تشخیص مشاهدات مؤثر در معادلات همزمان

صفر پارسی[۱] مجتبی گنجعلی[۲] عبدالرحیم شهلایی[۳]

چکیده

تشخیص نقاط غیر عادی که تأثیر بسزائی در برازش معادلات همزمان[۴] دارند از اهمیت زیادی برخوردار است. هر چند روشهای تشخیص در رگرسیون خطی تک معادله ای توسعه یافته اند، چنین تکنیکهایی برای معادلات همزمان، تعمیم نیافته اند. یک روش کاربردی برای تحلیل روشهای تشخیص در رگرسیون خطی، حذف یک آزمودنی خاص و ملاحظهٔ تأثیر یا نفوذ این آزمودنی توسط اختلاف برآورد پارامترها قبل و بعد از حذف آن است. در این مقاله، مباحث تشخیصی مشاهدات مؤثر برای مدلهای همزمان که اخیراً معرفی شده اند، مرور می شود. سپس دو رهیافت دیگر را که اولی بر اساس روش جانهی[۵] و دیگری بر اساس استفاده از الگویتم EM[۶] است، معرفی می کنیم. کاربرد روشهای ذکر شده در مثالی اقتصادی بکار گرفته خواهد شد.

واژه کلیدی: مباحث تشخیصی، مشاهدات مؤثر، الگوریتم EM .

۱. مقدمه

مدل بندی معادلات همزمان در اقتصاد روشی بسیار کارا در بررسی وابستگی متغیرها است. این وابستگی بین متغیرها نمی تواند توسط مدلهای تک معادله ای مورد ارزیابی قرار گیرد. در این گونه مدل بندی ها، اغلب علاقه مند به تعیین مشاهدات مؤثر که تأثیر اساسی در برازش مدل اعمال می کنند، هستیم. هدف این مقاله معرفی روشهایی برای تشخیص و ارزیابی مشاهداتی است که نحوهٔ برازش مدلهای معادلات همزمان را تحت تأثیر خود قرار می دهند.

در بخش ۲ نمادهای مربوط به معادلات همزمان را معرفی می کنیم. در بخش ۳ ابتدا روشهای ارائه شده توسط زائو و لی[۷] [۹]، را مرور می کنیم و سپس به ارائه دو رهیافت جدید که اولی بر اساس روش جانهی و دومی بر اساس استفاده از الگوریتم EM (دمپستر و دیگران[۸]،[۲]) است، می پردازیم. در بخش ۴ داده های مربوط به «برآورد مدل تورم در ایران به روش دستگاه معادلات همزمان» (جهان رائینی[۱۰]، را معرفی کرده و مباحث نظری را روی این داده ها پیاده می کنیم.

۲. معادلات همزمان

معمولاً در معادلات همزمان برای t امین آزمودنی $(t=1,2,\ldots,N)$، G پاسخ وابسته اندازه گیری می شود و مدل مناسب برای این پاسخ ها به صورت زیر (برای اطلاعات بیشتر در مورد معادلات همزمان می توانید به جانستون[۹]، [۵] یا کمنتا،[۱۰] [۷] و یا گجراتی،[۱۱] [۳] مراجعه کنید.)

$$YB = X\Gamma + U \qquad (1)$$

و یا

$$B'y_t = \Gamma' x_t + u_t \qquad t=1,2,\ldots,N \qquad (2)$$

که در آنها

$$Y=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1G} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N1} & y_{N2} & \cdots & y_{NG} \end{bmatrix},$$

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NK} \end{bmatrix}$$

۱- عضو هیئت علمی دانشگاه محقق اردبیلی
۲- عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی
۳- عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی
۴- Simultaneous Equations
۵- Imputation
۶- EM Algorithm
۷- Zhao & Lee
۸- Dempster
۹- Jonston
۱۰- Kmenta
۱۱- Gujarati

$$U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1G} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1} & u_{N2} & \cdots & u_{NG} \end{bmatrix},$$

$$y_t=\begin{bmatrix} y_{t1} \\ y_{t2} \\ \vdots \\ y_{tG} \end{bmatrix}, x_t=\begin{bmatrix} x_{t1} \\ x_{t2} \\ \vdots \\ x_{tG} \end{bmatrix}, u_t=\begin{bmatrix} u_{t1} \\ u_{t2} \\ \vdots \\ u_{tG} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{G1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{G2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1G} & \beta_{2G} & \cdots & \beta_{GG} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{G1} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{G2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{1K} & \gamma_{2K} & \cdots & \gamma_{GK} \end{bmatrix}$$

که در آن برای t امین آزمودنی $y_{t1},\dots,y_{tG}$، متغیرهای درون زا $x_{t1},\dots,x_{tK}$ متغیرهای از قبیل تعیین شده (برای در نظر گرفتن جزء عرض از مبدأ می توان یکی از این متغیرهای x را در هر معادله، مساوی یک در نظر گرفت.)، و $u_{t1},\dots,u_{tG}$ اجزاء اختلال تصادفی هستند. در مدل (۲) β_{ij}ها در B ضرایب متغیرهای درون زا، γ_{ij} ها در Γ ضرایب متغیرهای از قبیل تعیین شده و N تعداد آزمودنی ها است. واضح است که برای هر آزمودنی حضور همهٔ متغیرها در تمام معادلات، ضروری نیست.

