اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های ترتیبی توزیع BURR XII

بهاره خطیب آستانه[۱] مصطفی رزمخواه[۱] جعفر احمدی[۱]

چکیده

فرض کنید یک نمونه تصادفی به حجم n از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال $f(x,\theta)$ در اختیار داریم، که در آن θ مقدار حقیقی پارامتر باشد. هنگامی که مشاهدات به صورت صعودی مرتب شده باشند، این نکته که اطلاع فیشر در بین آنها چگونه توزیع شده است یا اینکه کدام قسمت از این آماره‌های ترتیبی اطلاع بیشتری در مورد پارامترهای مجهول جامعه در اختیار ما قرار می‌دهند، حائز اهمیت است. در این مقاله ابتدا اطلاع فیشر را معرفی می کنیم و تابع چگالی احتمال آماره‌های مرتب و روابط بازگشتی میان اطلاع فیشر آماره‌های مرتب و ارتباط آنها را با اطلاع فیشر کل نمونه برای توزیع بر نوع ۱۲ مورد بررسی قرار می‌دهیم، سپس تجزیه اطلاع فیشر را به‌کار برده و با استفاده از آن اطلاع فیشر در r آمارهٔ مرتب اول در نمونه‌ای به حجم nاز توزیع بر نوع ۱۲ را بدست می‌آوریم. در پایان با معرفی نمودار اطلاع، اطلاع فیشر را برای بخشهای مختلف آماره‌های مرتب این توزیع به‌دست می‌آوریم.

واژه های کلیدی : آماره بسنده، آنتروپی، اطلاع کولبک، ثابت اویلر، تابع گامای کامل، نمودار اطلاع، داده‌های سانسور شده.

۱. مقدمه

اطلاع فیشر نقش مهمی را در استنباط آماری ایفا می‌کند، در نامساوی کرامر- رائو برای به دست آوردن کران پایین واریانس برآوردگرهای نااریب و همچنین در واریانس توزیع حدی برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم(MLE) ظاهر می‌شود. در مسایل آزمون فرض، اطلاع فیشر می‌تواند جهت ساختن آزمون امتیاز رائو، استفاده شود. همچنین اطلاع فیشر با بسندگی و کارایی رابطه نزدیکی دارد و نیز می‌تواند در انتخاب تعداد مشاهدات لازم برای سانسور، در نمونه سانسور شدهٔ نوع دو و ارزیابی اهمیت برآوردگرهای قرار گرفته شده روی داده‌های سانسور شده، در نظر گرفته شود. آماره‌های مرتب در مسایلی به مانند برآورد وضعیت توانمند، کشف مشاهدات دور افتاده، نمونه‌گیری سانسور شده، انتظار برای حادثه‌ای بزرگ، مشخص‌سازی توزیع‌ها، آزمون نیکویی برازش و از این قبیل نقش شایان توجهی ایفا می‌کنند. همچنین در بسیاری از موارد به عنوان آماره‌های بسنده معرفی می‌شوند و برآوردگرهای ناریب با کمترین واریانس، فواصل اطمینان و تواناترین آزمون برای پارامترهای مجهول را فراهم می‌کنند.

در بررسی‌های نمونه‌ای میزان اطلاع فیشر که در مورد پارامترهای مجهول جامعه در هر یک از اعضای نمونه نهفته است مورد توجه قرار می‌گیرد، حال اگر مشاهدات به صورت صعودی مرتب شده باشند، این نکته که اطلاع در بین آنها چگونه توزیع شده است و یا اینکه کدام قسمت از آماره‌های مرتب اطلاع بیشتری در مورد پارامترهای مجهول

[۱] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

جامعه دارند، حائز اهمیت است. بنابراین ممکن است این سؤال پیش آید که آیا می‌توان مقدار اطلاع موجود در یک آمارهٔ مرتب یا دسته‌ای از آماره‌های مرتب را تعیین کرد؟ با توجه به اینکه اگر از مجموعه تمام آماره‌های مرتب استفاده کنیم هیچ اطلاعی را از دست نمی‌دهیم، حال اگر بخشی از این آماره‌ها را مورد استفاده قرار دهیم چه اندازه اطلاع خواهیم داشت؟ ([۱]).

اخیراً، بررسی میزان اطلاع فیشر در آماره‌های مرتب مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته است؛ پارک[۲] (۱۹۹۶)، تجزیه اطلاع فیشر آماره‌های مرتب را به کار برده و با استفاده از روابط بازگشتی بین گشتاورهای آماره‌های مرتب، فرمولهایی ساده برای به دست آوردن اطلاع در قسمتهای مختلف آماره‌های مرتب به دست آورده است. همچنین نمودار اطلاع را برای یافتن اطلاع فیشر در زیرمجموعه‌ای از آماره‌های مرتب متوالی معرفی کرده است.

اینگر و همکاران[۳] (۱۹۹۹)، فرمولهای کلی برای اطلاع فیشر توزیعهای وزنی به دست آورده‌اند و با توجه به اینکه تابع چگالی احتمال آماره‌های مرتب دارای شکل وزنی از چگالی جامعه می‌باشد، نتایج به دست‌آمده را در خصوص آماره‌های مرتب به کار برده‌اند.

زنگ و گست‌ویزر[۴] (۲۰۰۰)، با فرض اینکه سانسورهای چندگانه داشته باشیم، فرمولهایی دقیق برای اطلاع فیشر نهفته در بلوکهایی که حداقل شامل دو آمارهٔ مرتب باشند به دست آورده‌اند.

