حالتهای مرزی لم نیمن پیرسن

سعید اخلاقی[۱] عبد الحمید رضایی رکن آبادی[۲]

چکیده

علیرغم آنکه لم نیمن پیرسن یکی از اساسی ترین نتایج مربوط به تئوری آزمون فرضیه های آماری است، به حالتهای خاص آن که مقدار بحرانی آزمون مقادیرصفر یا بینهایت شود، کمتر پرداخته شده است.بررسی این حالتهای مرزی دریافت عمیق تری از مفاهیم مربوط به این لم اساسی را فراهم می سازد، که در این مقاله مفصلاً آنرا مورد بحث قرار می دهیم.

واژه های کلیدی: لم نیمن پیرسون، آزمون های فرض، پرتوان ترین آزمون، مقادیر بحرانی

۱. مقدمه

برای طرح حالتهای خاص مجموعه محدب نقاط خطا در لم نیمن پیرسن لازم است در ابتدا تعاریف، مفاهیم و قضایای مربوط به آن را مطرح کنیم.

فرض کنید $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ یک نمونه تصادفی n تایی از خانواده توزیع ها با چگالی $\{f_\theta,\theta\in\Omega\}$، $\Omega=\Omega_0\cup\theta_1$ ، باشد؛

تعریف۱-۱: ψ را یک آزمون در سطح α برای فرضیه $H_0:\theta\in\Omega_0$ در مقابل فرضیه ساده $H_1:\theta=\theta_1$ گوییم هرگاه:

$$E_\theta(\psi(\mathbf{X})\le\alpha$$

برای هر $\forall\theta\in\Omega_0$

$$E_\theta(\psi(\mathbf{X})\le$$

تعریف۱-۲: ψ^* را پرتوان ترین آزمون (آزمون MP) در سطح α برای فرضیه $H_0:\theta\in\Omega_0$ در مقابل فرضیه ساده $H_1:\theta=\theta_1$ گوییم هرگاه به ازای هر آزمون در سطح α ی دیگری مانند ψ برای H_0 در مقابل H_1

$$E_{\theta_1}(\psi^*(\mathbf{X}))\ge E_{\theta_1}(\psi(\mathbf{X}))$$

اکنون فرض کنید

$$\Omega=\{\theta_0,\theta_1\}$$

و

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{f_{\theta_1}(\mathbf{x})}{f_{\theta_0}(\mathbf{x})}=\frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})}$$

قضیه ۱-۱ (لم اساسی نیمن-پیرسن)

الف: هر آزمون ψ به شکل

$$\psi(\mathbf{x})=\begin{cases}1 & \lambda(\mathbf{x})>k\\ \gamma(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x})=k\\ 0 & \lambda(\mathbf{x})<k\end{cases}\qquad(1)$$

به ازای لا اقل یک $0\le k<\infty$ و $0\le\gamma(\mathbf{x})\le 1$ ، یک آزمون MP در سطح α ($(\alpha=E_{\theta_0}(\psi(\mathbf{X}))$) برای آزمودن فرضیه ساده $H_0:\theta=\theta_0$ در مقابل فرضیه ساده $H_1:\theta=\theta_1$ است و اگر $k=\infty$ باشد آزمون

$$\psi(\mathbf{x})=\begin{cases}1 & f_0=0\\ 0 & f_0>0\end{cases}\qquad(2)$$

پرتوان ترین آزمون در اندازه $\alpha=0$ برای آزمودن H_0 در مقابل H_1 است.

ب: به ازاء هر $0\le\alpha\le1$، آزمونی MP به شکل (۱) یا (۲) با $\gamma(\mathbf{x})=\gamma$ (γ یک ثابت است) وجود دارد به طوری که:

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد
۲- دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

$$E_{\theta_0}(\psi\ (\mathbf{X}))=\alpha$$

پ: آزمون داده شده بوسیله (۱) یا (۲) یکتاست (مگر روی یک مجموعه با اندازه صفر). یعنی اگر ψ آزمونی MP ، در اندازه α برای H_0 در مقابل H_1 باشد باید به شکل (۱) یا (۲) باشد مگر روی مجموعه ای مانند N طوری که $i=0,1$ $\quad P_{\theta_i}(N)=0$ در آزمون ψ نواحی بحرانی ، تصادفی شده و پذیرش به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$C=\{\mathbf{x}\mid\psi(\mathbf{x})=1\}=\{\mathbf{x}\mid\lambda(\mathbf{x})>k\} \tag{۳}$$

$$R=\{\mathbf{x}\mid\psi(\mathbf{x})=\gamma\}=\{\mathbf{x}\mid\lambda(\mathbf{x})=k\} \tag{۴}$$

$$A=\{\mathbf{x}\mid\psi(\mathbf{x})=0\}=\{\mathbf{x}\mid\lambda(\mathbf{x})<k\} \tag{۵}$$

اینک به منظور فهم بهتر لم نیمن پیرسن به بررسی آزمون (۱) ، معرفی شده در قسمت (الف) لم نیمن پیرسن، به ازای مقادیر مرزی $k=0$ و $k=\infty$ با $\gamma(\mathbf{x})=\gamma$ می پردازیم.

۱- وقتی $k=0$ و $\gamma(\mathbf{x})=\gamma$ باشد، در این حالت آزمون (۱) معر فی شده در لم نیمن پیرسن بصورت زیر تبدیل می شود:

$$\psi^*_\gamma(\mathbf{x})=\begin{cases}1 & \lambda(\mathbf{x})>0\\ \gamma & \lambda(\mathbf{x})=0\end{cases} \tag{۶}$$

نکته۱-۱: با توجه به آنکه یکی از دو فرضیه H_0 یا H_1 حتما برقرار است پس به ازای هر $\mathbf{x}$ لااقل یکی از دو مقدار $f_0(\mathbf{x})$ یا $f_1(\mathbf{x})$ حتما اکیدا مثبت است و هیچگاه هر دو با هم صفر نخواهند بود. به عبارت دیگر در حالت کلی

$$\chi=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})>0\}\cup\{\mathbf{x}\mid f_1(\mathbf{x})>0\}$$