در مورد اختلال های تصادفی تأکید می شود که هر کدام از اختلال ها، فرض های اساسی مدل رگرسیون خطی نرمال کلاسیک را برآورده می کنند یعنی:

$$u_{tg}\sim N(0,\sigma_{gg}) \qquad g=1,2,\dots,G$$

$$E(u_{tg}u_{sg})=0 \qquad t,s=1,2,\dots,N, \quad t\neq s$$

اما، امکان این را که اختلالهای مابین معادلات همبسته باشند، یعنی:

$$E(u_{tg}u_{th})=\sigma_{gh} \qquad g,h=1,2,\dots,G, \quad g\neq h$$

نفی نمی کنند. در واقعی برآورد این همبستگی ها در معادلات همزمان از اهمیت اساسی برخوردار است. در قالب نمادهای ماتریسی، فرضهای مزبور به صورت زیر در می آید:

$$u_t\sim N(0,\Sigma) \qquad E(u_t u_s')=0 \tag{۳}$$

که در آن

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \cdots & \sigma_{1G} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{G1} & \sigma_{G2} & \cdots & \sigma_{GG} \end{bmatrix}$$

ماتریس Σ به ماتریس واریانس – کوواریانس اختلالهای ساختاری معروف است. بنابر این لگاریتم تابع درستنمایی را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$L(B,\Gamma,\Sigma)=\frac{-NG}{2}\log 2\pi+N\log|\det B'|+\frac{N}{2}\log|\Sigma|^{-1} + \frac{N}{2}tr\left\{\frac{1}{N}\Sigma^{-1}(YB-X\Gamma)'(YB-X\Gamma)\right\} \tag{۴}$$

بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می کنیم که عناصر قطر اصلی B برابر با یک هستند و همچنین، بعضی از عناصر خاص B و Γ می توانند صفر باشند.

برای یافتن معادلهٔ gام همهٔ آزمودنی ها به فرم ماتریسی، فرض کنید که y_g، gامین ستون Y باشد و $\beta_{(g)}$ بردار ستونی شامل آن عناصری از gامین ستون B باشد که با صفر با یک مشخص نشده و همچنین $\gamma_{(g)}$ شامل آن عناصری از ستون Γ باشد که با صفر مشخص نشده باشند و نیز $Y_{(g)}$ و $X_{(g)}$ را زیر مجموعه ای از ستونهای Y و X در نظر گیرید که به طور متناظر با $\beta_{(g)}$ و $\gamma_{(g)}$ پس ضرب شده اند. بنابر این g امین معادلهٔ ساختاری برای همهٔ آزمودنی ها را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y_g=Y_{(g)}\beta_{(g)}+X_{(g)}\gamma_{(g)}+u_g \tag{۵}$$

و یا به طور مشابه، به صورت زیر نوشت:

$$y_g=Z_{(g)}\vartheta_{(g)}+u_g \tag{۶}$$

که در آن:

$$Z_g=\begin{bmatrix} Y_{(g)} & X_{(g)} \end{bmatrix} \quad , \quad \vartheta_g=\begin{bmatrix} \beta_{(g)} \\ \gamma_{(g)} \end{bmatrix}$$

با ترکیب G معادله، فرمول کلی معادلات همزمان را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y=Z\theta+u \tag{۷}$$

که در آن:

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_G \end{bmatrix},\ \theta=\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vdots \\ \vartheta_G \end{bmatrix},\ u_t=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_G \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Z}=\begin{bmatrix} Z_{(1)} & \mathbf{o}_{(2)} & \cdots & \mathbf{o}_{(G)} \\ \mathbf{o}_{(1)} & Z_{(2)} & \cdots & \mathbf{o}_{(G)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{o}_{(1)} & \mathbf{o}_{(2)} & \cdots & Z_{(G)} \end{bmatrix}$$

که در آن $\mathbf{o}_{(g)}$ ها ماتریس های صفر و هم مرتبه با $Z_{(g)}$ ها هستند. بنابر این برآوردگر ماکسیمم درستنمایی با اطلاعات کامل (FIML) [۱] پارامتر θ، که معادل با ماکسیمم کردن (۴) است، با حل رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\theta=\left[\bar{\mathcal{Z}}'\left(\Sigma^{-1}\otimes I_N\right)\bar{\mathcal{Z}}'\right]^{-1}\ \bar{\mathcal{Z}}'\left(\Sigma^{-1}\otimes I_N\right)y \qquad (8)$$

که در آن

$$\bar{\mathcal{Z}}=\begin{bmatrix} \bar{Z}_{(1)} & \mathbf{o}_{(2)} & \cdots & \mathbf{o}_{(G)} \\ \mathbf{o}_{(1)} & \bar{Z}_{(2)} & \cdots & \mathbf{o}_{(G)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{o}_{(1)} & \mathbf{o}_{(2)} & \cdots & \bar{Z}_{(G)} \end{bmatrix}$$

به طوری که $\bar{Z}_{(g)}=[\bar{Y}_{(g)}\quad X_{(g)}]$ و $\bar{Y}=X\Gamma(B)^{-1}$. در (۸) $\otimes$ ضرب کرونکر [۲] یا ضرب مستقیم ماتریس ها است [۳].

چون در رابطهٔ (۸)، $\bar{\mathcal{Z}}$ به θ بستگی دارد، بنابر این برای برآورد θ، از روش تکراری استفاده می کنیم. برآوردگر $FIML$ پارامتر θ دارای توزیع مجانبی نرمال زیر است:

(۹)

$$\sqrt{N}\,(\hat{\theta}-\theta)\rightarrow N\left(o,\left[\lim N^{-1}\,\bar{\mathcal{Z}}'\left(\Sigma^{-1}\otimes I_N\right)\bar{\mathcal{Z}}\right]^{-1}\right)$$
$$as\ \ N\rightarrow\infty$$

برای جزئیات بیشتر (هاسمن [۳] [۴]) را ببینید.

۳. معیارهای تشخیص مشاهدات مؤثر

مشاهده ای را مؤثر گوییم که حذف آن مشاهده، تغییر اساسی در معادلهٔ همزمان برازش شده به وجود آورد. گاهی نقطهٔ مؤثر از بقیهٔ داده ها مهمتر است، زیرا ممکن است بسیاری از ویژگی های کلیدی مدل را کنترل کند.

یک رهیافت سودمند برای تحلیل تأثیر و نفوذ یک آزمودنی خاص، شامل حذف آن آزمودنی می باشد. اثر یا تأثیر یک آزمودنی به وسیلهٔ تفاوت حاصل از برآورد پارامترها در قبل و بعد از حذف آزمودنی، اندازه گیری می شود (کوک و ویسبرگ [۴] [۱]).

