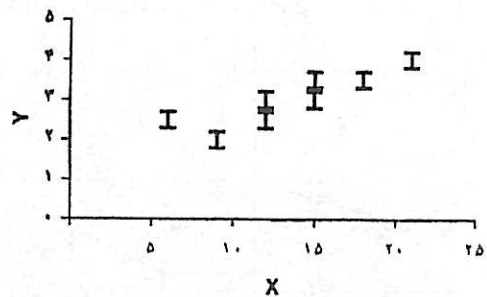
شکل ۳-۱- نمودار پراکنش برای داده‌های جدول ۳ الف



شکل ۳-۴- مقایسه نتایج ینگ و نتایج جدول ۲ برای داده‌های (ج) مدل M_2 ، تحت فاصله d^2



شکل ۳-۳- نمودار پراکنش برای داده‌های جدول ۳ پ



جدول ۲- مقایسه مدلها و فاصله‌های مختلف با یکدیگر

داده‌ها	مدل	فاصله		باقیمانده
الف	M_1	d^r	$\hat{Y} = 1/28 + 0/141X$	2/778
		d_{LR}^r	$\hat{Y} = 1/286 + 0/128X$	2/2498
		D^r	$\hat{Y} = 1/2141 + 0/1344X$	1/6687
	M_2	d^r	$\hat{Y} = (1/249, 0/1363, 0/2492)_T + 0/1296X$	2/335
		d_{LR}^r	$\hat{Y} = (1/312, 0/146, 0/257)_T + 0/125X$	2/0881
		D^r	$\hat{Y} = (1/2749, 0/140, 0/2525)_T + 0/1277X$	1/4601
ب	M_2	d^r	$\hat{Y} = (1/375, 0/155, 0/1475)_T + (-0/1203, 0/184, 0/249)_T m_x$	2/315
		d_{LR}^r	$\hat{Y} = (1/375, 0/155, 0/1474)_T + (-0/1203, 0/184, 0/25)_T m_x$	2/0934
		D^r	$\hat{Y} = (1/375, 0/155, 0/1475)_T + (-0/1204, 0/185, 0/25)_T m_x$	1/4622
ج	M_2	d^r	$\hat{Y} = (0, 1/8944, 0)_T + (-0/4349, 0/536, 0/1134)_T m_x$	90/134
		d_{LR}^r	$\hat{Y} = (0, 3/6077, 0)_T + (-0/4350, 0/1131)_T m_x$	72/9926
		D^r	$\hat{Y} = (0, 2/7153, 0)_T + (-0/4349, 0/276, 0/1134)_T m_x$	52/307

جدول ۳- داده‌های مثال ۲

شماره	m_y	$\alpha_y (= \beta_y)$	m_x	$\alpha_x (= \beta_x)$	شماره	m_y	$\alpha_y (= \beta_y)$	m_x	$\alpha_x (= \beta_x)$
۱	۱۴۴	۰/۵	۳۹	۰/۵	۱۶	۱۳۰	۰/۵	۴۸	۰/۵
۲	۲۲۰	۰/۵	۴۷	۰/۵	۱۷	۱۳۵	۰/۵	۴۵	۰/۵
۳	۱۳۸	۰/۵	۴۵	۰/۵	۱۸	۱۱۴	۰/۵	۱۷	۰/۵
۴	۱۴۵	۰/۵	۴۷	۰/۵	۱۹	۱۱۶	۰/۵	۲۰	۰/۵
۵	۱۶۲	۰/۵	۶۵	۰/۵	۲۰	۱۲۴	۰/۵	۱۹	۰/۵
۶	۱۴۲	۰/۵	۴۶	۰/۵	۲۱	۱۳۶	۰/۵	۳۶	۰/۵
۷	۱۷۰	۰/۵	۶۷	۰/۵	۲۲	۱۴۲	۰/۵	۵۰	۰/۵
۸	۱۲۴	۰/۵	۴۲	۰/۵	۲۳	۱۲۰	۰/۵	۳۹	۰/۵
۹	۱۵۸	۰/۵	۶۷	۰/۵	۲۴	۱۲۰	۰/۵	۲۱	۰/۵
۱۰	۱۵۴	۰/۵	۵۶	۰/۵	۲۵	۱۶۰	۰/۵	۴۴	۰/۵
۱۱	۱۶۲	۰/۵	۶۴	۰/۵	۲۶	۱۵۸	۰/۵	۵۳	۰/۵
۱۲	۱۵۰	۰/۵	۵۶	۰/۵	۲۷	۱۴۴	۰/۵	۶۳	۰/۵
۱۳	۱۴۰	۰/۵	۵۹	۰/۵	۲۸	۱۳۰	۰/۵	۲۹	۰/۵
۱۴	۱۱۰	۰/۵	۳۴	۰/۵	۲۹	۱۲۵	۰/۵	۲۵	۰/۵
۱۵	۱۲۸	۰/۵	۴۲	۰/۵	۳۰	۱۷۵	۰/۵	۶۹	۰/۵