و اگر بدانیم $f_0(\mathbf{x})=0$ است آنگاه

$$\chi=\{\mathbf{x}\mid f_1(\mathbf{x})>0\}$$

و همچنین اگر بدانیم $f_1(\mathbf{x})=0$ است آنگاه

$$\chi=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})>0\}$$

بنابراین طبق نکته۱-۱ نواحی بحرانی و تصادفی شده ψ^*_γ به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned}C^*&=\{\mathbf{x}\mid\lambda(\mathbf{x})>0\}=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})\ge 0\ \&\ f_1(\mathbf{x})>0\}\\&=\{\mathbf{x}\mid\mathfrak{R}^n\ \&\ f_1(\mathbf{x})>0\}=\{\mathbf{x}\mid f_1(\mathbf{x})>0\}\end{aligned} \tag{۷}$$

$$\begin{aligned}R^*&=\{\mathbf{x}\mid\lambda(\mathbf{x})=0\}=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})>0\ \&\ f_1(\mathbf{x})=0\}\\&=\{\mathbf{x}\mid\chi\ \&\ f_1(\mathbf{x})=0\}=\{\mathbf{x}\mid f_1(\mathbf{x})=0\}\end{aligned} \tag{۸}$$

در نتیجه خطای نوع اول و دوم ψ^*_γ به ترتیب به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned}\alpha^*_\gamma&=E_{\theta_0}\left(\psi^*_\gamma\ (\mathbf{X})\right)+P_{\theta_0}(\gamma(\mathbf{X})>0)+\gamma P_{\theta_0}(\lambda(\mathbf{X})=0)\\&=P_{\theta_0}(f_1(\mathbf{X})>0)+\gamma P_{\theta_0}(f_1(\mathbf{X})=0)\\&\ge P_{\theta_0}(f_1(\mathbf{X})>0)\end{aligned} \tag{۹}$$

$$\begin{aligned}\beta^*_\gamma&=E_{\theta_1}\left(1-\psi^*_\gamma(\mathbf{X})\right)=(1-\gamma)P_{\theta_1}(\lambda(\mathbf{X})=0)\\&=(1-\gamma)P_{\theta_1}(f_1(\mathbf{X})=0)\\&=(1-\gamma)\int_{\{\mathbf{x}\mid f_1=0\}}f_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0\end{aligned} \tag{۱۰}$$

و با توجه به اینکه $\beta^*_\gamma=0$ است پس توان آزمون ψ^*_γ مساوی یک است. بنابراین علاوه بر اینکه ψ^*_γ یک آزمون MP در سطح α^*_γ است یک آزمون MP در سطح یک نیز می باشد.

۲- اگر $k=\infty$ و $\gamma(\mathbf{x})=\gamma$ فرض شود آزمون (۱) معرفی شده در لم نیمن- پیرسن به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\psi_\gamma(\mathbf{x})=\begin{cases}\gamma & \lambda(\mathbf{x})=\infty\\ 0 & \lambda(\mathbf{x})<\infty\end{cases} \tag{۱۱}$$

بنابراین طبق نکته۱-۱ نواحی قبول و تصادفی شده ψ_γ به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned}A&=\{\mathbf{x}\mid\lambda(\mathbf{x})<\infty\}=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})>0\ \&\ f_1(\mathbf{x})\ge 0\}\\&=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})>0\ \&\ \mathfrak{R}^n\}=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})>0\}\end{aligned} \tag{۱۲}$$

$$\begin{aligned}R&=\{\mathbf{x}\mid\lambda(\mathbf{x})=\infty\}=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})=0\ \&\ f_1(\mathbf{x})>0\}\\&=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})=0\ \&\ \chi\}=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})=0\}\end{aligned} \tag{۱۳}$$

همچنین خطای نوع اول و دوم ψ_γ به ترتیب به صورت زیر می باشند:

$$\alpha_{\gamma}=E_{\theta_0}\left(\psi_{\gamma}(\mathbf{X})\right)=\gamma P_{\theta_0}\left(\lambda(\mathbf{X})=\infty\right)$$

$$=\gamma P_{\theta_0}\left(f_0(\mathbf{X})=0\right)=\gamma \int_{\{\mathbf{x}|f_0=0\}} f_0(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0 \tag{۱۴}$$

$$\beta_{\gamma}=E_{\theta_1}\left(1-\psi_{\gamma}(\mathbf{X})\right)=(1-\gamma)P_{\theta_1}\left(\lambda(\mathbf{X})=\infty\right)$$
$$+P_{\theta_1}\left(\lambda(\mathbf{X})<\infty\right) \tag{۱۵}$$
$$=(1-\gamma)P_{\theta_1}\left(f_0(\mathbf{X})=0\right)+P_{\theta_1}\left(f_0(\mathbf{X})>0\right)$$
$$\geq P_{\theta_1}\left(f_0(\mathbf{X})>0\right)$$

و در این حالت اگر $P_{\theta_1}\left(f_0(\mathbf{X})=0\right)>0$ باشد، با یک دسته از آزمونهای اندازه صفر روبرو هستیم که در این دسته، آزمون

$$\psi_1(\mathbf{x})=\begin{cases}1 & \lambda(\mathbf{x})=\infty\\ 0 & \lambda(\mathbf{x})<\infty\end{cases} \tag{۱۶}$$

که نواحی بحرانی و پذیرش آن طبق نکته۱-۱ به ترتیب عبارتند از :

$$C=\{\mathbf{x}\mid\lambda(\mathbf{x})=\infty\}=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})=0\ \&\ f_1(\mathbf{x})>0\}$$
$$=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})=0\ \&\ \chi\}=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})=0\} \tag{۱۷}$$

$$A=\{\mathbf{x}\mid\lambda(\mathbf{x})<\infty\}=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})>0\ \&\ f_1(\mathbf{x})\geq 0\}$$
$$=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})>0\ \&\ \Re^n\}=\{\mathbf{x}\mid f_0(\mathbf{x})>0\} \tag{۱۸}$$

آزمون MP در اندازه صفر است. برای اثبات MP بودن آزمون (۱۶) دراندازه صفر، فرض کنید ψ آزمون دیگری در اندازه صفر برای H_0 درمقابل H_1 باشد . بنابراین

$$E_{\theta_0}(\psi(\mathbf{X}))=\int\psi(\mathbf{x})\,f_0(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{۱۹}$$
$$=\int_{\{\mathbf{x}|f_0=0\}}\psi(\mathbf{x})\,f_0(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$
$$+\int_{\{\mathbf{x}|f_0>0\}}\psi(\mathbf{x})\,f_0(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$
$$=\int_{\{\mathbf{x}|f_0>0\}}\psi(\mathbf{x})\,f_0(\mathbf{x})d\mathbf{x}=0$$