زائو و لی [۹] رهیافت فوق را که در رگرسیون خطی برای تشخیص مشاهدات مؤثر به کار می رود و به معیار فاصلهٔ کوک معروف است، به صورت زیر به مدل معادلات همزمان بسط داده اند:

$$D1_t=(\hat{\theta}_{(t)}-\hat{\theta})'\left[\hat{V}ar\ (\hat{\theta})\right]^{-1}\ \left(\hat{\theta}_{(t)}-\hat{\theta}\right) \qquad (10)$$

که در آن $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(t)}$ بر برآوردهای پارامتر بدون آزمودنی t ام دلالت می کند و $\hat{V}ar(\hat{\theta})$ برآورد سازگار $Var(\hat{\theta})$ است. مشاهدات مؤثر با توجه به مقادیر بزرگ فاصلهٔ کوک مشخص می شوند.

معمولاً در مدل معادلات همزمان، متغیرهای با تأخیر ظاهر می شوند، بنابر این اگر فرض کنیم در مسأله ای، متغیری با تأخیر ۱ ظاهر شده باشد آنگاه حذف کردن مشاهدهٔ t ام به معنی حذف کردن همزمان موارد $T=\{t,t+1\}$ خواهد بود، لذا در موقع محاسبه فاصلهٔ کوک برای مشاهده t ام ، باید هر دو مورد t و $t+1$ به طور همزمان حذف شوند. فرض کنید $\hat{\theta}_T$ برآورد به دست آمدهٔ پارامترها بعد از حذف موارد شامل مشاهدات، موقعیت t ام باشد لذا فاصلهٔ اصلاح شدهٔ کوک را برای حالتی که متغیر با تأخیر در مدل وجود دارد به صورت زیر مطرح می کنیم:

$$D2_t=(\hat{\theta}_{(T)}-\hat{\theta})'\left[\hat{V}ar\ (\hat{\theta})\right]^{-1}\ \left(\hat{\theta}_{(T)}-\hat{\theta}\right) \qquad (11)$$

به طور کلی معیارهای حذفی برای مدل معادلات همزمان، که دارای متغیرهای با تأخیر باشد، مناسب نیستند زیرا اگر کسی $D1_t$ را برای حذف یک آزمودنی بکار برد، ممکن است کافی نباشد و در صورتی که $D2_t$ به کار برده شود، ممکن است حذفهای متناظر، افراطی باشند. به علاوه، در این حالت یک آزمودنی با تأثیر بالا، ممکن است با آزمودنی مجاورش و یا با دگر مشاهدات با تأثیر کمتر، اشتباه شود. این اثرهای اشتباه در مدلهای معادلات همزمان با متغیرهای با تأخیر، ممکن است به وقوع به پیوندند. این مشکل را می توان با استفاده از مباحث مربوط به داده های گمشده به طور مؤثر حل کرد. برای پیش بینی مقادیر گمشده، می توان از روش جانهی که به صورت زیر است، استفاده کرد: (برای اطلاعات بیشتر در مورد روش جانهی، به لیتل و روبین [۵] [۸]، مراجعه کنید.)

۱- Full Information Maximum Likelihood
۲- Kronecker Product
۳- Hausman
۴- Cook & Weisberg
۵- Little & Rubin

در این روش بدون توجه به همبستگی بین متغیرهای درون زا، ابتدا رگرسیون های زیر را بدون در نظر گرفتن مشاهدهٔ tام برازش می دهیم:

$$y_g^{(t)} = X_g^{(t)} \gamma_g^* + u_g^{(t)} \quad g = 1, \ldots, G \qquad (۱۲)$$

که در آن $X_g^{(t)}$ ماتریس مشاهدات مربوط به متغیرهای برون زای مربوط به معادلهٔ g ام همهٔ آزمودنی ها است که سطر t ام آن نیز حذف شده است و $y_g^{(t)}$ همان y_g است با این تفاوت که عنصر t ام آن حذف شده است.

بعد از برازش مدل بالا و به دست آوردن $\hat{\gamma}_g^*$، سطر t ام ماتریس مشاهدات مربوط به متغیرهای برون زای مربوط به معادلهٔ g ام را که با $x_t^{(g)}$ نشان می دهیم، در مدلهای برازش شدهٔ بالا قرار داده و مقادیری برای متغیرهای برون زای رگرسیون های بالا به دست می آوریم. بعد از انجام مراحل بالا، مقادیر به دست آمده را در جاهای متناظرشان در مدل همزمان اصلی قرار داده و برآورد پارامترهای مدل را که با $\hat{\theta}_{(t)}^*$ نشان می دهیم، به دست می آوریم.

بر پایهٔ این رهیافت فاصلهٔ کوک را می توان به صورت زیر مطرح کرد: (زائو و لی [۹])

$$D3_t = (\hat{\theta}_{(t)}^* - \hat{\theta})' \left[\hat{V}ar(\hat{\theta})\right]^{-1} \left(\hat{\theta}_{(t)}^* - \hat{\theta}\right) \qquad (۱۳)$$

به طوری که $\hat{\theta}_{(t)}^*$ برآورد پارامترهای به دست آمده با در نظر گرفتن مشاهدهٔ t ام به صورت گمشده و استفاده از روش جانهی است.

به طور کلی، می توانیم معیار تأثیری دیگری معادل با $D3_t$ بر اساس فاصلهٔ درستنمایی مقیاس بندی کنیم یعنی:

$$D4_t = 2\{L(\hat{\theta}) - L(\hat{\theta}_{(t)}^*)\} \qquad (۱۴)$$

که در آن $L(\cdot)$ دلالت بر لگاریتم تابع درستنمایی دارد. (زائو و لی [۹]).

در روش بالا همبستگی بین متغیرهای درون زا در نظر گرفته نمی شود و در اصل از کارآیی برآوردها کاسته می شود. استفاده از روش زیر که اساس آن استفاده از الگوریتم EM است، به حل این مشکل می پردازد. (برای اطلاعات بیشتر در مورد الگوریتم EM، لیتل و روبین [۸]، را ببینید.)

