مدل پروبیت و کاربرد آن در داده های پزشکی

سید محمد تقی آیت اللهی[۱] سعیده پور احمد[۲]
محمد علی وکیلی[۲،۳] تقی حیدری[۲،۴]

چکیده

یکی از مدل‌های خطی تعمیم یافته که امروزه به طور وسیعی در مطالعات پزشکی مورد استفاده قرار می گیرد، مدل پروبیت می باشد. به کمک این مدل می‌توان یک مدل رگرسیونی بین متغیر پاسخ دو حالتی با متغیرهای پیش بینی کننده کمی یا کیفی را ارائه نمود. مهمترین کاربرد مدل پروبیت مربوط به عیارگیری زیستی، احتمالات بقا و بررسی فاکتورهای خطر یک بیماری است.

در این مقاله، ابتداء به معرفی مدل پروبیت، نحوه برازش مناسب بودن مدل و چگونگی برآورد پارامترها پرداخته شد و پس از مقایسه آن با مدل لجستیک و مدل لگاریتم دو گانه مکمل، کاربرد مدل پروبیت و لجستیک در سه مثال از داده های پزشکی مورد بررسی قرار گرفت.

واژه‌های کلیدی: پروبیت، لوجیت، داده‌های پزشکی، مدل خطی تعمیم یافته، مدل لگاریتمی دوگانه مکمل، نرم افزارهای آماری،عیارگیری زیستی

۱. مقدمه

اغلب برای آنالیز داده های عیارگیری زیستی *(Bioassay)* مثل نسبت حشرات کشته شده با غلظت های مختلف یک حشره کش ، محاسبه احتمالات بقا در مطالعات مختلف و بررسی فاکتورهای خطر یک بیماری، با مواردی مواجه می شویم که متغیر پاسخ یک متغیر دو حالتی است[۳] و [۶]، لذا استفاده از مدلهای خطی ساده (مثل رگرسیون معمولی یا آنالیز واریانس) مقدور نمی باشد و باید به دنبال یافتن مدل هایی باشیم که شرط پیوستگی و نرمال بودن متغیر پاسخ را نداشته باشد، به عبارت دیگر در این شرایط بین متغیر وابسته و متغیر(متغیرهای) مستقل یک رابطه خطی وجود ندارد و تنها از طریق تبدیلات مختلف می توان این رابطه را خطی نمود، که این موضوع در قالب مدلهای خطی تعمیم یافته بیان می‌گردد. از بین مدلهای خطی تعمیم یافته[۵]، مهم ترین مدل ها برای متغیرهای وابسته دو حالتی، مدل های لجستیک[۶] و پروبیت[۷] هستند که این مقاله با هدف آشنایی با مدل پروبیت و مقایسه آن با مدل لجستیک با استفاده از مجموعه ای از داده های پزشکی نگارش یافته است.

۲. مدل پروبیت

در بسیاری از مطالعات مواردی پیش می آید که متغیر پاسخ در مقیاس دو حالتی اندازه گیری می شود، مثلاً پاسخ ها ممکن است مواردی مثل مردن یا زنده ماندن، داشتن یا نداشتن یک بیماری، موفقیت یا شکست یک روش درمانی و نظیر آنها باشند. در این حالات اگر متغیر پاسخ را Z بنامیم و موفقیت را با عدد یک و شکست را با عدد صفر نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$Z = \begin{cases} ۱ & \text{موفقیت} \\ ۰ & \text{شکست} \end{cases}$$

۱- استاد

۲- دانشجوی دکتری گروه آمار زیستی و اپیدمیولوژی دانشکده بهداشت، دانشگاه علوم پزشکی شیراز

۳- مربی، دانشگاه علوم پزشکی گرگان

۴- مربی، دانشگاه علوم پزشکی لرستان

۵- Generalized Linear Model

۶- Logistic

۷- Probit

که اگر احتمال موفقیت را با π نشان دهیم داریم:

$$P(Z=z)=\begin{cases}\pi & z=1\\ 1-\pi & z=0\end{cases}$$

برای یک نمونه n تایی از متغیرهای تصادفی $z_1, z_2, \dots, z_n$ مستقل از هم با $P(z_1=1)=\pi_1$، احتمال توأم آنها برابر است با :

$$\prod_{i=1}^{n}\pi_i^{z_i}(1-\pi_i)^{1-z_i}=$$

$$\exp\left[\sum_{i=1}^{n} z_i \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\pi_i)\right]$$

که عضوی از خانواده نمایی است[۴].

بنابراین اگر علاقه مند به مدل سازی احتمال موفقیت بر اساس متغیرهای مستقل مورد نظر باشیم می توانیم از مدلهای خطی تعمیم یافته استفاده کنیم زیرا همانطور که می دانیم از عناصر و فرضیات یک الگوی خطی تعمیم یافته، علاوه بر استقلال متغیرهای پاسخ تبعیت تابع احتمال متغیر پاسخ از فرم تابع احتمال خانواده نمایی است [۵].

