گشتاورها در زنجیر مارکوف

سید محمود میرخان[۱]

چکیده

یکی از مهمترین مباحث در زنجیرهای مارکوف محاسبه میانگین و واریانس تعداد گامها تا رسیدن به مکان مورد نظر است. در این مقاله ابتدا حالت کلی تعداد گامها تا رسیدن به مجموعه مکانهای مورد نظر بدون دیدار از مجموعه مکانهایی دیگر معرفی شده ، سپس میانگین ،گشتاورهای r ام و تابع مولد گشتاور آن تعریف شده اند. برای محاسبه این مقادیر در زنجیرهای مارکوف ارگودیک ، روش تحلیلی با استفاده از دستگاه معادلات بازگشتی و روش مبتنی بر محاسبه ماتریسی بیان شده است. هر یک از این روشها نه تنها شیوه محاسباتی قبل را تعمیم داده بلکه روابطی جدید و ساده تر ارائه می کند. در انتها موارد فوق را برای زنجیرهای مارکوف تحویل پذیر به مکانهای گذرا و بازگشتی بیان می کنیم. جهت درک بهتر روابط بیان شده در این مقاله ، مثالهایی متنوع و جالب همراه با برنامه های کامپیوتری نرم افزار Matlab ارائه شده است.

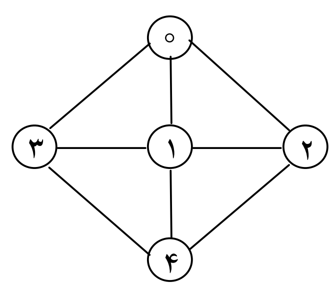
واژه های کلیدی : زنجیر مارکوف - امید ریاضی - گشتاورها - تابع مولد گشتاور - نرم افزار Matlab

۱. مقدمه

برای شروع بحث به مثال زیر توجه کنید.

مسئله۱) گراف زیر را در نظر بگیرید.

فرض کنید یک ذره با شروع از یک گره (یا راس) بتواند با احتمال یکسان به تعداد یالهای آن گره به گره های مجاور آن گام بردارد. به این نوع حرکت گام زدن تصادفی روی گراف می گویند. اگر X_n مکان ذره در گام n ام باشد ماتریس انتقال آن به صورت زیر می گردد.



$$P=\begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ \\ \frac{۱}{۴} & ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ \end{pmatrix} \qquad S=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$$

اگر ذره از مکان (در اینجا گره) ۲ شروع به حرکت کند میانگین و واریانس تعداد گامهای ذره برای رسیدن به مکان ۳ قبل از دیدار مکان ۴ چه هستند؟

جهت حل مسائلی از این قبیل برای زنجیر مارکوف $\{X_n, n\geq ۰\}$ ابتدا متغیرهای تصادفی زیر را تعریف می کنیم. فرض کنید:

$$T_{C_i}=\min\{n\geq ۱\ ,\ X_n\in C_i\}$$

تعداد گامها تا اولین دیدار مجموعه مکانهای C_i،

$$T_{xC_i}$$

تعداد گامها تا اولین دیدار مجموعه مکانهای C_i با شروع از مکان x و

$$_{C_j}T_{xC_i}$$

تعداد گامها تا اولین دیدار مجموعه مکانهای C_i با شروع از مکان x بدون دیدار مجموعه مکانهای C_j باشد که در آنها $i,j=۱,۲,\cdots,m$ و $i\neq j$ هستند.

مقادیر احتمال، امید ریاضی، واریانس، گشتاورهای r ام و تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی فوق به ترتیب عبارت اند از:

$$P_x(T_{C_i}<T_{C_j})=P({}_{C_j}T_{xC_i}<\infty)=\sum_{k=۱}^{\infty}P({}_{C_j}T_{xC_i}=k)={}_{C_j}f_{xC_i}=\sum_{k=۱}^{\infty}{}_{C_j}f_{xC_i}^{k}$$

۱- دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

$$E_x(T_{C_i} < T_{C_j}) = E({}_{C_j}T_{xC_i}) = {}_{C_j}m_{xC_i} = \sum_{k=1}^{\infty} k \times {}_{C_j}f^k_{xC_i}$$

$$Var_x(T_{C_i} < T_{C_j}) = Var({}_{C_j}T_{xC_i}) = E({}_{C_j}T_{xC_i}{}^2) - \left(E({}_{C_j}T_{xC_i})\right)^2$$

$$E({}_{C_j}T_{xC_i}{}^r) = {}_{C_j}m_{xC_i}{}^{(r)} = \sum_{k=1}^{\infty} k^r \times {}_{C_j}f^k_{xC_i}$$

$$E(e^{t\,{}_{C_j}T_{xC_i}}) = {}_{C_j}M_{xC_i}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{kt} \times {}_{C_j}f^k_{xC_i}$$

توجه کنید که $\frac{d}{dt}\,{}_{C_j}M_{xC_i}(t)\Big|_{t=0} = {}_{C_j}m_{xC_i}{}^{(1)} = {}_{C_j}m_{xC_i}$ همان میانگین تعداد گامها تا رسیدن به مجموعه مکانهای C_i با شروع از مکان x بدون دیدار مجموعه مکانهای C_j است.

در حالت کلی برای زنجیر مارکوف تحویل ناپذیر بازگشتی مثبت (ارگودیک) مجموعه مکانهای C_i و C_j زیر مجموعه های مجزای فضای وضعیت S بوده و مکان x نیز عضو $S_T = S - \{C_i \bigcup C_j\}$ است.