در نتیجه هنگامی که $f_0(\mathbf{x})>0$ ، داریم :

$.\psi(\mathbf{x})=0$

پس

$$E_{\theta_1}(\psi(\mathbf{X}))=\int\psi(\mathbf{x})\,f_1(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{۲۰}$$
$$=\int_{\{\mathbf{x}|f_0=0\}}\psi(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}+$$
$$=\int_{\{\mathbf{x}|f_0>0\}}\psi(\mathbf{x})\,f_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$
$$=\int_{\{\mathbf{x}|f_0=0\}}\psi(\mathbf{x})\,f_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$
$$\leq\int_{\{\mathbf{x}|f_0=0\}}f_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int_{\{\mathbf{x}|f_0=0\}}\psi_1(\mathbf{x})\,f_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

در نتیجه:

$$E_{\theta_1}(\psi(\mathbf{X}))\leq E_{\theta_1}(\psi_1(\mathbf{X}))$$

و این نا مساوی اثبات را کامل می کند

قضیه۱-۲: مجموعه نقاط خطای کلیه آزمونهای ممکن (E) برای فرضیه ساده $H_0:\theta=\theta_0$ در مقابل فرضیه ساده دیگر $H_1:\theta=\theta_1$

الف: مجموعه ای محدب است که داخل مربع واحد قرار گرفته .

ب: شامل نقاط $(0,1)$ و $(1,0)$ می باشد .

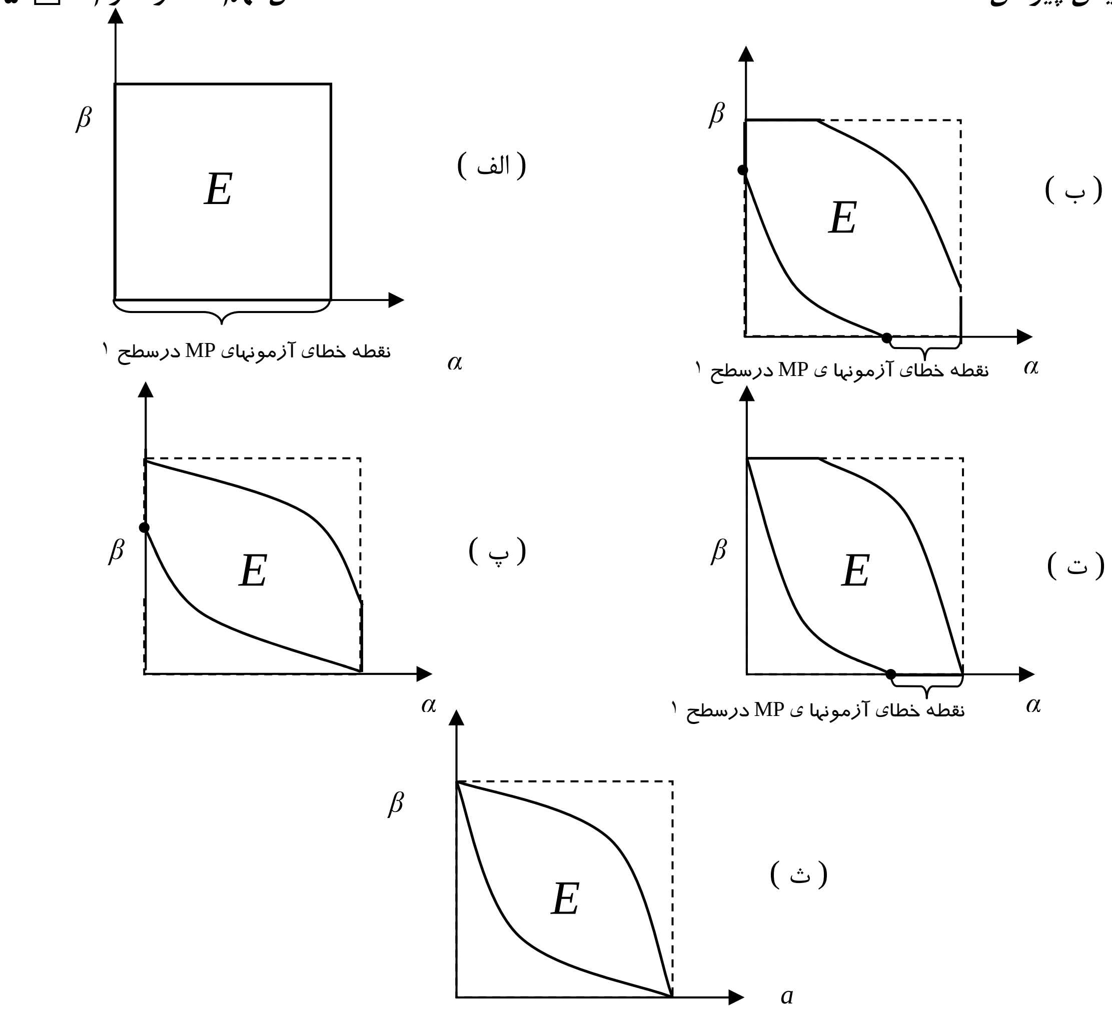
پ: نسبت به نقطه $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ متقارن است .

ت: مجموعه ای بسته است.