زنگ (۲۰۰۱)، میزان اطلاع فیشر کاهش‌یافته را در نمونه‌ای که به روش تصادفی سانسور شده بود، به دست آورده است.

صوفی و ابراهیم[۵] (۲۰۰۱)، خواص اطلاع آماره‌های مرتب را براساس آنتروپی، اطلاع کولبک و اطلاع توأم مورد مطالعه قرار داده‌اند.

زنگ و گست‌ویرز(۲۰۰۲)، توزیعهای متقارن با پارامتر مقیاس را در نظر گرفته و نشان داده‌اند که بین دم توزیعهای متقارن با میزان اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های مرتب در خصوص پارامتر مقیاس رابطه وجود دارد. همچنین اطلاع فیشر قسمتهای مختلفی از مجموعه آماره‌های مرتب را مورد مطالعه قرار داده‌اند.

[۲] Park

[۳] Iyengar et.al.

[۴] Zheng and Gastwirth

[۵] Soofi and Ebrahim

ناگاراجا و ابوالن[۶] (۲۰۰۳)، اطلاع فیشر را در یک آمارهٔ مرتب و در مجموعه‌ای از آماره‌های مرتب در حالت متناهی و مجانبی مورد مطالعه قرار داده‌اند. همچنین نتایجی را روی آماره‌های مرتب ملازم[۷] و مقادیر رکوردهای بالا زمانی که حجم نمونه متناهی است بیان کرده‌اند.

پارک (۲۰۰۳)، اطلاع فیشر مجانبی نهفته در آماره‌های مرتب را بر حسب تابع نرخ خطر به دست آورده است.

معرفی خانوادهٔ توزیعهای بر[۸] (۱۹۴۲)، توسط بر به منظور ایجاد توزیعهایی با انعطاف‌پذیری بالا صورت گرفت. این خانواده توسط جوابهایی که برای یک معادلهٔ تفاضلی در تابع توزیع تجمعی به دست می‌آید، معرفی شده است.

بر، دوازده نوع توزیع معرفی کرد که آخرین آنها به توزیع بر نوع ۱۲ [۹] مشهور است، یک جواب ویژه که باعث بوجود آمدن توزیع بر نوع ۱۲ شده، در عمل بسیار پرکاربرد واقع گشته است: می‌توان به برخی از این کاربردها در بخش‌هایی از کنترل کیفیت، طول‌عمر یا مدل‌بندی زمان نقص، مدل‌بندی توزیع درآمد، کارایی مسکن‌ها در آزمایشات پزشکی و آزمون فرض اشاره نمود، که دارای تابع توزیع احتمال

$$F(x) = 1 - (1 + x^{\theta})^{-k} \quad , \quad x > 0$$

و تابع چگالی احتمال

$$f(x) = k\theta x^{\theta-1}(1 + x^{\theta})^{-(k+1)} \quad , \quad x > 0$$

می‌باشد، که در آن θ و k اعداد حقیقی مثبت می‌باشند (جزئیات بیشتر را می‌توانید در تیمر[۱۰] (۱۹۹۳) ببینید).

ملاحظه می‌شود که این توزیع یک توزیع دو پارامتری با پارامترهای k و θ می‌باشد. بدیهی است زمانی که پارامتر θ معلوم باشد، این توزیع جزء خانوادهٔ نمایی است. لازم به ذکر است، در این مقاله این توزیع با نماد $B12(\theta, k)$ نشان داده می‌شود.

در این مقاله با فرض معلوم بودن k به محاسبهٔ میزان اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های مرتب این توزیع در مورد پارامتر مجهول θ

[۶] Nagaraja and Abo-Eleneen

[۷] Concomitants

[۸] Burr

[۹] Burr XII

[۱۰] Timr

می‌پردازیم؛ و بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم $k=1$ ، در این حالت تابع چگالی احتمال این توزیع به صورت زیر است،

$$f(x)=\theta x^{\theta-1}(1+x^{\theta})^{-2} \quad , \quad x\ge 0$$

در بخش دوم پیش‌نیازهایی از قبیل تعریف اطلاع فیشر، تابع چگالی احتمال آماره‌های مرتب و روابط بازگشتی بین آماره‌های مرتب و اطلاع فیشر مطرح می‌شود که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد. در بخش سوم به محاسبهٔ تابع چگالی احتمال و میزان اطلاع فیشر نهفته در نخستین آمارهٔ ترتیبی در توزیع $B12(\theta,k)$ می‌پردازیم و در بخش چهارم تابع چگالی احتمال و میزان اطلاع فیشر نهفته در n امین آمارهٔ ترتیبی در توزیع $B12(\theta,k)$ را به دست می‌آوریم، بخش پنجم شامل بررسی چگونگی توزیع اطلاع فیشر در قسمتهای مختلف آماره‌های مرتب در این توزیع می‌باشد و جداولی برای این منظور ترسیم شده است. در بخش ششم نمودار فیشر را در نمونه‌ای به حجم ۲۰ برای توزیع $B12(\theta,k)$ رسم می‌کنیم.

۲. پیش‌نیازها

در این بخش ابتدا اطلاع فیشر را تعریف کرده و سپس تابع چگالی احتمال آماره‌های مرتب را معرفی می‌کنیم و در پایان چند لم که برای محاسبهٔ اطلاع فیشر در آماره‌های مرتب مفید واقع می‌شوند را ارایه می‌دهیم.