در اکثر منابع، فرآیندهای تصادفی برای زنجیر های مارکوف تحویل پذیر به مکانهای گذرا و بازگشتی (زنجیرهای جاذب)، احتمال جذب و میانگین تعداد گامها برای جذب به مجموعه مکانهای بازگشتی با شروع از مکانهای گذرا با روابطی نسبتا پیچیده محاسبه شده است. همچنین برای زنجیر های مارکوف ارگودیک تنها احتمال، میانگین و واریانس تعداد گامها برای رسیدن به یک مکان مورد بررسی قرار گرفته است. (به مراجع [۲] ، [۳] و [۵] مراجعه کنید.) در مرجع [۴] نیز برای حالتی خاص، میانگین تعداد دیدار از مجموعه مکانهای C_j با شروع از مجموعه مکانهای C_i بدون دیدار از مجموعه مکانهای C_i یا به اصطلاح آن تحت تابوی C_i معرفی شده است.
لیکن در هیچیک از آنها به مسائلی از قبیل مسئله ۱ و نیز حالت کلی مورد نظر ما اشاره نشده است. در این مقاله با تعمیم موارد گذشته برای زنجیرهای ارگودیک، به معرفی و محاسبه میانگین و گشتاورهای مختلف تعداد گامها تا رسیدن به مجموعه مکان مورد نظر بدون دیدار مجموعه مکانهای دیگر می پردازیم. در ادامه این مطلب را به سادگی برای زنجیرهای مارکوف تحویل پذیر به مکانهای بازگشتی و گذرا (زنجیرهای جاذب) تعمیم می دهیم. مقاله شامل مثال هایی کاربردی از موارد ذکر شده است که محاسبات آنها به روش تحلیلی با استفاده از دستگاه معادلات بازگشتی و به روش مبتنی بر اعمال ماتریسی با استفاده از نرم افزار Matlab انجام گرفته است. از جمله مثال هایی که ارائه شده می توان به محاسبه گشتاورها در زنجیر گام زدن تصادفی روی گراف و محاسبه میانگین تعداد دور بازی تا ورشکستگی یک بازیکن اشاره کرد. لازم به ذکر است که روابط بیان شده در این مقاله بسیار ساده تر و مناسبتر از روابط ارائه شده در منابع فوق بوده که برای حالتهای خاص به کار رفته است.

۲. گشتاورها در زنجیر ارگودیک

فرض کنید زنجیر مارکوف $\{X_n, n \ge 0\}$ تحویل ناپذیر بازگشتی مثبت (ارگودیک) باشد. در آن صورت داریم:

لم ۱) برای زنجیر مارکف ارگودیک $\{X_n, n \ge 0\}$ با فضای وضعیت S و احتمال انتقال P_{xy}، میانگین و گشتاورهای تعداد گامها تا اولین دیدار مجموعه مکانهای C_i با شروع از مکان x بدون دیدار مجموعه مکانهای C_j (یعنی ${}_{C_j}T_{xC_i}$) برای $x \in S_T = S - \{C_i \bigcup C_j\}$ و $C_i \bigcap C_j = \phi$ ،$C_i, C_j \subset S$ و به ازای $i \ne j$ و $i, j = 1, 2, \cdots, m$ ، روابط بازگشتی زیر ثابت می شوند.

$$E({}_{C_j}T_{xC_i}) = {}_{C_j}f_{xC_i} + \sum_{y \in S_T} P_{xy}\, E({}_{C_j}T_{yC_i})$$

$$E({}_{C_j}T_{xC_i}{}^r) = {}_{C_j}f_{xC_i} + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} \sum_{y \in S_T} P_{xy}\, E({}_{C_j}T_{yC_i}{}^k)$$

$$E(e^{t\,{}_{C_j}T_{xC_i}}) = e^t\,{}_{C_j}P_{xC_i} + e^t \sum_{y \in S_T} P_{xy}\, E(e^{t\,{}_{C_j}T_{yC_i}})$$

که در آن ${}_{C_j}P_{xC_i}$ احتمال انتقال یک گامی با شروع از مکان x به مجموعه مکانهای C_i (البته بدون دیدار C_j) است.

اثبات : برای اثبات روابط فوق ابتدا رابطه بازگشتی اولین دیدار را با توجه به خاصیت مارکوف زنجیر ثابت می کنیم.

$$\begin{aligned}
{}_{C_j}f^{k+1}_{xC_i} &= P({}_{C_j}T_{xC_i} = k+1) \\
&= P(X_1 \in S_T, \cdots, X_{k+1} \in S_T, X_k \in C_i \mid X_0 = x) \\
&= P_x(X_1 \in S_T, \cdots, X_{k+1} \in S_T, X_k \in C_i) \\
&= \sum_{y \in S_T} P_x(X_1 = y) \\
&\quad P_x(X_2 \in S_T, \cdots, X_{k+1} \in S_T, X_k \in C_i \mid X_1 = y) \\
&= \sum_{y \in S_T} P_x(X_1 = y) \\
&\quad P(X_2 \in S_T, \cdots, X_{k+1} \in S_T, X_k \in C_i \mid X_1 = y) \\
&= \sum_{y \in S_T} P_{xy}\, {}_{C_j}f^k_{yC_i}
\end{aligned}$$

حال برای $x \in S_T$ داریم:

$$E({}_{C_j}T_{xC_i}) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\; {}_{C_j} f_{xC_i}^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{C_j}f_{xC_i}^{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{y\in S_T} P_{xy}\; {}_{C_j} f_{yC_i}^{k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{C_j}f_{xC_i}^{k+1} + \sum_{y\in S_T} P_{xy} \sum_{k=1}^{\infty} k\; {}_{C_j}f_{yC_i}^{k}$$
$$= {}_{C_j}f_{xC_i} + \sum_{y\in S_T} P_{xy}\, E({}_{C_j}T_{yC_i})$$

به همین ترتیب رابطه بازگشتی گشتاور r ام را برای $x \in S_T$ و $r \geq 2$ به دست می آوریم.