برای مدل سازی احتمالات π_i با پیروی از الگوی مدل‌های خطی تعمیم یافته باید تابعی مثل g بیابیم که

$$g(\pi_i)=X_i^T\beta$$

که در آن X_i بردار متغیرهای مستقل، β بردار پارامترها و g تابع ارتباط بین X_i و π_i خواهد بود، که نمی تواند یک تابع همانی باشد، زیرا اگر

$$g(\pi_i)=\pi_i=X_i^T\beta$$

آنگاه با توجه به اینکه π_i یک احتمال است و همواره در بازه [۱ ۰] قرار می گیرد، مقدار برازش شده $X_i^T\beta$ ممکن است با تغییر مقادیر X_i در خارج از این بازه قرار گیرد. برای اطمینان از اینکه مقدار برازش شده برای π_i در فاصله [۱ ۰] محدود می شود، باید از توابع ارتباطی استفاده نمود که برد تابع معکوس آنها در محدوده[۱ ۰] قرار گیرد ،یکی از توابع ارتباط ، تابع توزیع احتمال تجمعی متغیرهای پیوسته است. بر اساس این تابع ارتباط می توان یک مدل برای π_i بدست آورد.

در حالتی که یک متغیر مستقل داشته باشیم، داریم:

$$\pi=g^{-1}(\beta_0+\beta_1 x)=\int_{-\infty}^{\beta_0+\beta_1 x} f(s)\,ds$$

وقتی که تابع f (s) یک تابع چگالی احتمال است و داریم :

$$(1)\qquad f(s)\geq 0 \qquad 2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,ds=1$$

باید این چگالی احتمال را که به توزیع تحمل[1] معروف است به گونه ای بیابیم که هیچ محدودیتی بر دامنه مقادیر متغیرهای مستقل حاکم نشود.

درسال ۱۹۳۰، چستر بلیس[2] تابع احتمال نرمال را برای f(s) پیشنهاد کرد به گونه ای که اگر f(s) تابع چگالی احتمال نرمال باشد، آنگاه:

$$\pi=g^{-1}(\beta_0+\beta_1 x)=\int_{-\infty}^{\beta_0+\beta_1 x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2\right]ds=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

که در آن Φ تابع احتمال تجمعی نرمال استاندارد است. بنابراین

$$\Phi^{-1}(\pi)\,\beta_0=\beta_1 x$$

وقتی که $\beta_0=\frac{-\mu}{\sigma}$ و $\beta_1=\frac{1}{\sigma}$ و تابع ارتباط g هم معکوس تابع احتمال تجمعی نرمال استاندارد (Φ^{-1}) است، به این مدل اصطلاحاً مدل پروبیت *(Probit)* گفته می شود که برگرفته از دو کلمه *Probability Unit* است[۳].

مدل پروبیت در زمینه های مختلف از جمله علوم اجتماعی، زیست شناسی، ژنتیک، سم شناسی و پزشکی کاربردهای فراوان دارد. به خصوص در تحقیقات مربوط به تعیین دوز دارو یا کشندگی یک سم که در آنها متغیر پاسخ بصورت موفقیت و شکست تعریف می شود، در این حالات تعبیرهای طبیعی جالبی از این مدل می توان داشت، مثلاً در مطالعه درصد حیوانات آزمایشگاهی که بوسیله سطوح مختلف دوز یک ماده سمی کشته می شوند اگر متغیر مستقل X را سطوح مختلف دوز ماده سمی در نظر بگیریم و متغیر پاسخ درصد مرگ حیوانات از این دوزها باشد میتوانیم دوزی را بیابیم که بطور میانگین باعث از بین رفتن ۵۰ درصد حیوانات می شود:

$$0/5=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\Rightarrow \frac{x-\mu}{\sigma}\Rightarrow x=\mu$$

Tolerance function -۱

Chester Bliss-۲

به این سطح ($x=\mu$) دوز کشنده میانه[۱] یا $LD_{(50)}$ گفته می شود که برای نشان دادن قدرت کشندگی مواد سمی از جمله حشره کشها ، شاخص مناسبی به حساب می آید[۴].

۳. روش های برآورد پارامترهای مدل

پارامترهای مدل پروبیت را با استفاده از دو روش ماکزیمم درستنمایی (MLE) و حداقل مربعات وزنی، که روش های معمول برآورد پارامترها در مدل های رگرسیونی با پاسخ دو حالتی هستند، برآورد می کنیم[۴و۵].

۱-روش ماکزیمم درستنمائی[۲] (MLE): این روش حتی برای حالتی که $n_i=1$ یا $y_i=0$ می باشد نیز امکان پذیر است (برخلاف بعضی روش ها مثل روش حداقل مربعات). اگر U بردار نمره ها (Score vector) و I ماتریس اطلاع فیشر باشد :

$$U_{\%}\left[\frac{\partial l}{\partial \beta_i}\right] \qquad i=1,2,\ldots,n$$

و

$$I=\left[\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_i\,\partial \beta_j}\right] \qquad i,j=1,2,\ldots,n$$

آن گاه با تشکیل معادله زیر و حل آن به روش تکراری می توان برآوردهای ماکزیمم درستنمائی را برای پارامترهای مدل بدست آورد:

$$I^{(m-1)}\,b^{m}=I^{(m-1)}\,b^{(m-1)}+U^{(m-1)}$$

که در آن m نشان دهنده تقریب mام و b بردار برآوردهاست. ابتدا با جایگذاری مقادیر اولیه برای بردار پارامترها (b°) در مدل، تقریب بعدی برآورد پارامترها (b^{1}) را محاسبه کرده و این روش را تا جایی تکرار می کنیم که اصطلاحاً همگرایی[۳] حاصل شود. به عبارت دیگر دو تقریب متوالی از برآوردها کاملاً به هم نزدیک شوند در این صورت تقریب نهایی را می توان به عنوان برآورد پارامترهای مدل در نظر گرفت.