۲-۱ تعریف اطلاع فیشر

برای یک متغیر تصادفی پیوسته (گسسته) X با تابع چگالی احتمال (تابع جرم احتمال) $f(x,\theta)$ ، که $\theta\in\Omega$ دارای مقدار حقیقی است، تحت شرایط نظم اطلاع فیشر نهفته در X به صورت زیر تعریف می‌شود (بهبودیان، ۱۳۷۰).

$$I_X(\theta)=E\left(\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_X(X;\theta)\right]^2\right) \qquad (1)$$

$$=-E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_X(X;\theta)\right)$$

امید ریاضی فوق را نسبت به چگالی $f(x,\theta)$ حساب می‌کنیم و فرض می‌کنیم که وجود داشته باشد. زمانی که $\underline{X}=(X_1,\dots,X_n)$ (n متغیر تصادفی مستقل از هم و همتوزیع) اطلاع فیشر به مانند تعریف بالا است با این تفاوت که در این حالت $f(x,\theta)$ به $f_{\underline{X}}(\underline{x},\theta)$ (تابع درستنمایی $\underline{X}$) تبدیل می‌شود، همچنین می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود،

$$I_{\underline{X}}(\theta)=nI_X(\theta).$$

۲-۲ تابع چگالی احتمال آماره‌های مرتب

فرض کنید $X_1,X_2,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی پیوسته، مستقل از هم و همتوزیع از یک جامعه با تابع چگالی احتمال $f(x,\theta)$ باشد و $X_{1:n}\le X_{2:n}\le\cdots\le X_{n:n}$ آماره‌های مرتب نظیر این نمونه باشد، که در آن $X_{i:n}$ ، i امین آمارهٔ مرتب در نمونهٔ n تایی می‌باشد، در این صورت تابع چگالی احتمال توأم آماره‌های مرتب به صورت زیر است؛

$$f_{1,2,\dots,n:n}(x_1,x_2,\dots,x_n)=n!\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

که در آن $-\infty<x_1<x_2<\cdots<x_n<\infty$. با انتگرال‌گیری از عبارت فوق روی متغیرهای $X_{j:n}$ ، $j=1,\dots,i-1,i+1,\dots,n$ ، می‌توان تابع چگالی احتمال i امین آمارهٔ مرتب، $X_{i:n}$ ، را به صورت زیر به دست آورد؛

$$f_{i:n}(x;\theta)=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(x;\theta)]^{i-1}$$
$$\times[1-F(x;\theta)]^{n-i}f(x;\theta) \quad , \quad -\infty<x<\infty$$

همچنین تابع چگالی احتمال r آمارهٔ مرتب اول با انتگرال‌گیری روی $X_{j:n}$ به ازای $j=r+1,\dots,n$ به صورت زیر به دست می‌آید،

$$f_{1,\dots,r:n}(x_1,\dots,x_r)=n!f(x_1)\cdots f(x_r)$$
$$\times\int_{x_r}^{\infty}\cdots\int_{x_r}^{x_{r+3}}\int_{x_r}^{x_{r+2}}f(x_{r+1})f(x_{r+2})\cdots f(x_n)dx_{r+1}dx_{r+2}dx_n$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!}[1-F(x_r)]^{n-r}f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_r)$$

برای جزئیات بیشتر به آرنلد و همکاران[11] (۱۹۹۲) مراجعه شود.

۲-۳ رابط بازگشتی

در این بخش چند رابطه بازگشتی که در محاسبهٔ اطلاع فیشر آماره‌های مرتب مفید واقع می‌شوند را به صورت لم‌هایی ارایه می‌دهیم.

لم ۱: (پارک، ۱۹۹۶)، فرض کنید دنباله $I_{1:i}(\theta)$ ، $i=1,\dots,n$ را داشته باشیم، آنگاه

---
[11] Arnold et.al.

$$I_{1,\dots,r:n}(\theta)=\sum_{i=n-r+1}^{n} C_{i-2,n-r-1}C_{n,i}(-1)^{i-n+r-1}I_{1:i}(\theta) \quad (2)$$

،$(r<n)$،

که در آن $I_{j:i}(\theta)$ را اطلاع فیشر jامین آمارهٔ مرتب در یک نمونهٔ i تایی است و $C_{n,r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$.

لم۲: (پارک، ۱۹۹۳)، فرض کنید دنباله $I_{i:i}(\theta)$ ، $i=1,..,n$ را داشته باشیم، آنگاه

$$I_{r,\dots,n:n}(\theta)=\sum_{i=r}^{n} C_{i-2,r-2}C_{n,i}(-1)^{i-r}I_{i:i}(\theta) \quad (3)$$

،$(1\le r\le n)$،

با استفاده از خاصیت مارکفی آماره‌های مرتب لم زیر اثبات می‌شود.