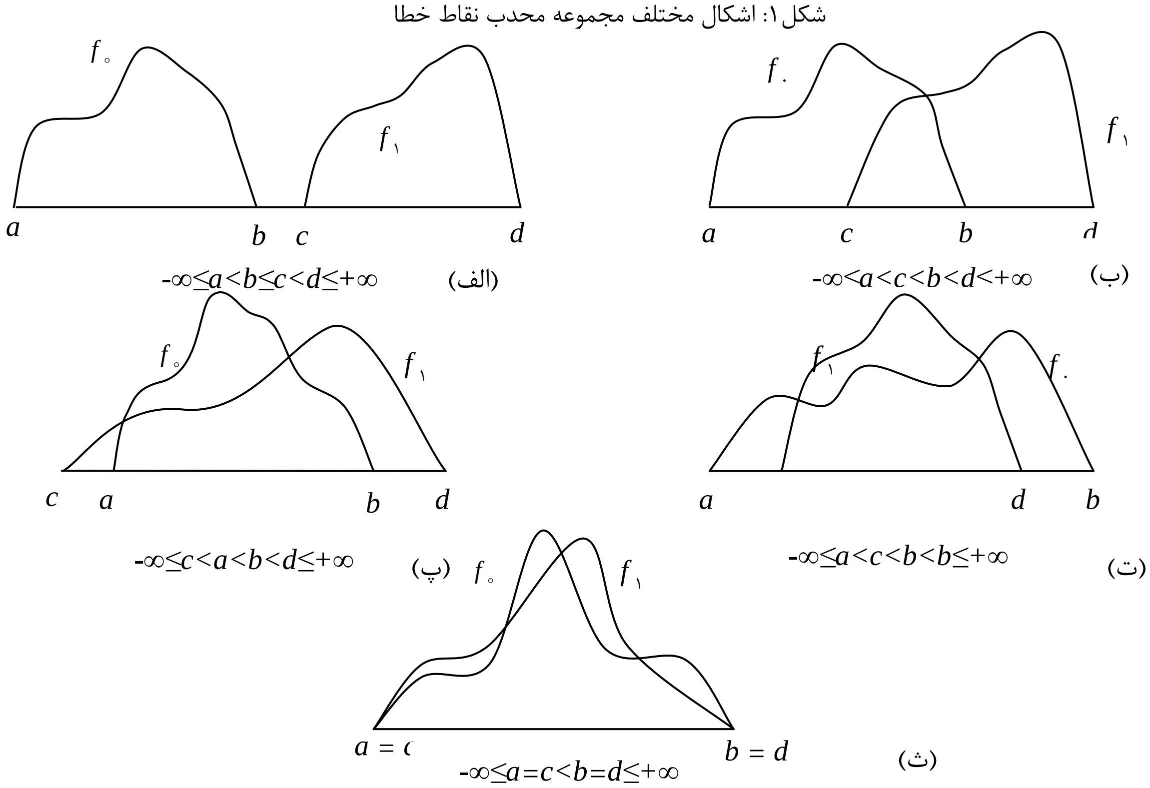
این قضیه را می توان در منبع [۴] یافت.

۲. حالتهای خاص مجموعه محدب خطا

حال با استفاده از بخش یک به بررسی اشکال مختلف مجموعه محدب خطا در حالتهای مرزی لم نیمن پیرسن خواهیم پرداخت. به طور کلی پنج حالت متمایز زیر را می توان برای مجموعه محدب خطا بر اساس رفتار آنها در نقاط مرزی متصور شد .



شکل۱: اشکال مختلف مجموعه محدب نقاط خطا



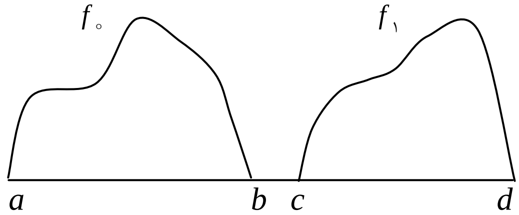
شکل۲: نمودارهای پنجگانه توابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X

برای بدست آوردن مجموعه نقاط فوق نیاز به انتخاب توابع چگالی مناسب تحت برای H_0 و H_1 داریم. حال ببینیم تابع چگالی f_θ تحت H_0 و H_1 چگونه باید انتخاب گردند تا مجموعه های مختلف فوق حاصل شوند. در هر یک از حالت هایی که برای f_0 و f_1 در نظر خواهیم گرفت فرض می کنیم که تکیه گاه متغیر تصادفی پیوسته X بازه هایی حقیقی به شکل (a,b) و (c,d) به ترتیب، تحت H_0 و H_1 باشند. در این صورت نمودار توابع چگالی احتمال f_0 و f_1 به یکی از پنج حالت در نمودار (۲) خواهد بود.

برای پی بردن به چگونگی رفتار مجموعه محدب خطا در نقاط مرزی لم نیمن پیرسن برای هر یک از موارد فوق باید نقاط خطای دسته آزمونهای ψ_γ^* و ψ_γ (آزمونهای (۶) و (۱۱)) را مورد بررسی قرار دهیم. اما به دلیل تحدب این مجموعه نقاط کافیست وضعیت نقطه خطای آزمونهای ψ_0^* (آزمون ψ_γ^* به ازای $\gamma=0$) و ψ_1 (آزمون (۱۶)) را تعیین کنیم.

حال به بررسی وضعیت نقطه خطای آزمونهای ψ_0^* و ψ_1 در هر یک از موارد فوق می پردازیم.

۱- اگر چگالی f_θ تحت H_0 و H_1 به شکل زیر باشد آنگاه نقطه خطای آزمونهای ψ_0^* و ψ_1 طبق روابط (۷)، (۸)، (۱۷) و (۱۸) به ترتیب عبارتند از:



شکل ۳: نمودار چگالی f_0 و f_1 $-\infty\le a<d\le c<d<b\le+\infty$

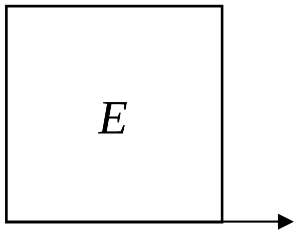
$$\alpha_0^* = E_{\theta_0}\left(\psi_0^*(\mathbf{X})\right) = P_{\theta_0}\left(f_1(\mathbf{X})>0\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{\theta_0}\left(f_1(X_i)>0\right) = (P_{\theta_0}(c<X<d))^n = 0$$

$$\beta_1 = E_{\theta_1}\left(1-\psi_1(\mathbf{X})\right) = P_{\theta_1}\left(f_0(\mathbf{X})>0\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{\theta_1}\left(f_1(X_i)=0\right) = (P_{\theta_1}(a<X<b))^n = 0$$

$$\alpha_1 = E_{\theta_0}\left(\psi_1(\mathbf{X})\right) = P_{\theta_0}\left(f_0(\mathbf{X})=0\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{\theta_1}\left(f_0(X_i)=0\right) = (P_{\theta_1}(a<X<b))^n = 0$$

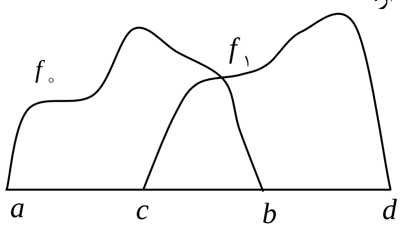
$$\beta_1 = E_{\theta_1}\left(1-\psi_1(\mathbf{X})\right) = P_{\theta_1}\left(f_0(\mathbf{X})>0\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{\theta_0}\left(f_0(X_i)=0\right) = (P_{\theta_0}(c<X<d))^n = 0$$

بنابراین سه نقطه (۰,۰) ، (۰,۱) و (۱,۰)، طبق روابط بالا و قضیه ۲-۱، متعلق به مجموعه E است. پس شکل مجموعه محدب E در نقاط مرزی برای فرضیه های فوق به صورت زیر می باشد.