$$E({}_{C_j}T_{xC_i}{}^{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^r\; {}_{C_j} f_{xC_i}^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} k^i\; {}_{C_j}f_{xC_i}^{k+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} {}_{C_j}f_{xC_i}^{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{r} \binom{r}{k} k^i\; {}_{C_j} f_{xC_i}^{k+1}$$
$$= {}_{C_j}f_{xC_i} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{r} \binom{r}{k} k^i \sum_{y\in S_T} P_{xy}\; {}_{C_j}f_{yC_i}^{k}$$
$$= {}_{C_j}f_{xC_i} + \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} \sum_{y\in S_T} P_{xy} \sum_{k=1}^{\infty} k^i\; {}_{C_j} f_{yC_i}^{n}$$
$$= {}_{C_j}\; f_{xC_i} + \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} \sum_{y\in S_T} P_{xy}\, E({}_{C_j}T_{yC_i}{}^{i})$$

همچنین رابطه بازگشتی تابع مولد گشتاور به صورت زیر ثابت می شود.

$$E(e^{t\; {}_{C_j}T_{xC_i}}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{t(n+1)}\; {}_{C_j}\, f_{xC_i}^{n+1}$$
$$= e^t\; {}_{C_j}f_{xC_i}^{1} + e^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} \sum_{y\in S_T} P_{xy}\; {}_{C_j}f_{yC_i}^{n}$$
$$= e^t\; {}_{C_j}f_{xC_i}^{1} + e^t \sum_{y\in S_T} P_{xy} \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn}\; {}_{C_i}f_{yC_i}^{n}$$
$$= e^t\; {}_{C_j}P_{xC_i} + e^t \sum_{y\in S_T} P_{xy}\, E(e^{t\; {}_{C_j}T_{yC_i}})$$

البته با توجه به ارگودیک بودن زنجیر جابجایی سریها مجاز و مقادیر بالا موجود هستند. بنابراین اثبات لم کامل است.

ضمنا روابط بازگشتی لم (۱) را به صورت زیر می نویسیم.

$${}_{C_j}m_{xC_i} = {}_{C_j}f_{xC_i} + \sum_{y\in S_T} P_{xy}\; {}_{C_j}m_{yC_i}$$

$${}_{C_j}m_{xC_i}{}^{(r)} = {}_{C_j}f_{xC_i} + \sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k} \sum_{y\in S_T} P_{xy}\; {}_{C_j}m_{yC_i}{}^{(k)}$$

$${}_{C_j}M_{xC_i}(t) = e^t\; {}_{C_j}P_{xC_i} + e^t \sum_{y\in S_T} P_{xy}\; {}_{C_j}M_{yC_i}(t)$$

اینک به حل مسئله (۱) می پردازیم. ماتریس احتمال انتقال زنجیر چنین است.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad S = \{0,1,2,3,4\}$$

برای یافتن میانگین تعداد گامها برای رسیدن به مکان ۳ قبل از دیدار مکان ۴ (بدون دیدار مکان ۴) با شروع از مکان ۲ با فرضهای $x = 2$ ، $C_1 = \{3\}$ و $C_2 = \{4\}$ باید مقدار $E_2(T_3 < T_4) = E({}_4T_{23}) = {}_4m_{23}$ را محاسبه کنیم.

با توجه به لم ۱ و فرض $S_T = \{0,1,2\}$ ابتدا احتمالهای اولین دیدار از مکانها را از دستگاه معادلات زیر به دست می آوریم.

$$\begin{cases} {}_4f_{03} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\; {}_4f_{13} + \frac{1}{3}\; {}_4f_{23} \\ {}_4f_{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\; {}_4f_{03} + \frac{1}{4}\; {}_4f_{23} \\ {}_4f_{23} = \frac{1}{3}\; {}_4f_{03} + \frac{1}{3}\; {}_4f_{13} \end{cases}$$

به سادگی پاسخهای ${}_4f_{03} = \frac{5}{8}$ ، ${}_4f_{13} = \frac{1}{2}$ و ${}_4f_{23} = \frac{3}{8}$ حاصل می شوند.

سپس از دستگاه معادلات

$$\begin{cases} {}_4m_{03} = {}_4f_{03} + P_{00}\times {}_4m_{03} + P_{01}\times {}_4m_{13} \\ \qquad + P_{02}\times {}_4m_{23} = \frac{5}{8} + \frac{1}{3}\; {}_4m_{13} + \frac{1}{3}\; {}_4m_{23} \\ {}_4m_{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\; {}_4m_{03} + \frac{1}{4}\; {}_4m_{23} \\ {}_4m_{23} = \frac{3}{8} + \frac{1}{3}\; {}_4m_{03} + \frac{1}{3}\; {}_4m_{13} \end{cases}$$

مقادیر ${}_4m_{03} = \frac{137}{96} = 1/43$ ، ${}_4m_{13} = \frac{7}{6} = 1/17$ و ${}_4m_{23} = \frac{119}{96} = 1/24$ به دست می آیند. بنابراین میانگین تعداد گامها برای رسیدن به مکان ۳ قبل از دیدار مکان ۴ با شروع از مکان ۲ برابر ${}_4m_{23} = \frac{119}{96} = 1/24$ است.