لم۳: اطلاع فیشر نهفته در متغیرهای تصادفی مستقل از هم و همتوزیع را می‌توان به دو صورت زیر تجزیه نمود؛

$$\begin{aligned} I_{1,\dots,n:n}(\theta)&=I_{1,\dots,r:n}(\theta)+I_{r+1,\dots,n|r:n}(\theta) \\ &=I_{1,\dots,r-1|r:n}(\theta)+I_{r:n}(\theta)+I_{r+1,\dots,n|r:n}(\theta) \end{aligned} \quad (4)$$

و

$$I_{1,\dots,n:n}(\theta)=I_{1,\dots,r-1|r:n}(\theta)+I_{r,r+1,\dots,n|r:n}(\theta) \quad (5)$$

که در آن $I_{r+1,\dots,n|r:n}(\theta)$ میانگین اطلاع شرطی $X_{r+1:n},\dots,X_{n:n}$ به شرط $X_{r:n}=x_{r:n}$ می‌باشد و $I_{1,\dots,r-1|r:n}(\theta)$ نیز میانگین اطلاع شرطی $X_{1:n},\dots,X_{r-1:n}$ به شرط $X_{r:n}=x_{r:n}$ می‌باشد.

لم۴: میزان اطلاع فیشر پارامتر θ در r آمارهٔ مرتب اول، $(X_{1:n},\dots,X_{r:n})$ ، تحت شرایط نظم از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$I_{1,\dots,r:n}(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{x_{r:n}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}f_{1,\dots,r:n}\right)^2 dF_{1,\dots,r:n} \quad (6)$$

که در آن $f_{1,\dots,r:n}$ تابع چگالی احتمال توأم r آمارهٔ مرتب اول است. محاسبه انتگرال سمت راست (۶) پیچیده است زیرا انتگرال روی r متغیر تصادفی است بنابراین می‌توان به جای محاسبهٔ آن از (۲) استفاده نمود.

لم۵: فرض کنید یک نمونه تصادفی به حجم n از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال $f(x,\theta)$ داشته باشیم، در این صورت

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\log f(x_{i:n};\theta)}{\partial\theta^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\log f(x_i;\theta)}{\partial\theta^2} \quad (7)$$

نتیجه ۱: بنا به رابطه (۷)، میزان اطلاع فیشر نهفته در تمام آماره‌های مرتب برابر میزان اطلاع فیشر در نمونه تصادفی به حجم n می‌باشد، بنابراین اگر از تمام آماره‌های مرتب استفاده کنیم هیچگونه اطلاعی را از دست نخواهیم داد، ولی سؤال اینجاست که اگر بخشی از آماره‌های مرتب را استفاده کنیم چه میزان اطلاع را از دست خواهیم داد؟ و دیگر اینکه کدام بخش از آماره‌های مرتب حاوی اطلاع بیشتری هستند؟

۳. نخستین آمارهٔ مرتب از $B12(\theta,k)$

در این بخش ابتدا نشان خواهیم داد که توزیع آماری نخستین آمارهٔ مرتب از $B12(\theta,k)$ از همان خانواده است و به دنبال آن به محاسبه اطلاع نهفته در خصوص پارامتر θ در این آماره می‌پردازیم.

لم۶: هرگاه X_i ها $(i=1,\dots,n)$ یک نمونه تصادفی از $B12(\theta,k)$ باشند، آنگاه $X_{1:n}$ دارای توزیع $B12(\theta,nk)$ است.

اثبات: می‌دانیم که اگر $x_1,x_2,\dots,x_n$ یک نمونه تصادفی مستقل و همتوزیع از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f(x,\theta)$ باشد، آنگاه تابع چگالی احتمال اولین آمارهٔ ترتیبی به صورت زیر می‌باشد،

$$f_{1:n}(x;\theta)=nf(x;\theta)(1-F(x;\theta))^{n-1}$$

حال اگر $X_1,X_2,\dots,X_n$ دارای توزیع $B12(\theta,k)$ باشند، داریم؛

$$\begin{aligned} f_{1:n}(x;\theta)&=nk\theta x^{\theta-1}(1+x^{\theta})^{-(k+1)} \\ &\times[1-(1-(1+x^{\theta})^{-k})]^{n-1} \\ &=nk\theta x^{\theta-1}(1+x^{\theta})^{-(nk+1)} \end{aligned} \quad (8)$$

ملاحظه می‌کنید که $X_{1:n}$ دارای توزیع $B12(\theta,nk)$ می‌باشد.

لم۷: میزان اطلاع فیشر نهفته در نخستین آمارهٔ مرتب توزیع $B12(\theta,1)$ در یک نمونهٔ n تایی در خصوص پارامتر θ به صورت زیر می‌باشد،

$$I_{1:n}(\theta)=\frac{1}{\theta^2}\{1+(n-1)\psi_1(n)\}$$

که در آن

$$\psi_1(n)=\int_0^{\infty}ny(\ln y)^2(1+y)^{-(n+2)}dy$$

اثبات: باتوجه به روابط (۱) و (۸) داریم

$$\ln(f_{1:n}(x;\theta))=\ln\theta+\ln n+(\theta-1)\ln x$$

$$-(n+1)\ln(1+x^{\theta})$$

$$\frac{\partial^2 \ln(f_{1:n}(x;\theta))}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{\theta^2} - (n+1)\frac{x^{\theta}(\ln^2(x))}{(1+x^{\theta})^2}$$

در نتیجه

$$I_{1:n}(\theta) = -E\left\{-\frac{1}{\theta^2} - (n+1)\frac{X_{1:n}^{\theta}(\ln^2 X_{1:n})}{(1+X_{1:n}^{\theta})^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\left\{1+(n+1)\theta^2 E\left(\frac{X_{1:n}^{\theta}(\ln^2 X_{1:n})}{(1+X_{1:n}^{\theta})^2}\right)\right\}$$

از طرفی

$$E\left(\frac{X_{1:n}^{\theta}(\ln^2 X_{1:n})}{(1+X_{1:n}^{\theta})^2}\right) = \int_0^{\infty}\frac{x^{\theta}(\ln x)}{1+x^{\theta}} f_{1:n}(x;\theta)dx$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{x^{\theta}(\ln x)}{1+x^{\theta}} n\theta x^{\theta-1}(1+x^{\theta})^{-(n+1)}dx$$

و با تغییر متغیر $y = x^{\theta}$ اثبات تمام است.