این روش به اینگونه است که ابتدا y_{tg} را به صورت گمشده فرض می کنیم و در گام اول (گام E) مقدار مورد انتظار را با استفاده از پارامترهای اولیه برای y_{tg} به دست می آوریم سپس در گام دوم (گام M)، با استفاده از داده های کامل برآورد شده، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها را به دست می آوریم. گامهای بالا را آن قدر تکرار می کنیم تا در یک ملاک همگرایی مناسب صدق کند. برای مدل معالات همزمان، این الگوریتم را به صورت زیر اجرا می کنیم:

در قالب نمادهای ماتریسی، معادلات همزمان را به فرم زیر می نویسیم:

$$B'y_t = \Gamma' x_t + u_t \qquad t = 1, 2, \ldots, N$$

$$u_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma) \quad E(u_t u_s') = \mathbf{0} \quad t \neq s$$

در نتیجه

$$u_t \sim N(\Pi' x_t, \Psi) \qquad (۱۵)$$

که در آن $\Psi = (B')^{-1} \Sigma B^{-1}$ و $\Pi' = (B')^{-1} \Gamma'$.

حال فرض می کنیم که بـرای مـشاهدهٔ t ام، یکـی از عناصـر y_t، مـثلاً y_{tg} گمشده باشد. یعنی:

$$y_{obs}' = (y_{t1}, y_{t2} \ldots, y_{tg-1}, y_{mis}, y_{tg+1}, \ldots, y_t G)$$

بنابر این ابتدا y_{tg} را بـا اسـتفاده از امیـد ریاضـی آن بـه شـرط بقیـهٔ مشاهدات و پارامترهای اولیه به دست می آوریـم. در اصـل مـی خـواهیم $E(y_{mis} | y_{obs}, \Pi_0, \Psi_0)$ را به دست آوریم به طوری که در آن

$$y_{obs}' = (y_{t1}, y_{t2} \ldots, y_{tg-1}, y_{tg+1}, \ldots, y_t G)$$

است. برای این کار با استفاده از توزیع امید شرطی نرمـال چنـد متغیـره خواهیم داشت: (جانسون و ویچرن[۱] [۵]، را ببینید.)

(۱۶)

$$E(y_{tg} | y_{obs}, \Pi_0, \Psi_0) = \Pi_0' x_t^g + \Psi_0^g (\Psi_0^{gg})^{-1} (y_{obs} - \Pi_0' x_t^{(-g)})$$

کـه در آن Π_0', x_t^g مؤلفـهٔ g ام Π_0', x_t و $\Pi_0', x_t^{(-g)}$ همـان Π_0', Ψ_t اسـت کـه عنـصر g ام آن حـذف شـده اسـت. Ψ_0 و Π_0 برآوردهای اولیهٔ پارامترها هستند و Ψ_0^g برابر بـا سـطر g ام است که مؤلفهٔ g ام آن حذف شده است و Ψ_0^{gg} مـاتریس $(G-1) \times (G-1)$ است و برابر با Ψ_0 است با این تفاوت که سطر و ستون g ام آن حـذف شده است. بعد از انجام گام E، مقدار برآورده شده را متناظراً در جاهـایی که y_{tg} گمشده بود قرار می دهیم و در گام M بـا اسـتفاده از داده هـای کامل به دست آمده، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها را بـه دسـت می آوریم. گامهای E و M را آن قدر تکرار می کنیم تا برآورد پارامترهـا در یک ملاک همگرایی مناسب صدق کند.

حال می توانیم با استفاده از رهیافت بالا، دو ملاک زیر را برای هر یک از متغیرهای درون زا تعریف کنیم:

$$DEY_{gt} = (\hat{\theta}_{(t)}^g - \hat{\theta})' \left[\hat{V}ar(\hat{\theta})\right]^{-1} (\hat{\theta}_{(t)}^g - \hat{\theta}) \qquad (۱۷)$$

که در آن $\hat{\theta}_{(t)}^g$ برآورد پارامترهای مدلی است که با استفاده از الگـوریتم EM به دست آمده است با این فرض کـه متغیـر درون زا g ام مـشاهدهٔ t ام، گمشده تلقی شده است. ملاک دوم می تواند به صورت زیر باشد:

۱- Johnson & Wichern

$$LDEY_{gt} = ۲\{L(\hat{\theta}) - L(\hat{\theta}^{g}_{(t)})\}. \quad (۱۸)$$

٤. داده ها، تحلیل و نقاط مؤثر آنها

با توجه به اینکه هدف، صرفاً پیاده سازی مباحث نظری بر روی داده هایی است که قبلاً مدل بندی شده است، لذا داده هایی که در قسمت کاربردی از آن استفاده شده است مربوط به پایان نامهٔ کارشناسی ارشد «جهان رائینی، [۱۰]» با عنوان «برآورد مدل تورم در ایران به روش دستگاه معادلات همزمان» است. در ابتدا شرح مختصری در مورد متغیرها و مدل برازش داده شده خواهیم داد. لازم به ذکر است که داده های مربوط به مدل تورم، در پیوست ۱ آمده است.

مدل همزمان انتخابی برای تورم که با توجه به پشتوانهٔ تئوریک و بررسی اقتصاد ایران که به طور مفصل در پایان نامهٔ مذکور آمده است، به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} \log P_t + \beta_{۱۲} \log M_t &= \gamma_{۱۱} + \gamma_{۱۲} \log Y۲_t + \gamma_{۱۳} DPF_t + u_{۱t} \\ \log M_t + \beta_{۲۳} \log H_t &= \gamma_{۲۱} + \gamma_{۲۴} \log B_t + u_{۲t} \\ \log H_t &= \gamma_{۳۵} \log H_{(t-۱)} + \gamma_{۳۶} \log BD_t + \gamma_{۳۷} \log YO_t + u_{۳t} \end{aligned} \quad (۱۹)$$

که در آن P: سطح عمومی قیمتها به قیمت ثابت سال ۱۳۵۳ (شاخص قیمتها)، M: حجم نقدینگی (به میلیارد ریال)، $Y۲$: درآمد ملی حقیقی به قیمت ثابت ۱۳۵۳ (به میلیارد ریال)، DPF: نرخ تورم انتظاری (به درصد)، H: پایهٔ پولی (به میلیارد ریال)، B اوراق قرضهٔ در اختیار بانکها (به میلیارد ریال)، BD: کسر بودجهٔ دولت (به میلیارد ریال) و YO: درآمد ناشی از صدور نفت (به میلیارد ریال) است.