از رابطه دوم لم ۱ گشتاور دوم به صورت

$$ {}_{C_j}m_{xC_i}^{(2)} = {}_{C_j}f_{xC_i} + 2\sum_{y\in S_T} P_{xy}\ {}_{C_j}m_{yC_i} + \sum_{y\in S_T} P_{xy}\ {}_{C_j}m_{yC_i}^{(2)} $$

نوشته شده که منجر به دستگاه معادلات

$$ \begin{cases} {}_4m_{03}^{(2)} = \frac{5}{8} + 2\left(\frac{1}{3}\ {}_4m_{13} + \frac{1}{3}\ {}_4m_{23}\right) \\ \qquad + \left(\frac{1}{3}\ {}_4m_{13}^{(2)} + \frac{1}{3}\ {}_4m_{23}^{(2)}\right) \\ {}_4m_{13}^{(2)} = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\ {}_4m_{03} + \frac{1}{4}\ {}_4m_{23}\right) \\ \qquad + \left(\frac{1}{4}\ {}_4m_{03}^{(2)} + \frac{1}{4}\ {}_4m_{23}^{(2)}\right) \\ {}_4m_{23}^{(2)} = \frac{3}{8} + 2\left(\frac{1}{3}\ {}_4m_{03} + \frac{1}{3}\ {}_4m_{13}\right) \\ \qquad + \left(\frac{1}{3}\ {}_4m_{03}^{(2)} + \frac{1}{3}\ {}_4m_{13}^{(2)}\right) \end{cases} $$

می گردد. با حل دستگاه مقدار $ {}_4m_{03}^{(2)} = \frac{953}{173} = 5/51$ بدست می آید. بنابراین واریانس تعداد گامها برای رسیدن به مکان ۳ قبل از دیدار مکان ۴ با شروع از مکان ۲ برابر است با:

$$ Var({}_4T_{23}) = {}_4m_{23}^{(2)} - ({}_4m_{23})^2 = \frac{997}{251} = 3/97 $$

همانطور که مشاهده می کنید محاسبه مقادیر بیان شده در لم (۱) با روش تحلیلی حل دستگاه معادلات طولانی است. جهت ارائه روشی مبتنی بر اعمال بر روی ماتریسها و استفاده از محاسبات کامپیوتری بدین طریق عمل می کنیم.

برای زنجیرهای مارکوف ارگودیک با فضای وضعیت متناهی ماتریسها یا بردارهای زیر را تعریف می کنیم.

$$ f = \left({}_{C_j}f_{xC_i}\right) \quad , \quad m = \left({}_{C_j}m_{xC_i}\right) $$

$$ m^{(r)} = \left({}_{C_j}m_{xC_i}^{(r)}\right) \quad , \quad M(t) = \left({}_{C_j}M_{xC_i}(t)\right) $$

حال ماتریس احتمال انتقال $P = \left(P_{xy}\right)$ را در نظر گرفته و زیرماتریس Q و بردار R را بدین صورت معرفی می کنیم.

ماتریس مربع Q متشکل از احتمالهای انتقال از مجموعه مکان S_T به مجموعه مکان S_T است یعنی

$$ Q = \left(P_{xy}\right) \qquad x, y \in S_T $$

بردار ستونی R متشکل از مجموع مولفه های ستونی احتمالهای انتقال از مجموعه مکان S_T به مجموعه مکان C_i است یعنی

$$ R = \left(\sum_{y\in C_i\,,\ y\notin C_j} P_{xy}\right) \qquad x \in S_T $$

بدلیل استفاده مکرر از ماتریس زیر و جهت حفظ سادگی روابط مبتنی بر ماتریس که از لم ۱ نتیجه می گیریم ماتریس مربع زیر را معرفی می کنیم. این ماتریس شامل مولفه هایی با مقدار امید تعداد ملاقات از مکانهای S_T بوده که تعمیمی از ماتریس مقدماتی (پتانسیل) است که در مراجع [۲]، [۳] و [۵] تعریف شده اند. ما نیز این ماتریس را ماتریس مقدماتی می گوییم.

$$ G = \left(E_x(N(y))\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_{xy}^n\right) = (I-Q)^{-1} $$

$$ x, y \in S_T $$

که در آن I ماتریس یکه با ابعاد Q بوده و متغیر تصادفی $N(y)$ تعداد دیدار از y است. توجه کنید که چون اندازه مقادیر ویژه ماتریس Q کمتر از یک است لذا معکوس پذیری ماتریس بالا موجه می باشد.

لم ۲) برای زنجیر مارکف ارگودیک $\{X_n, n\geq 0\}$ با فضای وضعیت متناهی S و ماتریس احتمال انتقال $P = \left(P_{xy}\right)$، احتمال اولین دیدار مجموعه مکانهای C_i، میانگین و گشتاورهای تعداد گامها تا اولین دیدار مجموعه مکانهای C_i با شروع از مکان x بدون دیدار مجموعه مکانهای C_j (یعنی ${}_{C_j}T_{xC_i}$) برای $x \in S_T = S - \{C_i \bigcup C_j\}$ و $C_i \bigcap C_j = \phi$ ، $C_i , C_j \subset S$ و به ازای $i \neq j$ و $i, j = 1,2,\cdots,m$ روابط بازگشتی مبتنی بر ماتریس به صورت زیر ثابت می شوند.

$$ f = \left({}_{C_j}f_{xC_i}\right) = G\,R $$

$$ m = m^{(1)} = \left({}_{C_j}m_{xC_i}\right) = G^2 R $$

$$ m^{(r)} = \left({}_{C_j}m_{xC_i}^{(r)}\right) = G^2 R + (G-I)\sum_{k=1}^{r-1}\binom{r}{k} m^{(k)} $$

$$ r \geq 2 $$

$$ M(t) = \left({}_{C_j}M_{xC_i}(t)\right) = e^t\,(I - e^t Q)^{-1} R $$

اثبات : ابتدا رابطه مبتنی بر ماتریس را برای محاسبه احتمال اولین دیدار ثابت می کنیم. به سادگی از رابطه بازگشتی

$$ {}_{C_j}f_{xC_i} = {}_{C_j}P_{xC_i} + \sum_{y\in S_T} P_{xy}\ {}_{C_j}f_{yC_i} $$

رابطه ماتریسی زیر به دست می آید.