٤. آخرین آمارهٔ ترتیبی از $B12(\theta,k)$

توزیع nامین آمارهٔ ترتیبی نیز در یک نمونهٔ nتایی از توزیع $B12(\theta,1)$ با استفاده از فرمول زیر به راحتی قابل محاسبه است؛

$$f_{n:n}(x;\theta) = nf(x;\theta)[F(x;\theta)]^{n-1}$$

در نتیجه

$$f_{n:n}(x;\theta) = n\theta x^{n\theta-1}(1+x^{\theta})^{-(n+1)} \quad (9)$$

لم۸: میزان اطلاع فیشر نهفته در nامین آمارهٔ مرتب توزیع $B12(\theta,1)$ در یک نمونهٔ nتایی در خصوص پارامتر θ به صورت زیر می‌باشد،

$$I_{n:n}(\theta) = \frac{1}{\theta^2}\{1+(n+1)\psi_2(n)\}$$

که در آن

$$\psi_2(n) = \int_0^{\infty} ny^n(\ln y)^2(1+y)^{-(n+3)}dy$$

اثبات: با توجه به روابط (۱) و(۹) داریم

$$\ln(f_{n:n}(x;\theta)) = \ln\theta + \ln n + (n\theta-1)\ln x$$
$$-(n+1)\ln(1+x^{\theta})$$

$$\frac{\partial^2 \ln(f_{n:n}(x;\theta))}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{\theta^2} - (n+1)\frac{x^{\theta}(\ln^2(x))}{(1+x^{\theta})^2}$$

در نتیجه

$$I_{n:n}(\theta) = -E\left\{-\frac{1}{\theta^2} - (n+1)\frac{X_{n:n}^{\theta}(\ln^2 X_{n:n})}{(1+X_{n:n}^{\theta})^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\left\{1+(n+1)\theta^2 E\left(\frac{X_{n:n}^{\theta}(\ln^2 X_{n:n})}{(1+X_{n:n}^{\theta})^2}\right)\right\}$$

از طرفی

$$E\left(\frac{X_{n:n}^{\theta}(\ln^2 X_{n:n})}{(1+X_{n:n}^{\theta})^2}\right) = \int_0^{\infty}\frac{x^{\theta}(\ln^2 x)}{(1+x^{\theta})^2} f_{n:n}(x;\theta)dx$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{x^{\theta}(\ln^2 x)}{(1+x^{\theta})^2} n\theta x^{n\theta-1}(1+x^{\theta})^{-(n+1)}dx$$

و با تغییر متغیر $y = x^{\theta}$ اثبات تمام است.

۵. توزیع اطلاع فیشر در آماره‌های مرتب از $B12(\theta,k)$

در قسمت اول این بخش ابتدا، میزان اطلاع فیشر آماره‌های فرین را پیدا می‌کنیم، سپس اطلاع فیشر را برای زیرمجموعه‌ای از آماره‌های مرتب می‌یابیم، بدین ترتیب این موضوع که کدام آمارهٔ مرتب و یا چه بخشی از آماره‌های مرتب دارای حداکثر اطلاع فیشر هستند، را بررسی می‌کنیم.

با توجه به نتیجه۱، برای به دست آوردن اطلاع فیشر نهفته در تمام آماره‌های مرتب می‌توانیم از لم زیر استفاده کنیم.

لم۹: (احمدی و رزمخواه، ۱۳۸۱) میزان اطلاع فیشر نهفته در n مشاهده مستقل و همتوزیع با توزیع (BURR XII) در خصوص پارامتر θ به قرار زیر است،

$$I_{\underline{X}}(\theta) = \frac{n}{\theta^2} + \frac{n}{\theta^2}\frac{k}{k+2}\{\frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 - 2\gamma + 2(\gamma-1)\Psi(k+1)$$
$$+\Psi^2(k+1) + \Psi'(k+1)\}.$$

که در آن γ ثابت اویلر، $\Psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ و Γ تابع گامای کامل است.

۵-۱ آماره‌های فرین

به منظور مقایسه میزان اطلاع فیشر نهفته در n مشاهده مستقل و همتوزیع با توزیع $B12(\theta,1)$ و نخستین آمارهٔ مرتب و نیز nامین آمارهٔ

مرتب از آن توزیع به کمک محاسبات عددی جدول ۱ به ازای nهای مختلف تنظیم شده است.

لازم به ذکر است که کلیهٔ نتایج این مقاله با استفاده از نرم‌افزار ریاضی (MAPLE V8) به دست آمده است.