و حالت ماتریسی آن برای $t = ۱,...,۲۵$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & \beta_{۱۲} & ۰ \\ ۰ & ۱ & \beta_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t۱} \\ y_{t۲} \\ y_{t۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{۱۱} & \gamma_{۱۲} & \gamma_{۱۳} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \gamma_{۲۱} & ۰ & ۰ & \gamma_{۲۴} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \gamma_{۳۵} & \gamma_{۳۶} & \gamma_{۳۷} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t۰} \\ x_{t۱} \\ x_{t۲} \\ x_{t۳} \\ x_{t۴} \\ x_{t۵} \\ x_{t۶} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{t۱} \\ u_{t۲} \\ u_{t۳} \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

که در آن

$$y_{t۱} = \log P_t, \quad y_{t۲} = \log M_t, \quad y_{t۳} = \log H_t$$
$$x_{t۰} = ۱, \quad x_{t۱} = \log Y۲_t, \quad x_{t۲} = DPF_t, \quad x_{t۳} = \log B_t$$
$$x_{t۴} = \log H_{(t-۱)} \quad x_{t۵} = \log BD_t, \quad x_{t۶} = \log YO_t$$

و یا به فرم (۷) می توان نوشت:

$$y = Z\theta + u$$

که در آن:

$$\theta_۱ = -\beta_{۱۲}, \quad \theta_۲ = \gamma_{۱۱}, \quad \theta_۳ = \gamma_{۱۲}, \quad \theta_۴ = \gamma_{۱۳}$$
$$\theta_۵ = -\beta_{۲۳}, \quad \theta_۶ = \gamma_{۲۱}, \quad \theta_۷ = \gamma_{۲۴}, \quad \theta_۸ = \gamma_{۳۵}$$
$$\theta_۹ = -\beta_{۳۶}, \quad \theta_{۱۰} = \gamma_{۳۷}$$

جدول ۱ مربوط به برآوردهای پارامترهای مدل همراه با انحراف معیار متناظرشان و همچنین آمارهٔ t – استیودنت است که با روش $FIML$ محاسبه شده اند.

همچنین برآورد Σ به صورت زیر است:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۵۷ & -۰/۰۰۱۰ & -۰/۰۰۰۶ \\ -۰/۰۰۱۰ & ۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۵ \\ -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۱۵ & ۰/۰۰۶۲ \end{bmatrix}$$

جدول ۱: برآورد پارامترهای مدل، انحراف برآوردها معیار آمارهٔ t – استیودنت به روش $FIML$

پارامتر	برآورد	انحراف معیار	مقدار آمار t
$\theta_۱$	۰/۴۶۶۵	۰/۰۳۷۶	۱۲/۴۱۰۷
$\theta_۲$	۳/۹۴۵۵	۰/۳۲۶۴	۱۲/۰۸۸۱
$\theta_۳$	۰/۳۱۸۷	۰/۰۷۱۵	-۴/۴۶۰۱
$\theta_۴$	۰/۰۰۶۲	۰/۰۰۰۸	۸/۱۰۰۰
$\theta_۵$	۰/۶۷۷۵	۰/۰۱۶۰۱	۴۲/۳۱۳۱
$\theta_۶$	۰/۹۸۰۵	۰/۰۴۹۹	۳۹/۶۷۷۹
$\theta_۷$	۰/۱۹۹۷	۰/۰۱۲۴	۱۶/۰۵۲۹
$\theta_۸$	۰/۹۰۴۵	۰/۰۲۳۸	۳۷/۹۲۵۳
$\theta_۹$	۰/۰۶۰۸	۰/۰۲۳۴	۲/۵۹۷۵
$\theta_{۱۰}$	۰/۰۷۷۰	۰/۰۱۳۹	۵/۵۰۸۴

مقدار لگاریتم درستنمایی برای برآوردهای پارامترها با استفاده از روش $FIML$، برابر ۱۰۶/۰۹۲۵ است.

حال با توجه به مباحث نظری که در بخش ۳ در مورد معیارهای تشخیص مشاهدات مؤثر ذکر شد، معیارهای مذکور را برای مثال مربوط به مدل تورم به کار می بریم. اولین معیار، حذف مشاهدهٔ t ام و محاسبه کردن معیار $D۱_t$ است. همانطور که در نمودار ۱ ملاحظه می شود،

آزمودنی مربوط به سال ۱۳۵۲ بیشترین مقدار $D1$ را دارد و این معیار، مشاهدهٔ مربوط به سال ۱۳۵۲ را به عنوان دادهٔ مؤثر معرفی می کند.

نمودار ۲ مربوط به معیار، $D۲_t$ است، همانطور که در مباحث مربوط به فصل ۲ مطرح شد، این معیار همانند معیار $D۱_t$ است، با این تفاوت که، چون در مدل معادلات همزمان متغیر با تأخیر ۱ ظاهر شده است، لذا برای محاسبهٔ معیار مذکور برای مشاهدهٔ t ام، باید موارد $\{t,t+۱\}$ حذف شود. چنانچه ملاحظه می شود، مشاهدات مربوط به سال های ۱۳۵۱ و ۱۳۵۲، مشاهدات مؤثر هستند.

همانطورکه در مباحث مربوط به حذف آزمودنی بحث شد، معیارهای بالا برای مدل معادلات همزمان، که دارای متغیرهای باتأخیر باشد، مناسب نیستند زیرا اگر کسی $D۱_t$ را برای حذف یک آزمودنی بکار برد، ممکن است کافی نباشد و در صورتی که $D۲_t$ بکار برده شود، ممکن است حذفهای متناظر، افراطی باشند. بعلاوه، در این حالت یک آزمودنی با تأثیر بالا، ممکن است با آزمودنی مجاورش و یا با دیگر مشاهدات با نفوذ کمتر، اشتباه شود. این اثرهای اشتباه در مدلهای معادلات همزمان با متغیرهای با تأخیر، ممکن است به وقوع بپیوندند. با توجه به نمودارهای ارائه شده و نکتهٔ بالا، به طور صریح نمی توانیم بگوییم که مشاهدات مربوط به سالهای ۱۳۵۱ و ۱۳۵۲ مؤثر هستند.

معیارهایی که تا حدودی مشکل بالا را برطرف می کنند، $D۳_t$ و $D۴_t$ هستند. نمودارهای مربوط به معیارهای $D۳_t$ و $D۴_t$ در زیر آمده اند.