۲-روش حداقل مربعات وزنی[۴]: برای پرهیز از تکرار در محاسبات، روش حداقل مربعات وزنی بر روش ماکزیمم درستنمائی ارجحیت دارد. برای استفاده از روش فوق به ترتیب زیر عمل می کنیم:

اگر $p=\frac{y}{n}$ سهم موفقیت باشد و Ψ را تابعی از p در نظر بگیریم، بسط سری تیلور[۵] $\Psi(p)$ حول نقطه $p=\pi$ (π احتمال موفقیت) برابر است با:

$$\Psi(p)=\Psi\left(\frac{y}{n}\right)=\Psi(\pi)+\left(\frac{y}{n}-\pi\right)\Psi'(\pi)+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (1)$$

از اولین تقریب در معادله (۱) نتیجه می شود :

$$E\left(\Psi(p)\right)=\Psi(\pi)$$

چون

$$E(p)=E\left(\frac{y}{n}\right)=\pi$$

همچنین

$$\operatorname{var}(\Psi(p))=E\left[\psi(p)-\psi(\pi)\right]^2=\left[\Psi'(\pi)\right]^2 E\left(\frac{y}{n}-\pi\right)^2$$

$$\left[\Psi'(\pi)\right]^2\ \frac{\pi(1-\pi)}{n} \qquad\qquad \operatorname{var}\left(\frac{y}{n}\right)=\operatorname{var}(p)$$

بنابراین آماره حداقل مربعات وزنی برابر است با

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\left[\Psi\left(\frac{y_i}{n_i}\right)-\Psi(\pi_i)\right]^2}{\left[\Psi'(\pi_i)\right]\pi_i\ \ (1-\pi_i)/n_i}\right]$$

در واقع مقدار خطای برآورد عبارت است از:

$$\Psi\left(\frac{y_i}{n_i}\right)-\Psi\left(\pi_i\right)$$

که با واریانس آن وزن داده شده است. بعضی توابع معمول Ψ در جدول زیر خلاصه شده است.(جدول ۱)

اگر $\Psi\left(\pi_i\right)=\pi_i$ و $\pi_i=X^T\beta$ مقدار کای اسکور اصلاح شده برابر است با :

$$\chi^2_{\text{mod}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{(p_i-\pi_i)^2}{\pi_i(1-\pi_i)/n_i}$$

۱- Median lethal dose

۲- Maximum Likelihood Estimation

۳- Converge

۴- Weighted Least Square Method

۵- Taylor Series

برای برآورد β در این حالت نیاز به روش تکراری نیست. اگر چه ممکن است مقدار $\hat{\pi}_i = X^T\beta$ همواره بین صفر و یک نباشد.

اگر $\Psi(\pi_i) = \log it(\pi_i)$، داریم:

$$\frac{\exp(X^T\beta)}{1+\exp(X^T\beta)}$$

پس:

$$\chi^2_{\text{mod}} = \sum_{i=1}^{N} (z_i - x_i^T\beta)^2 \frac{y_i(n_i - y_i)}{n_i} \qquad (2)$$

وقتی که $z_i = \log it(p_i) = \ln \frac{y_i}{n_i - y_i}$.

در این مدل نیز برای برآورد پارامترها نیاز به روش تکراری نمی باشد و π_iها در دامنه صفر و یک قرار می گیرند. کاکس این روش را تبدیل لجستیک کاربردی می‌نامد و پیشنهاد می کند از $z_i = \ln \frac{y_i + 0/5}{n_i - y_i + 0/5}$ برای کاهش اریبی $E(z_i - x_i^T\beta)$ استفاده شود. مینیمم مقداری که از (۲) بدست می آید را آماره کای اسکور لجستیک مینیمم می نامیم.

مدل $\Psi(\pi_i) = \arcsin\sqrt{\pi_i}$ با هر انتخابی برای π_i دارای خاصیت پایایی واریانس می باشد زیرا

$$\text{var}(\Psi(p_i)) = (\Psi'(\pi_i))^2 \ \pi_i(1-\pi)/n = (4n_i)^{-1}$$

بنابراین وزن‌ها به پارامترها یا پاسخ ها بستگی ندارد و در نتیجه محاسباتی که از این تبدیل استفاده می کند بسیار ساده بوده و با ماشین حساب معمولی هم قابل محاسبه می باشد.