با توجه به جدول ۱ مشاهده می‌گردد که

- میزان اطلاع فیشر نخستین آمارهٔ مرتب و nامین آمارهٔ مرتب در توزیع $B12(\theta,1)$ تفاوت زیادی ندارند (این موضوع تا ۸ رقم اعشار درست است).
- مجموع میزان اطلاع نخستین آمارهٔ مرتب و nامین آمارهٔ مرتب در توزیع $B12(\theta,1)$ قابل توجه است.
- میزان اطلاع فیشر نهفته در هر یک از آماره‌های فرین از تک مشاهده بیشتر است.

۵-۲ زیرمجموعه‌ای از آماره‌های مرتب از $B12(\theta,k)$

برای دستیابی به اهداف این بخش، با استفاده از لم‌های ۱، ۲ و ۳، مقادیر عددی $L(r)=I_{1,..,r-1|r:n}$ و $U(r)=I_{1,...,r:n}(\theta)$ را برای $B12(\theta,1)$ به دست آورده‌ایم.

نتیجه ۲: با فرض $L(r)=I_{1,..,r-1|r:n}$ و $U(r)=I_{1,...,r:n}(\theta)$ آنگاه $I_{r:n}(\theta)=U(r)-L(r)$. بنابراین می‌توان مقداری از r که $I_{r:n}(\theta)$ را ماکزیمم می‌کند، پیدا نمود.

نتیجه ۳: با فرض $L(r)=I_{1,..,r-1|r:n}$ و $U(s)=I_{1,...,s:n}(\theta)$ آنگاه $I_{r,...,s:n}(\theta)=U(s)-L(r)$، که در آن $I_{r,...,s:n}(\theta)$ اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های مرتب $X_{r:n},X_{r+1:n},...,X_{s:n}$ می‌باشد.

لذا می‌توان اطلاع فیشر را برای زیر مجموعه‌ای از آماره‌های مرتب متوالی یک نمونهٔ داده شده با استفاده از نتیجه ۳ به دست آورد، و بدین ترتیب بخشی از آماره‌های مرتب را که دارای حداکثر اطلاع فیشر هستند، مشخص نمود. جدول ۲ مقادیر عددی $I_{r,...,s:n}(\theta)$ را به ازای r و s های مختلف در نمونه‌ای به حجم ۲۰ نشان می‌دهد.

با توجه به جدول ۲ مشاهده می‌گردد که میزان اطلاع در دو آمارهٔ $X_{n-i+1:n}$ و $X_{i:n}$ تقریبا برابر هستند (یعنی $I_{n-i+1:n}(\theta)\cong I_{i:n}(\theta)$).

مقادیر عددی $I_{1,...,r:n}(\theta)$ نیز با استفاده از لم‌های ۱ و ۳ به روش‌های عددی محاسبه شده‌اند و نتایج آن در جدول ۳ آمده است.

۶. نمودار اطلاع

برای دستیابی به اهداف این بخش نمودار اطلاع را با استفاده از روابط (۴) و (۵) (تجزیه اطلاع فیشر) برای پارامتر θ در توزیع $B12(\theta,1)$ در یک نمونهٔ ۲۰ تایی رسم می‌کنیم. این نمودار مقدار اطلاع فیشر (محور yها) در مقابل r مرتبهٔ $X_{r:n}$ (محور xها) نشان می‌دهد، که در آن r از ۰ تا n تغییر می‌کند و تغییرات اطلاع فیشر از ۰ تا $nI_{1:1}$ (اطلاع فیشر در کل نمونه) می‌باشد، بنابراین می‌توان مقادیر $L(r)=I_{1,..,r-1|r:n}$ و $U(r)=I_{1,...,r:n}(\theta)$ را به ازای هر r رسم نمود($L(r)$ در لم ۳ تعریف شده و U(r) نیز اطلاع فیشر r آمارهٔ مرتب اول از این توزیع می‌باشند)، بر روی این نمودار منحنی بالا، $U(r)=I_{1,...,r:n}(\theta)$ و منحنی پایین $L(r)=I_{1,..,r-1|r:n}$، را نشان می‌دهد. از روی این نمودار همانند بخش قبل می‌توان میزان اطلاع فیشر نهفته در یک آمارهٔ مرتب را به دست آورد زیرا $I_{r:n}(\theta)=U(r)-L(r)$، در نتیجه مقداری از r که را ماکسیمم می‌کند مشخص می‌شود.

با توجه به نمودار ۱ ملاحظه می‌شود، میزان اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های فرین از اطلاع فیشر در آماره‌های میانی بیشتر است. همچنین نمودار ۲ نشان می‌دهد که برای توزیع $B12(\theta,1)$، میزان اطلاع فیشر در هر آمارهٔ ترتیبی از تک مشاهده بیشتر است، یعنی

$$I_{r:n}(\theta)\ge 1/43 \quad (1\le r\le 20) \quad , \quad I_{1:1}(\theta)=1/43$$

همچنین میزان اطلاع فیشر در دومین و نیز در نوزدهمین آمارهٔ ترتیبی در نمونه‌ای به حجم ۲۰ ماکسیمم می‌شود. بنابراین ممکن است این سؤال پیش آید که آیا می‌توان در نمونه‌ای تصادفی به حجم ۲۰ از $B12(\theta,1)$، آماره $(X_{19:20},X_{2:20})$ را به جای آماره بسنده در استنباط آماری به کار برد؟