همانطور که ملاحظه می شود، نمودار ۳ نیز آزمودنی مربوط به سال ۱۳۵۲ را به عنوان آزمودنی مؤثر تلقی می کند.

همچنین نمودار مربوط به معیار $D۴_t$ نیز آزمودنی مربوط به سال ۱۳۵۲ را به عنوان آزمودنی مؤثر نشان می دهد.

همانطور که در بخش مربوط به داده های گمشده عنوان شد، در معیارهای $D۳_t$ و $D۴_t$، همبستگی بین متغیرهای درون زا در نظر گرفته نمی شود و در نتیجه قسمتی از اطلاعات دور ریخته می شود و در نتیجه از کارآیی برآوردها کاسته می شود. معیارهای DEY_{gt} و $LDEY_{gt}$ بر اساس الگوریتم EM ساخته شده اند و در این معیارها از همبستگی بین متغیرهای درون زا نیز استفاده شده است.

نمودار ۵ نشان می دهد که مشاهدهٔ مربوط به سال ۱۳۶۲ دادهٔ مؤثری نسبت به سایر مشاهدات است، همچنین دادهٔ مربوط به سال ۱۳۵۴ نیز در مقایسه با سایر داده ها، نسبتاً مؤثر است.

نمودار ۶ نیز مشاهدهٔ مربوط به سال ۱۳۶۲ را دادهٔ مؤثرتری نسبت به سایر داده ها تلقی می کند.

نمودارهای بعدی مربوط به معیارهای $DEY_{۲t}$ و $LDEY_{۲t}$است. نمودار های مذکور مشاهدهٔ مربوط به آزمودنی سال ۱۳۵۲ را به عنوان دادهٔ مؤثری نسبت به بقیهٔ داده ها نشان می دهد.

در شکل های مربوط به $DEY_{۳t}$ و $LDEY_{۳t}$ که در صفحهٔ بعد آمده اند، نیز مشاهدهٔ مربوط به سال ۱۳۵۲ به عنوان دادهٔ مؤثرتری نسبت به بقیهٔ داده ها، تلقی می شود.

بیشتر معیارهایی که بحث شدند، دادهٔ مربوط به سال ۱۳۵۲ را به عنوان دادهٔ مؤثر تشخیص دادند. بعضی از معیارها نیز دادهٔ مربوط به سال ۱۳۶۲ را نیز به عنوان دادهٔ مؤثر نشان دادند.

بنابر این طبق معیارهای مذکور می توانیم چنین ادعایی داشته باشیم که دو مشاهدهٔ بالا، مدل معادلات همزمان را شدیداً تحت تأثیر خود قرار می دهند. در ادامهٔ این بخش نسبت به بررسی نتایج حاصل از حذف مشاهدات مربوط به سال های ۱۳۵۲، ۱۳۶۲ می پردازیم. توجه کنید که از (۱۵) داریم

$$y_t \sim N(\Pi' x_t, \Psi)$$

که در آن

$$\Psi = (B')^{-۱} \Sigma B^{-۱}$$

و

$$.\Pi' = (B')^{-۱} \Gamma^{-۱}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۰/۴۶۶۵ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۰/۶۷۷۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابر این، برآورد ماتریس واریانس – کوواریانس بین متغیرهای درون زا به صورت زیر است:

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۵۰ & -۰/۰۰۰۱ & ۰/۰۰۰۷ \\ -۰/۰۰۰۱ & ۰/۰۰۲۸ & ۰/۰۰۲۷ \\ ۰/۰۰۱ & ۰/۰۰۲۷ & ۰/۰۰۶۲ \end{bmatrix}$$

جدول ۲: برآورد پارامترهای مدل، انحراف معیار برآوردها آمارهٔ t – استیودنت به روش $FIML$ بدون درنظر گرفتن مشاهدهٔ مربوط به سال ۱۳۵۲

پارامتر	برآورد	انحراف معیار	مقدار آمار t
$\theta_۱$	۰/۴۶۲۹	۰/۰۳۴۵	۱۳/۴۲۸۹
$\theta_۲$	۴/۱۲۷۴	۰/۲۹۵۱	۱۳/۹۸۸۴
$\theta_۳$	−۰/۳۴۰۶	۰/۰۶۴۹	−۵/۲۵۰۳
$\theta_۴$	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۰۷	۹/۰۱۳۱
$\theta_۵$	۰/۶۷۵۶	۰/۰۱۶۴	۴۱/۱۲۳۱
$\theta_۶$	۱/۹۸۴۵	۰/۰۵۱۴	۳۸/۵۹۹۹
$\theta_۷$	۰/۲۰۱۲	۰/۰۱۲۷	۱۵/۸۶۶۶
$\theta_۸$	۰/۸۹۷۲	۰/۰۲۳۸	۳۷/۷۳۱۲
$\theta_۹$	۰/۰۷۲۸	۰/۰۲۳۲	۳/۱۳۴۳
$\theta_{۱۰}$	۰/۰۷۵۱	۰/۰۱۳۸	۵/۴۵۲۷

ملاحظه می شود که همبستگی بین $y_{t۱}$و $y_{t۲}$ منفی است و این بدین معنی است که حجم نقدینگی با تورم رابطهٔ عکس دارد و این مباحثی که در قسمت نظری مدل سازی مطرح شد، تناقض دارد.

حال بعد از حذف مشاهدهٔ مربوط به سال ۱۳۵۲، به بررسی برآورد پارامترها می پردازیم: با مقایسهٔ جدول ۲ با جدول ۱، ملاحظه می شود که تنها برآوردهای پارامتر $\theta_۹$ دو جدول با هم تفاوت فاحشی دارند. پارامتر $\theta_۹$ در معادلهٔ سوم (پایهٔ پولی)، مربوط متغیر لگاریتم کسر بودجهٔ دولت است. بنابر این حذف مشاهدهٔ مربوط به سال ۱۳۵۲ باعث بیشتر معنی دار شدن رابطهٔ بین پایهٔ پولی و کسر بودجهٔ دولت می شود. بدون در نظر گرفتن مشاهدهٔ مربوط به سال ۱۳۵۲، داریم:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۵۸ & -۰/۰۰۱۱ & ۰/۰۰۰۷ \\ -۰/۰۰۱۱ & ۰/۰۰۲۰ & ۰/۰۰۲۰ \\ ۰/۰۰۰۷ & ۰/۰۰۲۰ & ۰/۰۰۵۰ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۵۶ & -۰/۰۰۰۲ & ۰/۰۱۴ \\ -۰/۰۰۰۲ & ۰/۰۰۱۶ & ۰/۰۰۱۵ \\ ۰/۰۰۱۴ & ۰/۰۰۱۵ & ۰/۰۰۵۰ \end{bmatrix}$$

بنابر این ملاحظه می شود که همبستگی بین متغیرهای درون زا مثبت است و این نتیجه با مباحث نظری یکسان است.