$$ (I-Q)\,f = R \qquad \Rightarrow\ f = R + Q\,f $$

$$ \Rightarrow\ f = (I-Q)^{-1} R = G\,R $$

با استفاده از روابط لم ۱ ماتریس میانگین تعدادگامها تا اولین دیدار مجموعه مکانهای C_i با شروع از مکان x بدون دیدار مجموعه

مکانهای C_j برابر است با:

$$m = m^{(1)} = GR + Qm \Rightarrow (I-Q)m = GR$$
$$\Rightarrow m = G^{2}R$$

همچنین به ازای $r \geq 2$ از رابطه بازگشتی گشتاور r ام در لم ۱ بدست می آوریم که:

$$m^{(r)} = GR + \sum_{k=1}^{r-1}\binom{r}{k} Q m^{(k)} + Q m^{(r)}$$

$$(I-Q)m^{(r)} = GR + \sum_{k=1}^{r-1}\binom{r}{k} Q m^{(k)}$$

بنابراین

$$m^{(r)} = G\left[GR + \sum_{k=1}^{r-1}\binom{r}{k} Q m^{(k)}\right]$$
$$= G^{2}R + GQ\sum_{k=1}^{r-1}\binom{r}{k} m^{(k)}$$

و اثبات رابطه با توجه به این که $GQ = G - I$ است کامل می گردد. ضمنا در حالت های خاص داریم:

$$m^{(2)} = (2G - I)G^{2}R$$
$$m^{(3)} = (6G^{2} - 6G + I)G^{2}R$$

برای اثبات رابطه بازگشتی تابع مولد گشتاور از لم ۱ داریم:

$$M(t) = e^{t}(I - e^{t}Q)^{-1}R$$
$$\Rightarrow M(t) = e^{t}R + e^{t}QM(t)$$

بنابراین اثبات لم کامل است.

لم ۳) در صورتی که تنها یک مجموعه C_i داشته باشیم آنگاه احتمال رسیدن به آن حتمی بوده و برای $x \in S_T$ مقدار $f_{xC_i} = 1$ است. پس بردار مربوط به آن برابر $f = GR = \langle 1 \rangle$ می گردد که در آن $\langle 1 \rangle$ بردار ستونی با مولفه های یک است. همچنین در این حالت روابط میانگین و گشتاور r ام برای لم های ۱ و ۲ به صورت زیر در می آیند.

$$E(T_{xC_i}) = 1 + \sum_{y \in S_T} P_{xy} E(T_{yC_i})$$

$$E({T_{xC_i}}^{r}) = 1 + \sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}\sum_{y \in S_T} P_{xy} E({T_{yC_i}}^{k})$$

$$m = m^{(1)} = G\langle 1 \rangle$$

$$m^{(r)} = G\langle 1 \rangle + (G - I)\sum_{k=1}^{r-1}\binom{r}{k} m^{(k)} \qquad r \geq 2$$

در منابع مختلف فرآیندهای تصادفی برای زنجیرهای تحویل پذیر به مکانهای گذرا و بازگشتی (زنجیر جاذب) تنها این موارد خاص برای محاسبه میانگین و واریانس تعداد گامها ی طی شده در مجموعه مکانهای گذرای S_T تا جذب در مجموعه مکانهای بازگشتی C_i بیان شده است. ضمنا در این منابع روابط مبتنی بر ماتریس برای محاسبه گشتاور دوم خیلی پیچیده تر از روابط بالا است[۵].

مثال ۲) مسئله ۱ را با روش ماتریسی حل کنید.

ماتریس احتمال انتقال زیر را در نظر بگیرید.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad S = \{0,1,2,3,4\}$$

برای ماتریس احتمال انتقال فوق با فرض $x = 2$، $C_1 = \{3\}$، $C_2 = \{4\}$ و $S_T = \{0,1,2\}$ ماتریس و بردار

$$Q = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$ و

$$R = \begin{pmatrix} P_{03} \\ P_{13} \\ P_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

بدست می آید. ماتریس مقدماتی برابر است با:

$$G = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{8} & \frac{2}{3} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & \frac{2}{3} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

با استفاده از روابط لم ۲ به راحتی داریم:

$$m = m^{(1)} = G^{2}R = \begin{pmatrix} {}_4m_{03} \\ {}_4m_{13} \\ {}_4m_{23} \end{pmatrix}$$

$$m^{(2)} = G^{2}R + 2(G - I)m^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 4/61 \\ 5/51 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

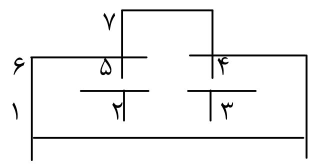
$$\left(Var({}_{C_j}T_{xC_i})\right) = m^{(2)} - ({}_{C_j}{m_{xC_i}}^{2})$$
$$= \begin{pmatrix} 3/56 \\ 3/25 \\ 3/97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Var({}_4T_{03}) \\ Var({}_4T_{13}) \\ Var({}_4T_{23}) \end{pmatrix}$$

بنابراین میانگین و واریانس تعداد گامهای ذره برای رسیدن به مکان ۳ قبل از دیدار مکان ۴ با شروع از مکان ۲ به ترتیب برابر ${}_4m_{23} = 1/24$ و $Var({}_4T_{23}) = 3/97$ هستند.

برنامه کامپیوتری Matlab جهت محاسبات بالا چنین است.

```
Q = [0 1/3 1/3;1/4 0 1/4;1/3 1/3 0];
R = [1/3;1/4;0];
G =inv(eye(size(Q))-Q);
m1=(G^2)*R          %for rational answer uses rats()
m2=m1+2*(G-eye(size(Q)))*m1;
for i=1:2
  V(i)=m2(i)-m1(i)^2;
end
V
```

مثال ۳) یک موش در حجره های زیر به تصادف حرکت می کند.