٤. سنجش برازش[1] مدل پروبیت

پس از برازش کردن مدل پروبیت می توان مناسب بودن مدل برازش شده به داده ها را با یکی از روش های زیر بررسی کرد :

۱- استفاده از آماره نسبت لگاریتم درستنمائی[2] : این آماره به صورت زیر تعریف می گردد :

$$D = 2\left[l(\hat{\pi}_{\max}; y) - l(\hat{\pi}; y)\right]$$

وقتی که $\hat{\pi}_{\max} = \frac{y_i}{n_i}$, $\hat{\pi}$ هم بردار برآوردهای ماکزیمم درستنمائی برای مدل پروبیت می باشد. آماره D از توزیع کای اسکور با درجه آزادی $N\text{-}p$ پیروی می کند $(D:\chi^2_{N-p})$. مناسب بودن مدل با مقایسه آماره D با $D:\chi^2_{N-p}, \alpha$ بررسی می شود، که در آن p تعداد پارامترهای برآورد شده β است. می توان D را با فرمول زیر نیز محاسبه نمود :

$$D = 2\sum o \ \ln\frac{o}{e}$$

وقتی که o مقادیر مشاهده شده y_i و $(n_i - y_i)$ و e_i مقادیر مورد انتظار از مدل برازش شده اند (جدول ۲).

۲- روش مینیمم کردن مجموع مربعات وزنی: به جای استفاده از روش درستنمائی می توان از روش کمینه سازی[3] مجموع مربعات وزنی برای برازش مدل استفاده کرد. داریم:

$$S_w = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - n_i\pi_i)}{n_i\pi_i(1-\pi_i)}$$

که این روش معادل کمینه سازی آماره کای اسکور پیرسن[4] می باشد

$$\chi^2 = \sum \frac{(o-e)^2}{e}$$

که در آن o مقادیر مشاهده شده و e مقادیر برازش می باشد (جدول ۲).

۳- استفاده از آماره کای اسکور اصلاح شده

$$\chi^2_{\text{mod}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - n_i\pi_i)^2}{n_i\pi_i(1-\pi_i)}$$

اگر مدل صحیح باشد هر سه آماره D, χ^2, χ^2_{mod} دارای توزیع χ^2_{N-p} می باشند. شواهد نشان می دهد که χ^2 بهتر از D است، زیرا D تحت تأثیر فراوانی های کوچک قرار می گیرد. هر سه آماره وقتی مقادیر مورد انتظار کوچک باشند، ضعیف عمل می‌کنند. (جدول ۲)

٥. روش های جایگزین مدل پروبیت

در مواردی که متغیر پاسخ دو حالتی است، علاوه بر مدل پروبیت می توان از مدل‌های جایگزین زیر هم استفاده کرد:

۱- Goodness-of-fit
۲- Log-Likelihood

۳- Minimization
٤- Pearson-Chi Squared Statistics

۱- مدل لجستیک: این مدل بسیار به مدل پروبیت نزدیک است به گونه ای که گاهی اوقات با مدل پروبیت اشتباه گرفته می‌شود. در این مدل، که به جای تابع ارتباط توزیع تجمعی نرمال از تابع ارتباط لوجیت استفاده می شود، داریم:

$$g(\pi)=\ln\frac{\pi}{1-\pi}=X^T\beta \quad\Rightarrow\quad \pi=\frac{\exp\left(X^T\beta\right)}{1-\exp\left(X^T\beta\right)}$$

و

$$\frac{\pi}{1-\pi}=odds \quad , \quad \ln\frac{\pi}{1-\pi}=\ln(odds)=\log it$$

نمودار دو تابع لوجیت و پروبیت S شکل، برد آنها بین صفر و یک، حول $\pi=0/5$ متقارن ، در بازه ۰/۸-۰/۲ تقریباً خطی و اختلاف دو مدل در نقاط ابتدایی و انتهایی مقادیر x می باشد (شکل شماره ۱).

مدل لجستیک بیشتر برای مطالعات مشاهده ای مناسب است در حالی که مدل پروبیت برای مطالعات تجربی به کار می‌رود. در مطالعاتی که علاقه مند به محاسبه نسبت شانس[۱] برای متغیرهای مستقل باشیم از مدل لجستیک استفاده می کنیم در حالی که روش پروبیت برای تعیین مقادیر کلیدی و مؤثر متغیر مستقل که $\hat{\pi}_i$ دارای مفهوم خاصی برای ما باشد مثل دوز کشنده میانه یعنی دوزی که موجب مرگ و میر حداقل ۵۰ درصد حیوانات آزمایشگاهی شود (LD_{50})([۲]).

۲- مدل لگاریتم دوگانه مکمل[۲] : تابع ارتباط دیگری که می‌تواند جایگزین مدل پروبیت شود تابع لگاریتم دوگانه مکمل می‌باشد که بصورت زیر تعریف می شود:

$$g(\pi)=\ln\left[-\ln(1-\pi)\right]=X^T\beta \quad\Rightarrow \quad \pi=1-\exp\left[-\exp(1-\pi)\right]$$

این مدل نیز وقتی که π به ۰/۵ نزدیک باشد شبیه مدل پروبیت و لجستیک است، اما هر چه π به صفر یا یک نزدیک تر می شود از دو مدل دیگر فاصله می گیرد و برای مواردی استفاده می‌شود که پراکندگی بین داده ها زیاد باشد یا مقادیر افراطی در داده ها موجود باشد.