جدول ۴- برازش مدل‌های M_1 تا M_3 تحت فاصله D^2 به داده‌های جدول ۳

داده‌ها	مدل		باقیمانده
جدول ۲-۱۳	M_1	$\hat{Y} = 98/71 + 0/97X$	۱۶۷۸۶
	M_2	$\hat{Y} = (98/71, 0/140, 0/140)_T + 0/97X$	۱۶۷۸۶
	M_3	$\hat{Y} = (98/71, 0/11, 29/48)_T + (0/97, 0/15, 0/11)_T m_x$	۱۶۷۸۶

مراجع

- [۱] اخلاقی، سعید؛ ۱۳۸۳، رگرسیون حداقل مربعات فازی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۲] ارقامی، ناصر رضا؛ ۱۳۷۲، مروری بر رگرسیون فازی، گزارش نخستین سمینار مجموعه‌های مشکک و کاربردهای آن، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱-۱۸.
- [۳] طاهری، سید محمود؛ ۱۳۷۸، آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد، چاپ دوم.
- [۴] ماشین‌چی، ماشا الله؛ ۱۳۷۹، مجموعه‌های مشکک، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.
- [5] Bardossy, A., 1990. *A Note on Fuzzy Regression*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 37, pp. 65-75.
- [6] Diamond, P., 1988. *Fuzzy Least Squares*, IS, Vol. 46, pp. 141-157.
- [7] Dubois, D. and Prad, H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic press, New York.
- [8] Luenberger, D., 1984. *Linear and Nonlinear Programming*, 2nd ed., Addison-wesley, Reading Mass.
- [9] Sakawa, M. and Yano, H., 1992. *Multiobjective Fuzzy Regression Analysis for Fuzzy Input-Output Data*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 47, pp. 173-181.
- [10] Tanaka, H., Hayashi, I. And Watada, J., 1987. *Possibilistic Linear Regression Analysis Based on Possibility Measure*, Preprint of Second IFCA Congress, Tokyo, July, pp. 20-25.
- [11] Tanaka, H., Vejima, S. and Asai, K., 1982. *Linear Regression Analysis with Fuzzy Model*, IEEE Trans. System Man Cybernet, Vol. SMC-12, pp. 903-907.
- [12] Yager, R., 1982. *Fuzzy Prediction Based on Regression Models*, IS, Vol. 26, pp. 45-63.
- [13] Yang, M.S., 1993. *A Servey of Fuzzy Clustring*, Math. Comput. Modeling, Vol.18, No. 11, pp. 1-16.
- [14] Yang, M.S. and Ko, C.H., 1997, *On Cluster-Wise Fuzzy Regression Analysis*, IEEE Trans, System Man Cybernet, Vol. B. 27(1), pp. 1-13.
- [15] Yang, M.S. and Lin, T.S., 2002, *Fuzzy Least-Squares Linear Regression Analysis for Fuzzy Input-Output Data*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 126, pp. 389-399.