اگر در حجره های ۶ و ۷ تله و در حجره های ۳ و ۴ پنیر قرار دهیم میانگین تعداد گامهای موش برای رسیدن به پنیر بدون افتادن در تله ها با شروع از حجره ۲ چقدر است؟

اگر حرکت موش از هر مکان (حجره) به مکان مجاور با احتمال یکسان به تعداد راههای قابل عبور باشد آنگاه ماتریس احتمال انتقال حرکت موش در مکانهای مختلف به صورت زیر است،

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$$

با فرض $x=2$ ، $C_1=\{3,4\}$ ، $C_2=\{6,7\}$ و $S_T=\{1,2,5\}$ ماتریس و بردار

$$Q=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{15} \\ P_{21} & P_{22} & P_{25} \\ P_{51} & P_{52} & P_{55} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$R=\begin{pmatrix} P_{13}+P_{14} \\ P_{23}+P_{24} \\ P_{53}+P_{54} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0 \\ \frac{1}{3}+0 \\ 0+\frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

بدست می آید. ماتریس مقدماتی برابر است با:

$$G=(I-Q)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{11}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

با استفاده از روابط لم ۲ به سادگی داریم:

$$f=GR=\begin{pmatrix} \frac{11}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{7}{18} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {}_{C_2}f_{1C_1} \\ {}_{C_2}f_{2C_1} \\ {}_{C_2}f_{5C_1} \end{pmatrix}$$

$$m=G^2R=\begin{pmatrix} {}_{C_2}m_{1C_1} \\ {}_{C_2}m_{2C_1} \\ {}_{C_2}m_{5C_1} \end{pmatrix}$$

در نتیجه احتمال این که موش به پنیر برسد (به مجموعه مکان $C_1=\{3,4\}$ برسد) قبل از این که در تله بیافتد (به مجموعه مکان $C_2=\{6,7\}$ برسد) با شروع از مکان ۲ برابر ${}_{C_2}f_{2C_1}=\frac{5}{9}$ بوده و میانگین تعداد گامهای آن برابر ${}_{C_2}m_{2C_1}=\frac{28}{27}=1/04$ است. توجه کنید که هم احتمال این که موش با شروع از مکان ۲ به پنیر برسد و هم میانگین تعداد گامهای آن بیشتر از مقدار آنها برای حالتی است که موش با شروع از مکانهای ۱ یا ۵ به پنیر برسد.

از طرف دیگر با استفاده از رابطه مربوط به تابع مولد گشتاور لم ۲ داریم:

$$M(t)=e^t\,(I-e^tQ)^{-1}\,R=\begin{pmatrix} \dfrac{\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{6}e^{3t}}{4-e^{2t}} \\ \dfrac{\frac{4}{3}e^{t}+\frac{1}{3}e^{2t}}{4-e^{2t}} \\ \dfrac{\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{6}e^{t}(6-e^{2t})}{4-e^{2t}} \end{pmatrix}$$

پس تابع مولد گشتاور تعداد گامها تا دیدار مجموعه مکان $C_1=\{3,4\}$ قبل از دیدار مجموعه مکان $C_2=\{6,7\}$ با شروع از مکان ۲ برابر است با :

$${}_{C_2}M_{2C_1}(t)=\frac{\frac{4}{3}e^{t}+\frac{1}{3}e^{2t}}{4-e^{2t}}$$

با مشتق گیری از آن برحسب t و قرار دادن $t=0$ مجددا میانگین زیر به دست می آید.

$${}_{C_2}m_{2C_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{4}{3}e^{t}+\frac{1}{3}e^{2t}}{4-e^{2t}}\right)_{t=0}=\frac{28}{27}=1/04$$

برنامه کامپیوتری Matlab جهت محاسبات بالا چنین است.

```
clear all;
Q=[0 1/2 0;1/3 0 1/3;0 1/4 0];
G=inv(eye(3)-Q);  rats(G)
R=[0;1/3;1/4];
f=G*R;    rats(f)
m=G^2*R;  rats(m)
syms t
M=exp(t)*inv(eye(3)-exp(t)*Q)*R;
pretty(M)
dM=diff(M);
pretty(simplify(dM))
```

۳. گشتاورها در زنجیر جاذب

در برخی از منابع فرآیندهای تصادفی زنجیر مارکوف تحویل پذیر به مکانهای گذرا و بازگشتی را زنجیر جاذب می گویند. (به مراجع ۱ و ۵ مراجعه کنید.) تعمیم لم های ۱ و ۲ برای زنجیرجاذب به سادگی با یک تبدیل انجام می گیرد. با فرض این که مجموعه مکانهای S_T برای وضعیتهای گذرا و مجموعه مکانهای C_i ($i=1,2,\cdots,m$) برای مجموعه وضعیتهای بازگشتی در نظر گرفته شوند، میانگین و گشتاورهای مختلف تعداد گامها تا جذب به مجموعه مکانهای C_i بدون دیدار از مجموعه مکانهای C_j ها برای $i \neq j$ با استفاده از روابط لم های ۱ و ۲ قابل محاسبه هستند.

برای تبدیل ماتریس انتقال زنجیر ارگودیک به ماتریس انتقال زنجیره جاذب بدین طریق عمل می کنیم. ابتدا مجموعه مکانهای C_i را جاذب می کنیم یعنی برای هر مجموعه مکانهای C_i یک سطر در نظر گرفته که در آن $P_{C_i C_i}=1$ ($i=1,2,\cdots,m$) و سایر مولفه های سطر مربوط به C_i برابر صفر باشد. سپس مجموع مولفه های هر ستون مربوط به احتمال انتقال مکانهای گذرا به مجموعه مکانهای C_i را محاسبه و در محل آن قرار می دهیم. در انتها مولفه های مربوط به احتمالهای انتقال از مکانهای گذرا به مکانهای گذرا را بدون هیچ تغییری می نویسیم.