جدول ۳: برآورده پارامترهای مدل، انحراف معیار برآوردها آمارهٔ t – استیودنت به روش $FIML$ بدون در نظر گرفتن مشاهدهٔ مربوط به سال ۱۳۶۲

پارامتر	برآورد	انحراف معیار	مقدار آمار t
$\theta_۱$	۰/۴۷۱۱	۰/۰۳۶۳	۱۲/۹۸۶۷
$\theta_۲$	۴/۲۰۰۴	۰/۳۰۶۲	۱۳/۷۱۷۷
$\theta_۳$	−۰/۳۵۶۸	۰/۰۶۸۵	−۵/۲۱۲۵
$\theta_۴$	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۰۷	۸/۵۸۹۳
$\theta_۵$	۰/۶۸۷۱	۰/۰۱۶۳	۴۲/۰۸۲۲
$\theta_۶$	۱/۹۴۸۰	۰/۰۵۲۹	۳۶/۷۹۸۱
$\theta_۷$	۰/۱۹۳۰	۰/۰۱۲۲	۱۵/۸۰۱۱
$\theta_۸$	۰/۸۵۲۹	۰/۰۲۰۷	۴۱/۱۸۹۵
$\theta_۹$	۰/۱۳۱۴	۰/۰۲۱۹	۵/۹۸۶۲
$\theta_{۱۰}$	۰/۰۶۸۴	۰/۰۱۱۲۷	۵/۳۶۴۴

حال بعد از حذف مشاهدهٔ مربوط به سال ۱۳۶۲، به بررسی برآورد پارامترها می پردازیم:

با مقایسهٔ جدول ۳ با جدول ۱، ملاحظه می شود تفاوت چندانی بین برآورد پارامترها وجود ندارد. وقتی که مشاهدهٔ مربوط به سال ۱۳۶۲ حذف می شود، داریم:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۴۷ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۱۰ \\ -۰/۰۰۱۲ & ۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۵ \\ -۰/۰۰۱۰ & -۰/۰۰۱۵ & ۰/۰۰۵۸ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۴۸ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۲۱ \\ -۰/۰۰۰۷ & ۰/۰۰۲۶ & -۰/۰۰۲۴ \\ -۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۲۴ & ۰/۰۰۵۸ \end{bmatrix}$$

بنابر این ملاحظه می شود که همبستگی بین متغیرهای درون زا مثبت است و این نتیجه اهمیت و تأثیر مشاهدهٔ مربوط به سال ۱۳۶۲ را نشان می دهد.

در آخر اقدام به حذف مشاهدات مربوط به سالهای ۱۳۵۲ و ۱۳۶۲ می کنیم و به بررسی نتایج حاصل می پردازیم: مقایسهٔ جدول ۴ با جدول ۱، نشان دهندهٔ اختلاف زیاد برآورد پارامتر $\theta_۹$ است.

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۴۹ & -۰/۰۰۱۲۸ & -۰/۰۰۱۹ \\ -۰/۰۰۱۲۸ & ۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۲۱ \\ -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۲۱ & ۰/۰۰۴۸ \end{bmatrix}$$

جدول ۴: برآورده پارامترهای مدل، انحراف معیار برآوردها آمارهٔ t – استیودنت به روش $FIML$ بدون در نظر گرفتن مشاهدات مربوط به سالهای ۱۳۵۲ و ۱۳۶۲

پارامتر	برآورد	انحراف معیار	مقدار آمار t
θ_1	۰/۴۷۲۷	۰/۰۴۰۶	۱۱/۶۴۹۸
θ_2	۴/۰۷۰۳	۰/۳۵۱۷	۱۱/۵۷۲۰
θ_3	−۰/۳۴۰۳	۰/۰۷۷۸	−۴/۳۷۴۸
θ_4	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۰۸	۷/۶۰۵۰
θ_5	۰/۶۸۷۷	۰/۰۱۶۰	۴۲/۹۶۰۳
θ_6	۱/۹۴۷۸	۰/۰۵۱۵	۳۷/۷۹۰۱
θ_7	۰/۱۹۲۲	۰/۰۱۲۱	۱۵/۸۹۱۷
θ_8	۰/۸۵۷۲	۰/۰۲۱۵	۳۹/۷۸۶۸
θ_9	۰/۱۲۳۰	۰/۰۲۳۲	۵/۳۰۹۷۰
θ_{10}	۰/۰۷۰۳	۰/۰۱۲۹	۵/۴۳۷۹

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \text{۰/۰۰۵۳} & \text{۰/۰۰۰۷} & \text{۰/۰۰۲۵} \\ \text{۰/۰۰۰۷} & \text{۰/۰۰۱۵} & \text{۰/۰۰۱۲} \\ \text{۰/۰۰۲۵} & \text{۰/۰۰۱۲} & \text{۰/۰۰۴۸} \end{bmatrix}$$

مقایسهٔ نتایج حاصل از حذف مشاهدات مربوط به سال های ۱۳۵۲ و ۱۳۶۲ نشان می دهد که در مجموع برآورد واریانس های جملات اختلال و پارامترهای مدل در مقایسه با نتایج قبل، کمتر است. بنابراین نتایج حاصل از حذف و بررسی مدل نیز مؤید مؤثر بودن مشاهدات مربوط به سالهای ۱۳۵۲ و ۱۳۶۲ است.

بعداز حذف مشاهدات سالهای ۱۳۵۲ و ۱۳۶۲، ملاکهای مربوط به تشخیص مشاهدات مؤثر هیچ مشاهدهٔ مؤثری را نشان ندادند.