۶. کاربرد مدل پروبیت در داده های پزشکی و مقایسه آن با مدل لجستیک

مثال ۱: در یک بررسی به منظور برآورد احتمال قاعدگی در گروههای سنی مختلف، مطالعه ای بر روی دانش آموزان دختر مقاطع راهنمایی و متوسطه مدارس دولتی، نمونه مردمی و غیر انتفاعی شیراز در سال تحصیلی ۷۷-۱۳۷۶ انجام شده است([۷]).

در این مطالعه با روش نمونه گیری چند مرحله ای یک نمونه دو درصدی از کل دانش آموزان مورد نظر به حجم ۱۸۶۶ نفر مورد بررسی قرار گرفته و تعداد و درصد افراد قاعده شده در هر گروه سنی محاسبه شده اند، جدول زیر اطلاعات مربوطه را نشان می دهد.

لازم به ذکر است که متغیر مستقل سن (x) به صورت میانگین سن در هر گروه سنی در نظر گرفته شده و متغیر وابسته (P) (احتمال قاعدگی) از طریق فراوانی نسبی تعداد افراد قاعده شده در هر گروه سنی محاسبه شده است(جدول شماره ۳).

پس از برازش مدل پروبیت به وسیله نرم افزارSPSS و محاسبه ضرائب مدل احتمال قاعدگی در هر گروه سنی با استفاده از تابع ارتباط نرمال $P^*=\Psi(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x)$ و مقادیر برازش شده مدل از فرمول $e_i=n_i p_i$ محاسبه و سپس سنجش برازش مدل با آماره χ^2 بررسی شده است. در جدول ۴، مقادیر برازش شده و در جدول۵، هر دو روش برآورد ضرایب مدل (MLE و WLS) در دو مدل لوجستیک و پروبیت ارائه و مقایسه شده است. (جدول ۳و۴و۵)

مثال۲: در یک مطالعه مورد شاهدی در شهرستان جهرم، ضمن جوری‌سازی سن و جنس، عوامل مؤثر بر پیرگوشی در ۱۵۲ فرد بیمار و ۱۵۲ فرد بیمار مورد بررسی قرار گرفتند. با استفاده از مدل پروبیت رابطه بین متغیر پاسخ (ابتلا یا عدم ابتلا به بیماری) و متغیرهای مستقل (آلودگی صوتی محیط کار، سابقه خانوادگی، بیماری دیابت، فشارخون و چربی خون، سرگیجه و وزوز گوش[۳]) مورد بررسی قرار گرفت[۸]، تمام متغیرهای مستقل دو حالتی بودند و مشخص گردید که متغیرهای آلودگی صوتی محیط کار، سابقه خانوادگی و وزوز گوش بر پیرگوشی مؤثر هستند، با بکارگیری مدل لجستیک نیز همین نتایج تأیید گردید، که نتایج حاصله در جدول ۶ تا ۸ ارائه گردیده است. جدول شماره ۶ مقادیر مشاهده شده و برازش شده را در هر دو مدل نشان می دهد. همانطور که مشاهده می گردد تفاوت قابل توجهی بین مقادیر برازش شده در هر دو مدل وجود ندارد. در جدول شماره ۷ برآورد MLE پارامترها در مدل های برازش شده به همراه خطای استاندارد آنها آورده شده است. در جدول شماره ۸ مقادیر χ^2, D برای سنجش برازش مدل ها آمده

۱- odds Ratio

۲- Complementary Log-Log

۳- Tinnitus

است که مناسب بودن برازش مدل در هر دو مدل تأیید می شود. (جدول ۶و۷و۸)

مثال ۳: در شهرستان گرگان، مطالعه ای با هدف تعیین فرسودگی شغلی و عوامل موثر بر آن در جامعه پرستاران شاغل در مرکز آموزشی درمانی پنج آذر انجام گردید. از ۱۹۲ فرد مورد مطالعه، ۴۷ نفر (۲۴/۵ درصد) با فرسودگی شغلی بودند[۱]، با استفاده از نرم افزار آماری Minitab ، رابطه فرسودگی شغلی با جنس، وضعیت تأهل، سن، ساعات کار در هفته و سابقه کار با مدل پروبیت و لوجستیک مورد بررسی قرار گرفت. جهت بررسی مناسب بودن مدل از آماره‌های D, χ^2 بهره گرفتیم که هر دو مقدار آماره های پیش‌گفت در هر دو مدل، بیانگری برازش مناسب داده ها می باشد (جدول شماره۹).

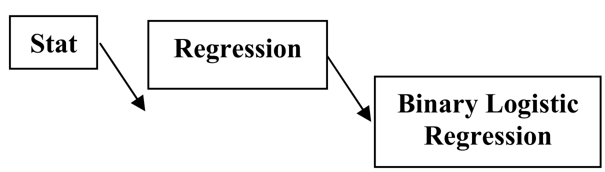
در بررسی رابطه فرسودگی شغلی با متغیرهای مستقل با استفاده از مدل پروبیت و با اثرات اصلی، یافته ها بیانگر آن است که فرسودگی شغلی با وضعیت تأهل با اختلاف معنی دار می باشد، ولی نسبت به سایر متغیرها مستقل باشد، بدین ترتیب که فرسودگی شغلی در متأهلین نسبت به مجردین بیشتر می باشد، که این نتایج با یافته‌های حاصله از مدل لجستیک نیز همخوانی دارد (جدول شماره ۱۰) (جدول شماره ۹).