شکل۴ : مجموعه محدب نقاط خطا وقتی $-\infty\le a<b\le c<d\le+\infty$

۲- اگر چگالی f_θ تحت H_0 و H_1 به شکل زیر باشد آنگاه نقطه خطای آزمونهای ψ_0^* و ψ_1 طبق روابط (۷)، (۸)، (۱۷) و (۱۸) به ترتیب عبارتند از:



شکل۵: نمودار توابع چگالی f_0 و f_1 وقتی $-\infty\le a<c<b<d\le+\infty$

$$\alpha_0^* = E_{\theta_0}\left(\psi_0^*(\mathbf{X})\right) = P_{\theta_0}\left(f_1(\mathbf{X})>0\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{\theta_1}\left(f_1(X_i)>0\right) = (P_{\theta_1}(c<X<d))^n = (P_{\theta_1}(c<X<b))^n$$

و از آنجا که $c<b$ است پس $0<P_{\theta_0}(c<X<b)<1$ است.

$$\beta_0^* = E_{\theta_1}\left(1-\psi_0^*(\mathbf{X})\right) = P_{\theta_1}\left(f_1(\mathbf{X})=0\right)$$

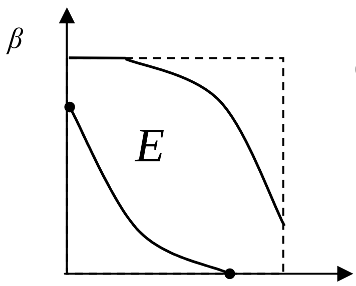
$$\prod_{i=1}^{n} P_{\theta_1}\left(f_1(X_i)=0\right) = (P_{\theta_1}(a<X<c))^n = 0$$

$$\alpha_1 = E_{\theta_0}\left(\psi_1(\mathbf{X})\right) = P_{\theta_0}\left(f_0(\mathbf{X})=0\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{\theta_0}\left(f_0(X_i)=0\right) = (P_{\theta_0}(b<X<d))^n = 0$$

$$\beta_1 = E_{\theta_1}\left(1-\psi_1(\mathbf{X})\right) = P_{\theta_1}\left(f_0(\mathbf{X})>0\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{\theta_1}\left(f_0(X_i)>0\right) = (P_{\theta_1}(a<X<b))^n = (P_{\theta_1}(c<X<b))^n$$

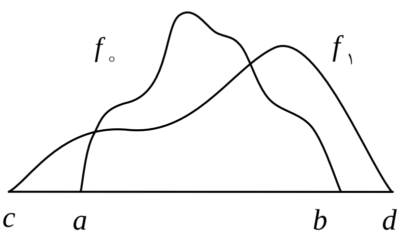
در اینجا نیز به دلیل اینکه $c<b$ است پس $0<P_{\theta_1}(c<X<b)<1$ است.

بنابـــراین چهـار نقطــه $((P_{\theta_0}(c<X<b))^n, 0)$ ، $(1,0)$، $(0,(P_{\theta_1}(c<X<b))^n)$ و $(0, 1)$، طبق روابط بالا و قضیه۱-۲، متعلق به مجموعه E است. پس شکل مجموعه محدب E در نقاط مرزی برای فرضیه های فوق به صورت زیر می باشد.



شکل۶ : مجموعه محدب نقاط خطا وقتی $-\infty\le a<c<b<d\le+\infty$

۳- اگر چگالی f_θ تحت H_0 و H_1 به شکل زیر باشد آنگاه نقطه خطای آزمونهــای ψ_0^* و ψ_1 طبــق روابط(۷)، (۸)، (۱۷)و (۱۸) به ترتیب عبارتند از:



شکل۷: نمودار توابع چگالی f_0 و f_1 وقتی $-\infty\le c<a<b<d\le+\infty$

$$=\prod_{i=1}^{n}P_{\theta_0}\left(f_1(X_i)>0\right)$$

$$=(P_{\theta_0}(c<X<d))^n=(P_{\theta_0}(a<X<b))^n=1$$

$$\beta_0^*=E_{\theta_1}\left(1-\psi_0^*(\mathrm{X})\right)=P_{\theta_1}\left(f_1(\mathrm{X})=0\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P_{\theta_1}\left(f_1(X_i)=0\right)=(P_{\theta_1}(X\in\varnothing))^n=0$$

$$\alpha_1=E_{\theta_0}\left(\psi_1(\mathrm{X})\right)=P_{\theta_0}\left(f_0(\mathrm{X})=0\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P_{\theta_0}\left(f_0(X_i)=0\right)$$

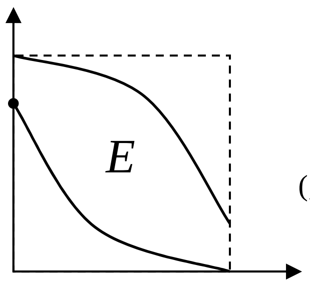
$$=(P_{\theta_0}(c<X<a)+P_{\theta_0}(b<X<d))^n=0$$

$$\beta_1=E_{\theta_1}\left(1-\psi_1(\mathrm{X})\right)=P_{\theta_1}\left(f_0(\mathrm{X})>0\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P_{\theta_1}\left(f_0(X_i)>0\right)=(P_{\theta_1}(a<X<b))^n$$

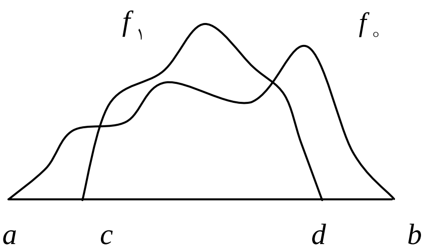
که $0<P_{\theta_1}(a<X<b)<1$ ، زیرا $c<a$ و $b<d$ است.

بنـابراین سـه نقطـه $(1,0)$، $(0,(P_{\theta_1}(a<X<b))^n)$ و $(0,1)$، طبـق روابط بالا و قضیه۱-۲، متعلق به مجموعه E است.پس شکل مجموعه محدب E در نقاط مرزی برای فرضیه های فوق بـه صـورت زیـر مـی باشد.