جدول ۱- مقادیر عددی $\theta^{2} I_{n:n}(\theta), (I_{1:n}(\theta)/I_{\underline{X}}(\theta)), \theta^{2} I_{\underline{X}}(\theta)$ به ازای $n=1,2,\dots,20$

n	$I_{\underline{X}}(\theta)$	$I_{1:n}(\theta)$	$\frac{I_{1:n}(\theta)}{I_{\underline{X}}(\theta)}$	$I_{n:n}(\theta)$	n	$I_{\underline{X}}(\theta)$	$I_{1:n}(\theta)$	$\frac{I_{1:n}(\theta)}{I_{\underline{X}}(\theta)}$	$I_{n:n}(\theta)$
۱	۱/۴۳	۱/۴۳	۱	۱/۴۳	۷	۱۰/۰۱	۳/۵۹	۰/۳۶	۳/۵۹
۲	۲/۸۶	۱/۶۴	۰/۵۷	۱/۶۴	۸	۱۱/۴۴	۳/۹۷	۰/۳۵	۳/۹۷
۳	۱/۹۲	۱/۹۷	۰/۴۶	۱/۹۷	۹	۱۲/۸۷	۴/۳۵	۰/۳۴	۴/۳۵
۴	۵/۷۲	۲/۳۶	۰/۴۱	۲/۳۶	۱۰	۱۴/۳	۴/۷۲	۰/۳۳	۴/۷۲
۵	۷/۱۵	۲/۷۷	۰/۳۹	۲/۷۷	۱۵	۲۱/۴۵	۶/۳۷	۰/۳	۶/۳۷
۶	۸/۵۸	۳/۱۷۵	۰/۳۷	۳/۱۷۵	۲۰	۲۸/۶	۷/۷۶۵	۰/۲۷	۷/۷۶۵

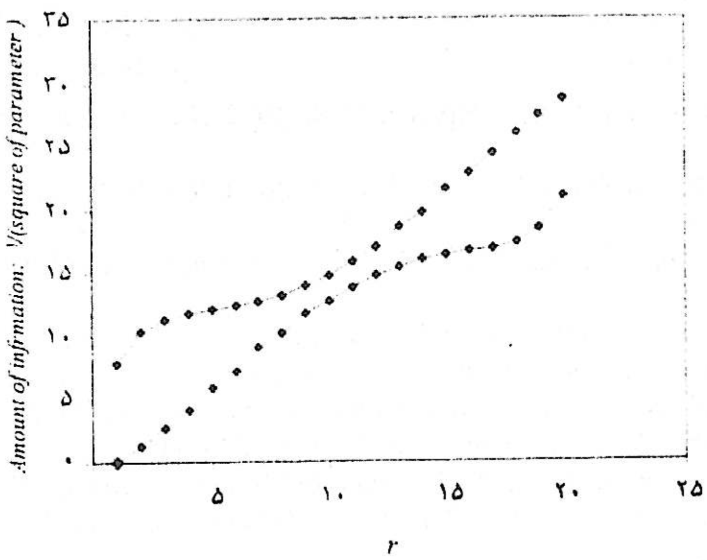
جدول ۲- اطلاع فیشر پارامتر θ در داده‌های سانسورشده از دو طرف در توزیع $B12(\theta,1)$: $I_{r,\dots,s:n}(\theta)$ در نمونه‌ای به حجم ۲۰

r \ S	۱	۲	۳	۴	۵	۱۰	۱۱	۱۵	۱۶	۱۹	۲۰
۱	۷/۷۶۵	۱۰/۲۸	۱۱/۲۹	۱۱/۷۴	۱۲/۰۱	۱۴/۷۴	۱۷/۷۴	۱۵/۹	۲۲/۷۵	۲۷/۳۴	۲۸/۶
۲		۹/۰۱	۱۰/۰۳	۱۰/۴۸	۱۰/۷۵	۱۳/۳۸	۱۴/۶	۲۰/۲۰۵	۲۱/۴۹	۲۶/۰۸	۲۷/۳۴
۳			۸/۶	۹/۰۵	۹/۳۲	۱۲/۰۵	۱۳/۱۷	۱۸/۷۷	۲۰/۰۵۵	۲۴/۶۴	۲۵/۹۰۵
۴				۷/۶	۷/۸۶	۱۰/۵۹	۱۱/۷۱	۱۷/۳۲	۱۸/۶	۲۳/۱۹	۲۴/۴۵
۵					۶/۱۵	۸/۸۸	۹/۹۹	۱۵/۶۱	۱۶/۸۹	۲۱/۴۸	۲۲/۷۴
۱۰						۲/۰۰۵	۳/۱۲	۸/۷۳	۱۰/۰۱	۱۴/۶	۱۵/۸۶
۱۱							۲/۰۰	۵/۱۵	۸/۹	۱۳/۴۸	۱۴/۷۴
۱۵								۷/۶۱	۶/۴۳۵	۱۱/۰۲	۱۲/۲۸۵
۱۶									۶/۱۶	۱۰/۷۵	۱۲/۰۱
۱۹										۹/۰۱	۱۰/۲۸
۲۰											۷/۷۶۵