۷. طریقه استفاده از نرم افزارهای آماری

اکثر نرم افزارهای آماری قابلیت انجام آنالیز پروبیت و روشهای جایگزین را دارند. در این قسمت به اختصار طرز استفاده از نرم افزارهای SPSS [۹] و Minitab [۱۰] برای انجام محاسبات فوق بیان می شود:

نرم افزار Minitab

روش MLE: از منوی stat گزینه Regression و سپس گزینه Binary Logistic Regression را انتخاب می‌کنیم.

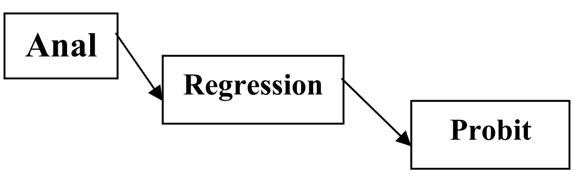


در منوی ظاهر شده متغیر وابسته را در فیلد Response (اگر داده ها به صورت جدول فراوانی وارد شده باشند ستون مربوط به فراوانی داده ها را در فیلد Frequency وارد می کنیم) و متغیرهای توضیحی را در قسمت Model وارد کرده و درصورتی که فاکتور باشند در قسمت Factor آنها را تعریف می کنیم. بطور پیش فرض Minitab رگرسیون لجستیک را برازش می کند، برای برازش مدل پروبیت گزینه Option را باز نموده و گزینه Probit را انتخاب می کنیم (در ضمن می توانیم مدل لگاریتم دوگانه مکمل را به همین طریق انتخاب کنیم) و سپس به منوی اصلی باز می گردیم. اگر بخواهیم اطلاعات بیشتری درباره برازش مدل بدست آوریم مثل مقادیر باقیمانده ها، نمودارهای برازش مدل و ... گزینه های دیگر این منو را انتخاب می کنیم.

روش WLS: از منوی Calc گزینه Calculator را انتخاب نموده و مقادیر احتمال در هر گروه را بدست می آوریم، سپس از همان منو گزینه Probability Distribution را انتخاب نموده گزینه Normal را انتخاب می کنیم، گزینه Inverse cumulative probability را انتخاب نموده در قسمت Input ستون احتمالات و در قسمت optional strong ستون خروجی را مشخص می کنیم. از منوی Stat گزینه Regression را انتخاب نموده، متغیر فوق را بعنوان پاسخ و متغیرهای توضیحی (که باید پیوسته باشند) را بسته به موضوع انتخاب می کنیم و در گزینه option عکس تعداد موارد را بعنوان وزن تعریف می کنیم و سپس به منوی اصلی بازگشته و آنالیز را به اتمام می رسانیم.

نرم افزار SPSS

روش MLE: از منوی Analyze گزینه Regression گزینه Probit را انتخاب می کنیم.



فرمت داده ها باید به صورت جدول فراوانی باشد. در گزینه Response متغیر پاسخ (فراوانی پیروزی های مشاهده شده)، در گزینه Total Observed مقدار کل شکست و پیروزی، در گزینه Factor فاکتور مورد بررسی (باید دامنه تغییرات فاکتور را نیز مشخص نمود) و در گزینه Covariate متغیرهای توضیحی مدل را وارد می کنیم.

روش WLS: از منوی Transform گزینه Compute را انتخاب نموده و مقادیر احتمال را در هر گروه بدست می آوریم، سپس دوباره به همان گزینه برگشته و Function IDF.Normal

ستون احتمالات را بعنوان p و اعداد ۰ و ۱ را که میانگین و واریانس توزیع نرمال استاندارد می باشد را تعریف می کنیم. پس از انجام این تبدیلات از منوی Analyze گزینه Regression را انتخاب نموده، متغیر فوق را بعنوان پاسخ و متغیرهای توضیحی (که باید پیوسته باشند) را بسته به موضوع انتخاب می کنیم و در گزینه WLS عکس تعداد موارد را بعنوان وزن تعریف می کنیم و سپس به منوی اصلی بازگشته و آنالیز را به اتمام می رسانیم.

تذکر : نرم افزارهای SPSS و Minitab ، به طور متداول، قابلیت محاسبه برآورد پارامترها به روش WLS در مدل هـای لجستیک و لوجبت را ندارند و به همین دلیل تنها در مثال اول که شـامل متغیـر مستقل پیوسته است، با استفاده از روش رگرسیون معمولی و با متغیر پاسخ تبدیل یافته، برآورد پارامترها بـه روش حـداقل مربعـات وزنـی محاسبه شده اسـت ولـی در مثـال هـای ۲و۳، بـا توجـه بـه حـضور متغیرهای مستقل نا پیوسته، امکان محاسبه برآورد پارامترها به روش WLS نبوده است.

۸. نتیجه گیری

کاربرد برجسته مدل پروبیـت مربـوط بـه مطالعـات عيـارگيری زیستی و بیشتر به منظور تعیین دوزی از دارو است که موجب از بین رفتن حداقل ۵۰ درصد نمونه ها (حشرات) در بررسی اثر حشره کشها می باشد.