شکل۸: مجموعه محدب نقاط خطا وقتی $-\infty\le c<a<b<d\le+\infty$

۴- اگر چگالی f_θ تحت H_0 و H_1 به شکل زیر باشد آنگاه نقطه خطـــای آزمونهای ψ_0^* و ψ_1 طبـق روابط (۷)، (۸)، (۱۷) و (۱۸) به ترتیب عبارتند از:



شکل۹: نمودار توابع چگالی f_0 و f_1 وقتی $-\infty\le a<c<d<b\le+\infty$

$$\alpha_0^*=E_{\theta_0}\left(\psi_0^*(\mathrm{X})\right)=P_{\theta_0}\left(f_1(\mathrm{X})>0\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P_{\theta_0}\left(f_1(X_i)>0\right)=(P_{\theta_0}(c<X<d))^n$$

و $0<P_{\theta_0}(c<X<d)<1$ ، زیرا $a<c$ و $d<b$ است.

$$\beta_0^*=E_{\theta_1}\left(1-\psi_0^*(\mathrm{X})\right)=P_{\theta_1}\left(f_1(\mathrm{X})=0\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P_{\theta_1}\left(f_1(X_i)=0\right)$$

$$=(P_{\theta_1}(a<X<c)+P_{\theta_1}(d<X<b))^n=0$$

$$\alpha_1=E_{\theta_0}\left(\psi_1(\mathrm{X})\right)=P_{\theta_0}\left(f_0(\mathrm{X})=0\right)$$

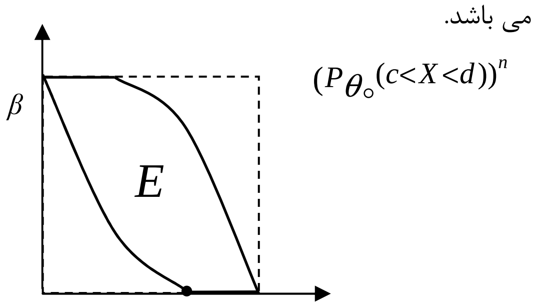
$$=\prod_{i=1}^{n}P_{\theta_0}\left(f_0(X_i)=0\right)=(P_{\theta_0}(X\in\varnothing))^n=0$$

$$\beta_1=E_{\theta_1}\left(1-\psi_1(\mathrm{X})\right)=P_{\theta_1}\left(f_0(\mathrm{X})>0\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P_{\theta_1}\left(f_0(X_i)>0\right)=(P_{\theta_1}(a<X<b))^n$$

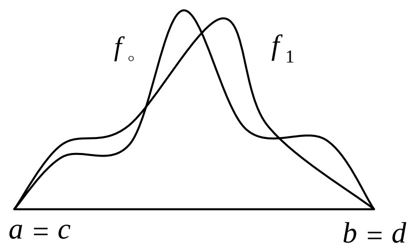
$$=(P_{\theta_1}(c<X<d))^n=1$$

بنابراین سه نقطه $(0,(P_{\theta_0}(c<X<d))^n)$، $(1,0)$ و $(0,1)$، طبق روابط بالا و قضیه۱-۲، متعلق به مجموعه E است. پس شکل مجموعه محدب E در نقاط مرزی برای فرضیه های فوق به صورت زیر می باشد.



شکل۱۰: مجموعه محدب نقاط خطا وقتی $-\infty\le a<c<d<b\le+\infty$

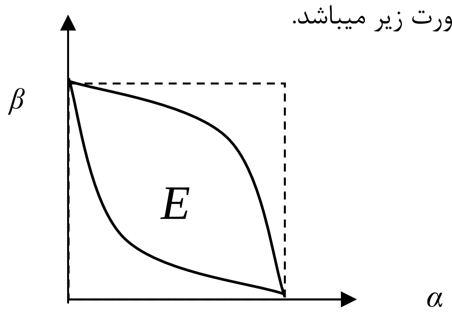
۵- اگر چگالی f_θ تحت H_0 و H_1 به شکل زیر باشد آنگاه نقطه خطای آزمونهای ψ_0^* و ψ_1 طبق روابط (۷)، (۸)، (۱۷) و (۱۸) به ترتیب عبارتند از:



شکل۱۱: نمودار توابع چگالی f_0 و f_1 وقتی $-\infty\le a=c<b=d\le+\infty$

$$\alpha_0^* = E_{\theta_0}\left(\psi_0^*(\mathbf{X})\right) = P_{\theta_0}\left(f_1(\mathbf{X})>0\right)$$
$$=\prod_{i=1}^{n} P_{\theta_0}\left(f_1(X_i)>0\right) = (P_{\theta_0}(c<X<d))^n$$
$$=(P_{\theta_0}(a<X<b))^n = 1$$
$$\beta_0^* = E_{\theta_1}\left(1-\psi_0^*(\mathbf{X})\right) = P_{\theta_1}\left(f_1(\mathbf{X})=0\right)$$
$$=\prod_{i=1}^{n} P_{\theta_1}\left(f_1(X_i)=0\right) = (P_{\theta_1}(X\in\varnothing))^n = 0$$
$$\alpha_1 = E_{\theta_0}\left(\psi_1(\mathbf{X})\right) = P_{\theta_0}\left(f_0(\mathbf{X})=0\right)$$
$$=\prod_{i=1}^{n} P_{\theta_0}\left(f_0(X_i)=0\right) = (P_{\theta_0}(X\in\varnothing))^n = 0$$
$$\beta_1 = E_{\theta_1}\left(1-\psi_1(\mathbf{X})\right) = P_{\theta_1}\left(f_0(\mathbf{X})>0\right)$$
$$=\prod_{i=1}^{n} P_{\theta_1}\left(f_0(X_i)>0\right) = (P_{\theta_1}(a<X<b))^n$$
$$=(P_{\theta_1}(c<X<d))^n = 1$$

بنابراین دو نقطه $(0,1)$ و $(1,0)$متعلق به مجموعه E است ومجموع نقاط خطا در هیچ نقطه دیگری محور α و β را قطع نمی کند در نتیجه شکل مجموعه محدب E در نقاط مرزی برای فرضیه های فوق به صورت زیر میباشد.



شکل۱۲: مجموعه محدب نقاط خطا وقتی $-\infty\le a=c<b=d\le+\infty$

۳. مثالها و نکته ها

اینک به عنوان مثالی از موارد فوق حالتهای زیر را در نظر بگیرید.