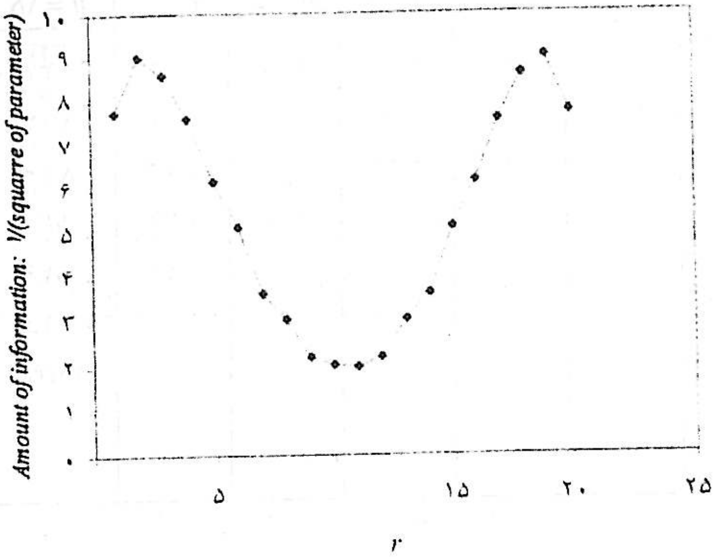
جدول ۳- اطلاع فیشر پارامتر θ در داده‌های سانسورشده از سمت راست در توزیع $I_{r,\ldots,s:n}(\theta): B۱۲(\theta,۱)$

آماره‌های مرتب	$n=۱$	$n=۲$	$n=۳$	$n=۴$	$n=۵$	$n=۱۰$	$n=۱۵$	$n=۱۹$	$n=۲۰$
$X_{۱:n}$	۱/۴۳	۱/۶۴	۱/۹۷	۲/۳۶	۲/۷۷	۴/۷۲	۶/۳۷	۷/۵	۷/۷۶۵
$X_{۱:n}, X_{۲:n}$		۲/۸۶	۲/۹۶	۳/۱۷۵	۳/۵	۵/۷۷	۸/۱۲	۹/۸۶	۱۰/۲۸
$X_{۱:n},\ldots,X_{۳:n}$			۴/۲۹	۴/۳۳	۴/۴۴	۶/۲۳	۸/۷۶	۱۰/۷۹	۱۱/۲۹
$X_{۱:n},\ldots,X_{۴:n}$				۵/۷۲	۵/۴۷	۶/۷۷	۹/۱	۱۱/۲۱	۱۱/۷۴
$X_{۱:n},\ldots,X_{۵:n}$					۷/۱۵	۷/۵۶	۹/۴۶	۱۱/۴۸	۱۲/۰۱
$X_{۱:n},\ldots,X_{۱۰:n}$						۱۴/۳	۱۴/۱۵۵	۱۴/۵۷	۱۴/۷۴
$X_{۱:n},\ldots,X_{۱۵:n}$							۲۱/۴۵	۲۱/۳۵	۲۱/۴۷
$X_{۱:n},\ldots,X_{۱۹:n}$								۲۷/۱۷	۲۷/۳۴
$X_{۱:n},\ldots,X_{۲۰:n}$									۲۸/۶

نمودار۱- نمودار اطلاع پارامتر θ درتوزیع $B۱۲(\theta,۱)$، $(n=۲۰)$



نمودار۲- نمودار میزان اطلاع فیشر نهفته در یک آمارهٔ مرتب از توزیع $B_{۱۲}(\theta,۱)$، $(n=۲۰)$



مراجع

[۱] احمدی، م. و احمدی، م.؛ ۱۳۸۱، *اطلاع فیشر و آماره‌های مرتب*، خلاصه مقالات ششمین سمینار بین‌المللی آمار، جلد ۶.

[۲] احمدی، ج. و رزمخواه، م.؛ ۱۳۸۱، *اطلاع در توزیع بر نوع دوازده*، مجموعه مقالات سسمین سمینار بین‌المللی آمار.

[۳] بهبودیان، ج.؛ ۱۳۷۰، *آمار ریاضی*، مؤسسه انتشارات امیرکبیر.

[4] Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N., 1992. *A First Course in Order Statistics,* John wiley, New York.
[5] Iyengar, S., Kvam, P. and Singh, H., 1999. *Fisher Information in Weighted Distributions,* Canad. J. Statist., Vol. 27, pp. 833-841.
[6] Nagaraja, H.N. and Abo-Eleneen, Z.A., 2003. *Fisher Information in Order Statistics,* Pak. J. Stat. Vol. 19, pp. 161-173.
[7] Park, S., 1996. *Fisher Information in Order Statistics,* Jour. Amer. Stat. Assoc, Vol. 91, pp. 385-390.
[8] Park, S., 2003. *On the Asymptotic Fisher Information in Order Statistics,* Metrika, Vol. 57, pp. 71-81.
[9] Soofi, E.S. and Ebrahim, N., 2002. *Information Properties of Order Statistics and Spacings,* Proceedings of Isc6, tarbiat Modarres University, Iran, pp. 325-340.
[10] Timr, L.Fry, 1993. *Univariate and Multivariate BURR Distributions,* Pak. J. Stat., Series A, pp. 1-24.
[11] Zheng, G. and Gastwirth, J.L., 2000. *Where is the Information on Order Sample?,* Statistics sinica, Vol. 10, pp. 1276-1280.
[12] Zheng, G. and Gastwirth, J.L., 2001. *On the Fisher Information in Randomly Censored Data,* Statsitics and Probability Letters, Vol. 52, pp. 421-426.
[13] Zheng, G. and Gastwirth, J.L., 2002. *Do Tails of Symmetric Distributions Contain More Fisher Information about the Scale Parameter?,* Sankhya, Vol. 64, Series B, pp. 289-300.