در این مقاله، ما کاربرد مدل پروبیت را به عنـوان یکـی از سـه مدل مورد استفاده در داده هایی با متغیر پاسخ دو حالتی با ذکر سـه مثال در مجموعـه تحقیقـات پزشـکی مـورد بررسـی قـرار داده ایـم. همانطور که از نتایج قابل مشاهده است این مدل بسیار شبیه به مدل لجستیک بوده و هر دو مدل ایـن نـوع داده هـا را بـه خـوبی بـرازش می کنند، ولی بدیهی است که دو نگرش مختلف از نحـوه پراکنـدگی داده ها بر اساس احتمالات مربوطه (نمودار ۱) ایده اصلی اسـتفاده از توزیع تجمعی نرمال (مدل پروبیت) و تابع توزیـع تجمعـی لجـستیک (مدل لجستیک) برای تحلیل چنین داده هایی بـوده اسـت. در مـدل لجستیک امکان محاسبه مقادیر نسبت خطـر در مطالعـاتی کـه یـک گروه از اعضای نمونه با عامل خاصـی مواجـه داده شـده انـد و هـدف بررسی اثر عامل خطر در نحوه پاسخگویی اعضای نمونه است (متغیـر پاسخ) وجود دارد، که این مقادیر در تحقیقات پزشکی حـائز اهميـت می باشد. با این وجود به کارگیری مدل لجستیک و پروبیـت در سـه مثال ارائه شده نـشان داد کـه دو مـدل در تعیـین تـاثير متغیرهـای مستقل با متغیر وابسته و میزان معنی داری آنها نتایج مـشابهی ارائـه نمودند که این نتایج با الگوی مقایسه ای نمودار یـک همخـوانی دارد. می دانیم که تفاوت عمده مدل لجستیک و پروبیت در بررسی رابطـه یک متغیر مستقل بـا متغیـر وابـسته دو حـالتی در نقـاط ابتـدایی و انتهایی مقادیر متغیر مستقل می باشـد (نمـودار یـک) و مهـم تـرین تفاوت کاربردی آنها نیز در مناسب بودن مدل پروبیت برای مطالعـات تجربی و مدل لوجیت برای مطالعات مشاهده ای مـی باشـد، کـه بـه دلیل محدویت مثالهای ارائه شده به خوبی نتوانستند تمایز جـدی دو روش را نمایش دهند. ولی می توان گفت در اغلب موارد، به کارگیری هر کدام از دو مدل لجستیک یا پروبیت در داده های با متغیـر پاسـخ دو حالتی مناسب بوده و اختلاف قابل توجهی مطرح نمی باشد.

علاوه بر آن همانطور که قبلاً گفته شده مناسـب بـودن بـرازش مدل لگاریتم دوگانه مکمل بر داده های ابتدائی و انتهائی بیانگر وجـه تمایز این مدل با مدلهای پروبیت و لجستیک اسـت، و ایـن مـدل بـه عنوان جایگزینی برای مدل پروبیت در مواردی استفاده می شود کـه داده های پرت در مشاهدات وجود داشته باشد.

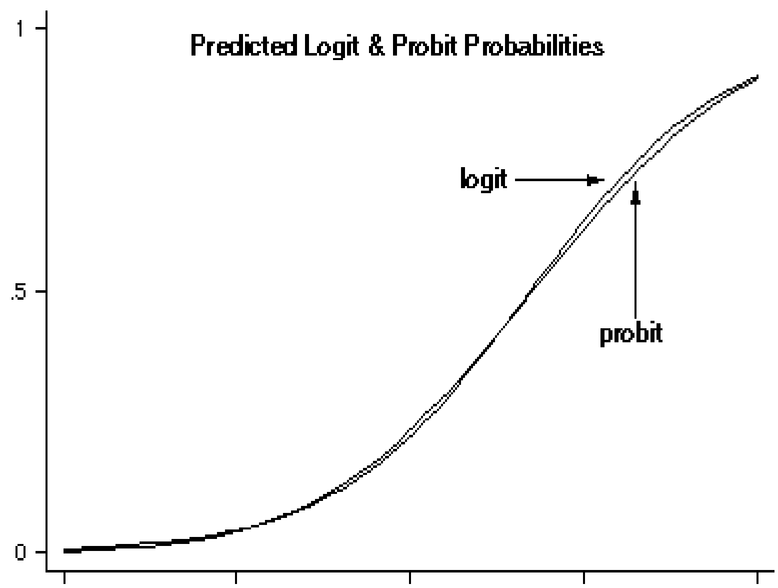
جدول ۱. مدل های حداقل مربعات وزنی معمول برای داده های دو حالتی

$\Psi(\pi_i)$	χ^2
π_i	$\sum_{i=1}^{N} \frac{(p_i-\pi_i)^2}{\pi_i(1-\pi_i)/n_i}$
$\operatorname{log}it(\pi_i)$	$\sum_{i=1}^{N} [(\operatorname{log}it\ (p_i)-\operatorname{log}it(\pi_i\ (1-\pi_i)/n_i]$
$\arcsin\sqrt{\pi_i}$	$\sum_{i=1}^{N} 4n_i\left[\arcsin\sqrt{p_i}-\arcsin\sqrt{\pi_i}\ \right]^2$