۱- $H_0: X\sim U(0,1)$ در مقابل $H_1: X\sim U(1,2)$

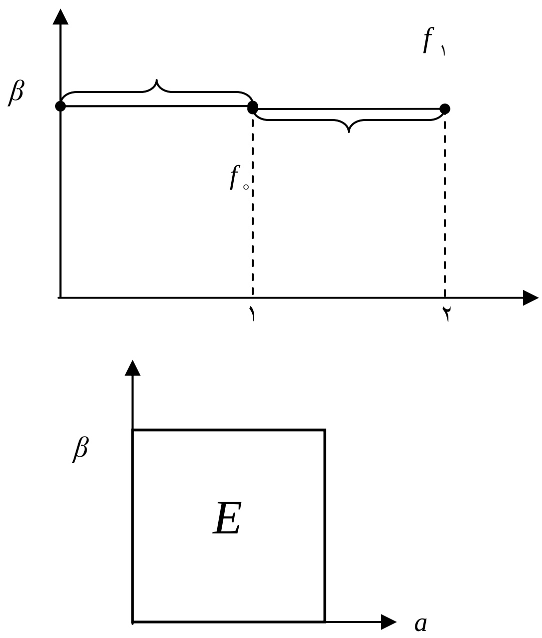
۲- $H_0: X\sim U(0,1)$ در مقابل $H_1: X\sim U(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

۳- $H_0: X\sim U(0,1)$ درمقابل $H_1: X\sim U(\frac{-1}{2},\frac{3}{2})$

۴- $H_0: X\sim U(\frac{-1}{2},\frac{3}{2})$ درمقابل $H_1: X\sim U(0,1)$

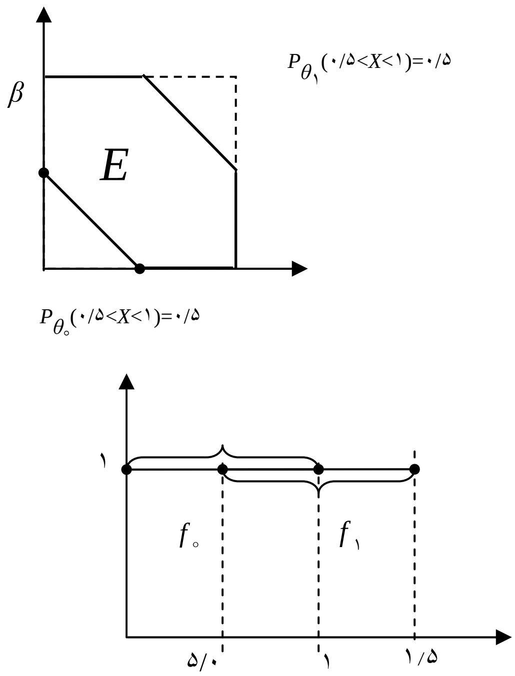
۵- $H_0: X\sim U(0,1)$ در مقابل $H_1: X\sim N(1,1)$

در مثال (۱) نحوه قرار گرفتن تابع چگالی f_θ تحت H_0 و H_1 منطبق بر شکل۳ است. بنابراین مجموعه E متناظر با آن به صورت زیر می باشد



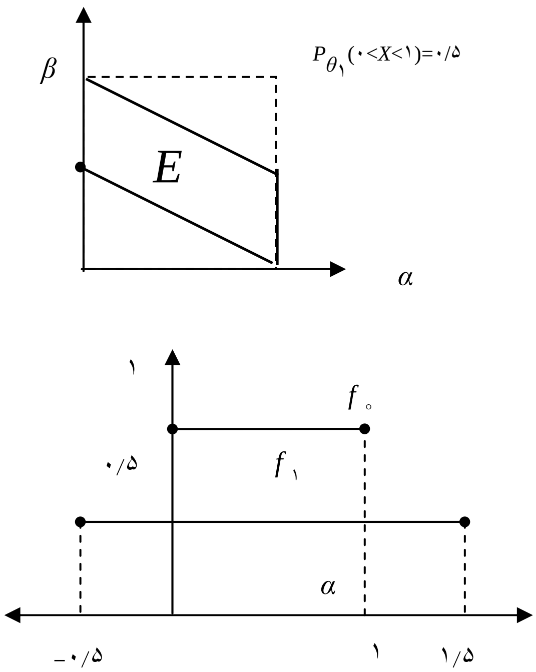
شکل۱۳: نمودار مجموعه E و توابع چگالی f_θ تحت فرضیه های مثال(۱)

در مثال (۲) نحوه قرار گرفتن تابع چگالی f_θ تحت $H_۰$ و $H_۱$ منطبق بر شکل ۵ است. بنابراین مجموعه E متناظر با آن به صورت زیر می باشد.



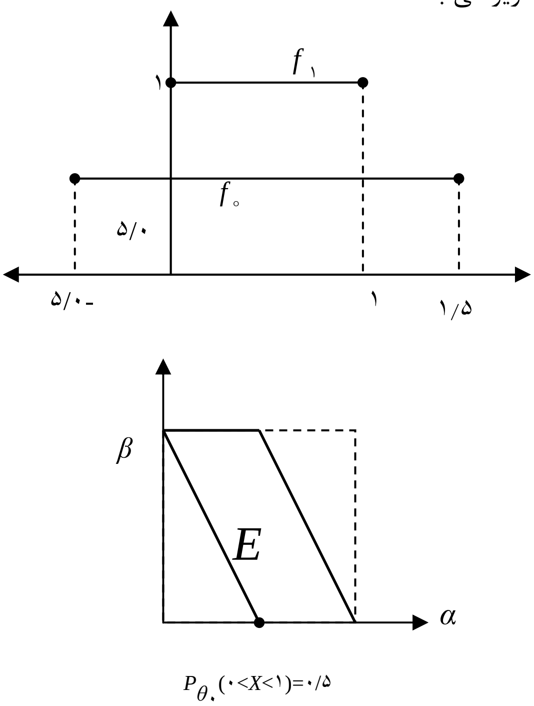
شکل۱۴.نمودار مجموعه E و توابع چگالی f_θ تحت فرضیه های مثال (۲)

در مثال (۳) نحوه قرار گرفتن تابع چگالی f_θ تحت $H_۰$ و $H_۱$ منطبق بر شکل۷ است. بنابراین مجموعه E متناظر با آن به صورت زیر می باشد.