مثلا ماتریس احتمال انتقال مثال ۳ با جابجایی سطرها و ستونها و با فرض $C_1=\{3,4\}$ ، $C_2=\{6,7\}$ و $S_T=\{1,2,5\}$ به یک ماتریس انتقال زنجیر جاذب به صورت

$$P=\begin{array}{c}C_1=\{3,4\}\\C_2=\{6,7\}\\1\\2\\5\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0+0&\frac{1}{2}+0&0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{3}+0&0+0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0+\frac{1}{4}&\frac{1}{4}+\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}I&(0)\\R&Q\end{pmatrix}$$

تبدیل می شودکه در آن داریم:

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad (0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}\qquad R=(R_1,R_2)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

بنابراین در مثال ۳ میانگین تعداد گامها تا جذب در $C_1=\{3,4\}$ بدون دیدار $C_2=\{6,7\}$ با شروع از مکان ۲ محاسبه شده است.

این مطلب را می توان تعمیم داده و گشتاورهای تعداد گامها تا جذب در مجموعه مکانهای بازگشتی C_i بدون دیدار یا قبل از دیدار مجموعه مکانهای بازگشتی C_i، C_j، C_k و $\cdots$ با شروع از مکان گذرای $x \in S_T$ محاسبه نمود. در این حالت نیز روابط لم های ۱ و ۲ به قوت خود باقی هستند فقط به جای R از R_i استفاده می کنیم.

در حالت کلی ماتریس انتقال زنجیر مارکف تحویل پذیر به مکانهای گذرا و بازگشتی (زنجیر جاذب) به یکی از صورتهای ماتریس بلوکی زیر نشان داده می شود.

$$P=(P_{xy})=\begin{pmatrix}I&(0)\\R&Q\end{pmatrix}\qquad\text{یا}$$

$$P=\begin{pmatrix}Q&R\\(0)&I\end{pmatrix}\qquad x,y\in S$$

که در آن (0) ماتریس صفر، I ماتریس یکه حاصل از انتقالهای C_i به C_i با فرض $P_{C_i C_i}=1$ ($i=1,2,\cdots,m$) و سایر مولفه های سطری C_i برابر صفر ، ماتریس یا بردار R متشکل از مجموع احتمالهای انتقال مولفه های ستونی هر مجموعه مکانهای بازگشتی C_1، C_2 ، $\cdots$ و C_m با شروع از مکانهای گذرا به صورت $R=(R_1 \quad R_2 \quad \cdots \quad R_m)$ و زیر ماتریس Q متشکل از احتمالهای انتقال از مکانهای گذرا به گذرا هستند. فضای وضعیت زنجیر را با S نشان داده که به مجموعه مکانهای گذرا S_T و مجموعه مکانهای بازگشتی C_i برای $i=1,\cdots,m$ تفکیک شده است. (مرجع (۱) را ببینید.)

مثال ۴) در زنجیر ورشکستگی بازیکن برای $d=3$ با ماتریس انتقال زیر میانگین و تابع مولد گشتاور تعداد گامها تا جذب در هر کدام از مکانهای بازگشتی با شروع از مکانهای گذرا را بیابید.

$$S=\{0,1,2,3\} \qquad P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

به سادگی معلوم می شود که مکانهای $C_1=\{0\}$ و $C_2=\{3\}$ بازگشتی و مکانهای $S_T=\{1,2\}$ گذرا هستند. همچنین

$$R=\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad ، \quad Q=\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین ماتریس مقدماتی برابر است با

$$G=(I-Q)^{-1}=\frac{1}{1-p+p^2}\begin{pmatrix} 1 & p \\ 1-p & 1 \end{pmatrix}$$

ماتریس میانگینها و ماتریس تابع مولد گشتاورهای تعداد گامها تا جذب در C_i بدون دیدار C_j به ترتیب برابرند با

$$m=\begin{pmatrix} m_{1.} & m_{13} \\ m_{2.} & m_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E(T_1) & E(T_{13}) \\ E(T_2) & E(T_{23}) \end{pmatrix}=$$

$$G^2R=\frac{1}{(1-p+p^2)^2}\begin{pmatrix} (1+p-p^2)(1-p) & 2p^2 \\ 2(1-p)^2 & (1+p-p^2)p \end{pmatrix}$$

$$M(t)=e^t\,(I-e^tQ)^{-1}\,R$$
$$=\frac{1}{1-pe^{2t}+p^2e^{2t}}\begin{pmatrix} (-1+p)e^t & p^2e^{2t} \\ (-1+p)^2\,e^{2t} & pe^t \end{pmatrix}$$

مثلا به ازای $p=\frac{1}{2}$ ماتریسهای زیر حاصل می شوند.

$$M(t)=\frac{1}{4-e^{2t}}\begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^{2t} & 2e^t \end{pmatrix}$$

$$m=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

برنامه کامپیوتری Matlab جهت محاسبات گشتاورهای مختلف مثال ۴ چنین است.

```
syms t p
P = [1 0 0 0;1-p 0 p 0;0 1-p 0 p;0 0 0 1];
Q = [0 p;1-p 0];   R = [1-p 0;0 p];
N =inv(eye(size(Q))-Q)
m1=(N^2)*R;
fprintf ' The Mean m1= '\n;    pretty(simplify(m1))
m2=m1+(N-eye(size(Q)))*2*m1;
for i=1:2
   for j=1:2
      V(i,j)=m2(i,j)-m1(i,j)^2;
   end
end
fprintf ' The Variance V= '\n;    pretty(simplify(V))
M=exp(t)*inv(eye(size(Q))-exp(t)*Q)*R;
fprintf ' M(t)= '\n;     pretty(simplify(M))
dM=diff(M);
fprintf ' dM(t)/dt= '\n;   pretty(simplify(dM))
fprintf '
************************************** '\n;
```