پیوست ۱: داده های مربوط به تورم

جدول پیوست ۱: داده های مربوط به تورم

t	Log P_t	Log M_t	Log H_t	log $Y2_t$	DPF_t	Log B_t	Log BD_t	Log YO_t
۱۳۴۳	۴/۱۶	۴/۵۳	۳/۶۲	۶/۴۲	۳/۷۱	۰/۳۴	۲/۴۱	۴/۵۵
۱۳۴۴	۴/۱۶	۴/۶۶	۳/۷۸	۶/۵۱	۵/۱۷	۰/۹۹	۲/۰۰	۴/۵۹
۱۳۴۵	۴/۱۷	۴/۷۹	۳/۸۷	۶/۶۰	۳/۰۹	۰/۸۸	۲/۲۲	۴/۶۰
۱۳۴۶	۴/۱۸	۴/۹۷	۴/۰۰	۶/۶۵	۰/۷۱	۱/۴۱	۳/۳۴	۴/۹۸
۱۳۴۷	۴/۱۹	۵/۱۷	۴/۱۶	۶/۷۵	۱/۰۸	۱/۴۴	۳/۷۲	۴/۹۶
۱۳۴۸	۴/۲۳	۵/۳۳	۴/۳۲	۶/۸۲	۳/۹۸	۲/۳۱	۳/۸۷	۵/۰۷
۱۳۴۹	۴/۲۴	۵/۴۶	۴/۵۲	۶/۹۱	۶/۷۶	۱/۸۷	۴/۰۹	۵/۲۹
۱۳۵۰	۴/۲۹	۵/۶۹	۴/۶۹	۷/۱۵	۷/۵۴	۲/۷۹	۳/۴۹	۵/۶۷
۱۳۵۱	۴/۳۶	۵/۹۹	۴/۸۳	۷/۳۵	۷/۰۴	۳/۳۳	۴/۰۴	۵/۷۲
۱۳۵۲	۴/۴۶	۶/۲۵	۵/۱۳	۷/۶۷	۷/۴۴	۳/۸۱	۲/۵۸	۶/۱۴
۱۳۵۳	۴/۶۱	۶/۷۰	۵/۶۴	۷/۹۹	۹/۹۰	۴/۷۵	۴/۷۶	۷/۲۹
۱۳۵۴	۴/۷۰	۷/۰۴	۵/۹	۷/۹۹	۱۳/۶۲	۵/۱۹	۵/۲۷	۷/۲۲
۱۳۵۵	۴/۸۵	۷/۳۷	۶/۲۰	۸/۱۵	۱۷/۰۹	۵/۶۱	۵/۱۳	۷/۴۱
۱۳۵۶	۵/۰۸	۷/۶۳	۶/۶۰	۸/۲۰	۱۹/۸۸	۶/۰۳	۶/۱۳	۷/۴۵
۱۳۵۷	۵/۱۷	۷/۸۵	۷/۱۰	۷/۹۸	۲۳/۰۱	۵/۵۹	۶/۴۱	۷/۳۵
۱۳۵۸	۵/۲۸	۸/۱۷	۷/۳۴	۸/۰۷	۲۷/۷۸	۶/۲۰	۶/۲۷	۷/۲۵
۱۳۵۹	۵/۴۹	۸/۴۱	۷/۶۰	۷/۸۹	۳۴/۵۵	۶/۲۲	۶/۸۸	۶/۹۰
۱۳۶۰	۵/۷۰	۸/۵۶	۷/۸۸	۷/۹۲	۴۲/۷۴	۶/۳۷	۶/۹۶	۶/۸۹
۱۳۶۱	۵/۸۷	۸/۸۰	۸/۱۳	۸/۰۵	۵۱/۸۷	۶/۶۸	۶/۵۰	۷/۴۰
۱۳۶۲	۶/۰۴	۸/۹۲	۸/۲۳	۸/۱۸	۶۲/۳۴	۶/۷۹	۶/۸۰	۷/۴۳
۱۳۶۳	۶/۱۴	۸/۹۸	۸/۳۵	۸/۱۶	۷۵/۲۴	۶/۸۴	۶/۴۶	۷/۰۳
۱۳۶۴	۶/۱۸	۹/۱۱	۸/۵۰	۸/۱۱	۹۱/۵۶	۷/۰۹	۶/۴۷	۷/۱۱
۱۳۶۵	۶/۳۶	۹/۲۸	۸/۷۱	۷/۹۶	۱۱۱/۷۶	۷/۰۹	۷/۲۸	۷/۴۴
۱۳۶۶	۶/۶۲	۹/۴۵	۸/۹۳	۷/۹۹	۱۳۶/۰۵	۷/۰۹	۷/۲۹	۷/۶۸
۱۳۶۷	۶/۸۶	۹/۶۶	۹/۱۶	۷/۹۹	۱۶۵/۰۵	۷/۰۹	۷/۶۶	۷/۶۴

مراجع

[1] Cook R. D., and Weisberg S., 1982, *Residual and Influence in Regression, New York*: Chapman and Hall.
[2] Dempster A. P., Laivd N. M. and Rubin D. B. ,1977, Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm (With discussion), *J. Roy. Statist. Soc.* B(39), 1-38.
[3] Gujarati D., 1995*, Basic Econometrics* (3rd ed.), New York: McGraw-Hill.
[4] Hausman J. A., 1983, Handbook of Econometrics, Vol. 1, North-Holland Publishing Company.
[5] Johnson R. A. and Wichern D.W. 1998 , *Applied Multivariate Statistical Analysis* (2rd ed). Prentice Hall.
[6] Johnston J., 1984, Econometric Methods (3rd ed.), New York: Mc GRAW-HILL.
[7] Kmenta J., 1986, *Elements of Econometrics*, New York: Mc GRAW-HILL.
[8] Little R. J. and Rubin D. B., 2002, *Statistical Analysis With Missing Data*, New York: John Wiley.
[9] Zhao Y. and Lee A. H., 1998, Influence Diagnostics for Simultaneous Equation Models, *Austral. & New Zeland J. Statist*. 40(30): 345-357.
[۱۰] جهان رائینی، پروانه. (۱۳۷۰)، برآورد مدل تورم در ایران به روش دستگاه همزمان، پایان نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید چمران بهشتی.