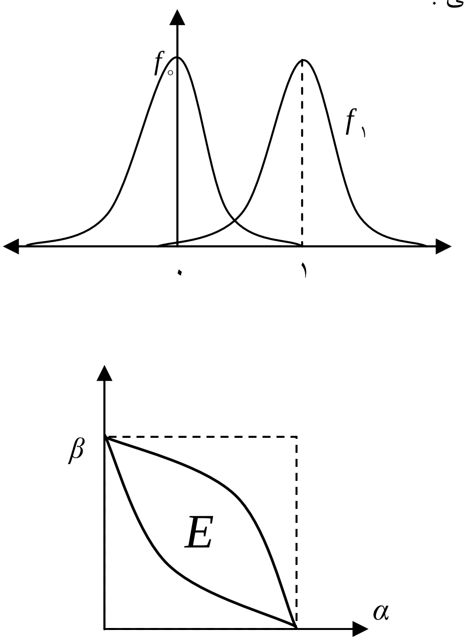
شکل۱۵. نمودار مجموعه E و توابع چگالی f_θ تحت فرضیه های مثال(۳)

در مثال (۴) نحوه قرار گرفتن تابع چگالی f_θ تحت $H_۰$ و $H_۱$ منطبق بر شکل۹ است. بنابراین مجموعه E متناظر با آن به صورت زیر می باشد.



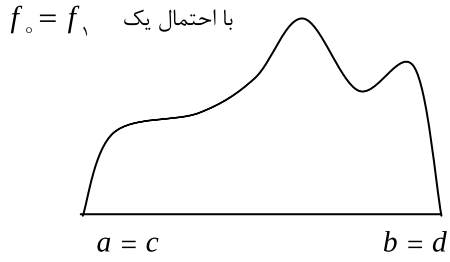
شکل۱۶. نمودار مجموعه E و توابع چگالی f_θ تحت فرضیه های مثال(۴)

منطبق بر شکل۱۱ است. بنابراین مجموعه E متناظر با آن به صورت زیر می باشد.



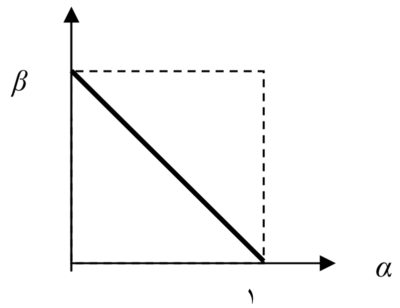
شکل۱۷. نمودار مجموعه E و توابع چگالی f_θ تحت فرضیه های مثال (۵)

نکته۳-۱: فرض کنید با احتمال یک $f_0 = f_1$ ،



شکل ۱۸ : نمودار توابع چگالی f_0 و f_1 وقتی با احتمال یک $f_0 = f_1$

در این صورت مجموعه محدب نقاط خطا برای فرضیه $H_0 : f_\theta = f_0$ در مقابل $H_1 : f_\theta = f_0$، خط واصل بین نقاط (۰,۱) و (۱,۰) در شکل زیر است:



شکل۱۹ : مجموعه محدب نقاط خطا وقتی با احتمال یک $f_0 = f_1$

زیرا طبق لم نیمن پیرسن ،ازمون $\psi(x) = \gamma$ به ازای هر $0 \le \gamma \le 1$، آزمون MP در سطح γ برای H_0 در مقابل H_1 است.قابل ذکر است مجموعه محدب فوق تمام شرایط قضیه ۱-۲ را داراست و همچنین هر آزمون، برای H_0 در مقابل H_1، MP در سطح α (که α اندازه آزمون مورد نظر است) می با شد و در تمام این آزمونها $\alpha = 1 - \beta$ است.

نکته۳-۲: مساحت مجموعه نقاط E

الف: با میزان انطباق f_0 و f_1 رابطه معکوس دارد.

ب: با حجم نمونه رابطه مستقیم دارد.

نکته۳-۳: در دو حالت زیر حجم نمونه هیچگونه تاثیری در مساحت مجموعه نقاط E ندارد.

الف: با احتمال یک $f_0 = f_1$.زیرا نقطه خطای آزمونهای آن به حجم نمونه بستگی ندارد.

ب: تکیه گاه X تحت f_0 و f_1 با احتمال یک مجزا باشند (شکل۲- الف). زیرا در این صورت مجموعه E کل مربع واحد را شامل می شود.

نکته۳-۴: اگر $P_{\theta_1}\left(f_0(\mathrm{X}) > 0\right) = 1$ باشد، باید تغییراتی در صورت لم نیمن پیرسن اعمال کنیم تا به بهترین و ساده ترین شکل ممکن در آید. در این حالت کافیست فقط قسمت (الف)، در لم نیمن پیرسن را به صورت زیر بازنویسی کنیم؛

الف: هر آزمون ψ به شکل

$$\psi(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & \lambda(\mathrm{x}) > k \\ \gamma(\mathrm{x}) & \lambda(\mathrm{x}) = k \\ 0 & \lambda(\mathrm{x}) < k \end{cases} \qquad (1)$$

به ازای لا اقل یک $0 \le k \le \infty$ و $1 \ge \gamma(\mathrm{x}) \ge 0$، یک آزمون MP درسطح α ($(\alpha = E_{\theta_0}(\psi(\mathrm{X}))$) برای آزمودن فرضیه ساده $H_0 : \theta = \theta_0$ در مقابل فرضیه ساده $H_1 : \theta = \theta_1$ است.

مراجع

[1] Bickel, P.J. and Duksum, K.A. (1977). “Mathematical Statistics”.Holden-Day, Inc,. Okland.
[2] Casella, G. and Berger, R.L.,(1990). “Statistical Inference”. Duxbury Press, California.
[3] Lehman, E.L. (1983). “Theory of Point Estimation”. Wiley, New York.
[4] Lehman, E.L. (1986). “Testing Statistical Hypotheses”, 2nd Edition. Wiley, New York.
[5] Rohatgi, V.K. and Ehsanes Saleh, A.K.Md, (2001). “An Introduction to Probability and Statistics”, 2nd Edition. John Waily & Sons, New York.
[۶] پارسیان، احمد، (۱۳۷۸)."مبانی آمار ریاضی". اصفهان، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان.
[۷] مشکانی، علی، (۱۳۷۷)."مقدمه ای بر نظریه آمار (ترجمه)". انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.