مثال۵) زنجیر ورشکستگی بازیکن با فضای وضعیت $S=\{0,1,\cdots,d\}$ و تابع احتمال انتقال زیر را درنظر بگیرید.

$$P_{xy}=\begin{cases} p & y=x+1 \\ q & y=x-1 \end{cases} \qquad x,y=1,2,\cdots,d-1$$

و

$$P_{..}=P_{dd}=1 \qquad (\ p,q>0\ ,\ p+q=1)$$

میانگین تعداد دور بازی تا ورشکستگی بازیکن چقدر است؟

در رابطه میانگین لم ۱ مقادیر $C_1=\{0\}$ و $C_2=\{d\}$ و $S_T=\{1,2,\cdots,d-1\}$ را قرار داده به دستگاه معادلات زیر می رسیم.

$$\begin{cases} {}_dm_{x.}={}_df_{x.}+\sum_{y=1}^{d-1}P_{xy}\ {}_dm_{y.} \\ \qquad ={}_df_{x.}+p\ {}_dm_{x+1,.}+q\ {}_dm_{x-1,.} \quad 1\le x\le d-1 \\ {}_dm_{..}=0 \quad , \quad {}_dm_{d.}=0 \end{cases}$$

که در آن احتمال های جذب برای $x\in S_T$ برابرند با:

$$f_{x.}=\frac{(\frac{q}{p})^x-(\frac{q}{p})^d}{1-(\frac{q}{p})^d} \qquad p\ne q$$

$$f_{x.}=1-\frac{x}{d} \qquad p=q$$

در حالت متقارن $p=q=\frac{1}{2}$ دستگاه معادلات فوق با فرض $m_x={}_dm_{x.}$ به شکل دستگاه معادلات زیر در می آید.

$$\begin{cases} m_{x+1}-2m_x+m_{x-1}=2(1-\frac{x}{d}) & 1\le x\le d-1 \\ m_.=0 \quad , \quad m_d=0 \end{cases}$$

برای حل دستگاه با جمع بندی روی مقادیر x و شرط $m_{\cdot}=\circ$ رابطه

$$\sum_{y=1}^{x}(m_{y+1}-2m_y+m_{y-1})=2(x-\tfrac{x(x+1)}{2d})$$

$$m_{x+1}-m_x=m_1+2x-\frac{x(x+1)}{d}$$

به دست آمده که با جمع بندی مجدد روی مقادیر x به دست می آوریم:

$$\sum_{y=1}^{x-1}(m_{y+1}-m_y)=m_x-m_1=\sum_{y=1}^{x-1}(m_1+2y-\frac{y(y+1)}{d})$$

با کمی عملیات جبری و قرار دادن مقدار $x=d$ و شرط $m_d=\circ$ پاسخ دستگاه به صورت زیر به دست می آید. به عبارت دیگر میانگین تعداد دور بازی تا ورشکستگی بازیکن در حالت $p=q=\frac{1}{2}$ برابر است با

$$m_x={}_d m_{x\cdot}=\tfrac{1}{3d}x(d-x)(2d-x) \qquad x\in S$$

در حالت $p\neq q$ پاسخ دستگاه با فرض $\lambda=\frac{q}{p}$ برابر است با:

$$m_x={}_d m_{x\cdot}=\frac{x(\lambda^x+\lambda^d)(1-\lambda^d)-2d\,\lambda^d(1-\lambda^x)}{p(1-\lambda^d)(1-\lambda)}$$

ضمنا برای حد $d\to\infty$ در حالت $p<q$ مقدار ${}_d m_{x\cdot}=\dfrac{x}{q-p}$ می گردد.

همانطوری که در بسیاری از کتابهای فرآیندهای تصادفی ثابت شده است (مرجع (۵) را ببینید.) برای زنجیر ورشکستگی بازیکن میانگین تعداد گامها برای جذب به مکانهای ۰ یا d در حالت $p=q$ برابر است با

$$m_{x,\{\cdot,d\}}=x(d-x)$$

در نتیجه به راحتی می توان میانگین تعداد گامها تا جذب به d را از اختلاف $m_{x\{\cdot,d\}}-{}_d m_{x\cdot}$ به دست آورد. به عبارت دیگر میانگین تعداد گامها تا جذب به تفکیک مجموعه مکانهای جاذب تعمیم یافته است.

ضمنا تابع مولد گشتاور تعداد گامها تا جذب به مکان ۰ برای زنجیر ورشکستگی بازیکن درمعادلات زیر صدق می کند.

$$\begin{cases} {}_d M_{x\cdot}=e^t\,{}_d P_{x\cdot}+ \\ \qquad e^t(p\,{}_d M_{x+1,\cdot}+q\,{}_d M_{x-1,\cdot}) \quad 1\le x\le d-1 \\ {}_d M_{\cdot\cdot}=e^t \quad , \quad {}_d M_{d\cdot}=\circ \end{cases}$$

مراجع

[۱] میرخان، سید محمود ، ۱۳۸۱، کنکاش بیشتر در زنجیرهای مارکوف ، ششمین کنفرانس آمار در دانشگاه تربیت مدرس

[2] Erhan Cinlar., 1975, *Introduction to Stochastic Processes,* Prentice-Hall, Inc.

[3] Roe Goodman, 1988, *Introduction to Stochastic Models*, The Benjamin/Cumming Publishing Company, Inc.

[4] Latouche, G. and Ramaswami. V., 1999, Introduction to Matrix analytic methods in Stochastic Modeling, *American Statistical Association*

[5] Bhat B. R., 2000, *Stochastic Models Analysis and Applications*, New Age International Publishers.