جدول ۲. فراوانی N جامعه دارای توزیع دوجمله ای

زیر گروهها				
	۱	۲	...	N
موفقیت شکست	$y_{۱}$ $n_{۱}-y_{۱}$	$y_{۲}$ $n_{۲}-y_{۲}$		y_N n_N-y_N
مجموع	$n_{۱}$	$n_{۲}$		n_N

نمودار ۱. مقایسه منحنی پروبیت و لجستیک



مقدار متغیر پیش بینی کننده

جدول ۳. مقادیر احتمال مشاهده شده و برازش شده قاعدگی به وسیله مدل پروبیت در گروههای سنی مختلف

گروههای سنی	x	تعداد کل افراد	تعداد افراد قاعده شده	P	P^*
۱۱-۱۱/۵	۱۱/۲۵	۶۰	۵	۰/۰۸۳۳	۰/۰۸۶۲
۱۱/۵-۱۲	۱۱/۷۵	۱۵۷	۲۰	۰/۱۲۷۴	۰/۱۶۷۴
۱۲-۱۲/۵	۱۲/۲۵	۱۳۱	۳۸	۰/۲۹۰۱	۰/۲۸۶۲
۱۲/۵-۱۳	۱۲/۷۵	۲۵۳	۱۱۲	۰/۴۴۲۸	۰/۴۳۴۵
۱۳-۱۳/۵	۱۳/۲۵	۱۳۵	۸۶	۰/۶۳۷۰	۰/۵۹۲۹
۱۳/۵-۱۴	۱۳/۷۵	۲۵۳	۱۸۷	۰/۷۳۹۱	۰/۷۳۷۲
۱۴-۱۴/۵	۱۴/۲۵	۲۰۳	۱۷۹	۰/۸۸۱۸	۰/۸۴۹۶
۱۴/۵-۱۵	۱۴/۷۵	۱۴۸	۱۳۱	۰/۸۸۵۱	۰/۹۲۴۳
۱۵-۱۵/۵	۱۵/۲۵	۱۷۳	۱۶۸	۰/۹۷۱۱	۰/۹۶۶۷
۱۵/۵-۱۶	۱۵/۷۵	۳۰	۲۹	۰/۹۶۶۷	۰/۹۸۷۳
۱۶-۱۶/۵	۱۶/۲۵	۱۷۲	۱۷۰	۰/۹۸۸۴	۰/۹۹۵۸
۱۶/۵ و بیشتر	۱۶/۷۵	۱۴۷	۱۴۷	۱	۰/۹۹۸۸

جدول ۴. مقایسه مقادیر برازش شده مدل پروبیت و لجستیک

گروههای سنی	مقادیر مشاهده شده	مقادیر برازش شده مدل پروبیت	مقادیر برازش شده مدل لجستیک
۱۱-۱۱/۵	۵	۵/۱۷۴	۵/۰۸۰
۱۱/۵-۱۲	۲۰	۲۶/۲۸۳	۲۴/۶۸۶
۱۲-۱۲/۵	۳۸	۳۷/۴۸۷	۳۵/۸۱۷
۱۲/۵-۱۳	۱۱۲	۱۰۹/۹۴۰	۱۰۹/۱۶۵
۱۳-۱۳/۵	۸۶	۸۰/۰۴۱	۸۱/۶۵۶
۱۳/۵-۱۴	۱۸۷	۱۸۶/۵۲	۱۹۱/۱۰۳
۱۴-۱۴/۵	۱۷۹	۱۷۲/۴۶۶	۱۷۴/۹۱۱
۱۴/۵-۱۵	۱۳۱	۱۳۶/۷۹۴	۱۳۷/۰۸۵
۱۵-۱۵/۵	۱۶۸	۱۶۷/۲۳۸	۱۶۶/۴۳۰
۱۵/۵-۱۶	۲۹	۲۹/۶۱۸	۲۹/۴۲۴
۱۶-۱۶/۵	۱۷۰	۱۷۱/۲۷۴	۱۷۰/۳۴۷
۱۶/۵ و بیشتر	۱۴۷	۱۴۶/۸۲۲	۱۴۶/۲۹۶

جدول ۵ . برآورد ضرایب و سنجش برازش مدل پروبیت و لجستیک

		مدل پروبیت			مدل لجستیک		
	ضرائب	مقدار	خطای معیار	P-value	مقدار	خطای معیار	P-value
	MLE	-۱۰/۳۶۰	۰/۴۷	۰/۰۰۰	-۱۸/۱۶۶	۰/۸۹۸	۰/۰۰۰
	WLS	-۱۰/۵۴۳	۰/۰۶	۰/۰۰۰	-۱۸/۳۳۸	۰/۰۹۳	۰/۰۰۰
	MLE	۰/۷۹۹	۰/۳۶	۰/۰۰۱	۱/۴۵۳	۰/۰۶۸	۰/۰۰۰
	WLS	۰/۸۱۰	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰	۱/۴۱۲	۰/۰۰۸	۰/۰۰۰
		χ^2=۱۱/۴۱ df=۱۰		۰/۳۲۶	χ^2=۸/۱۵۷ df=۱۰		۰/۶۱۴

جدول ۶. مقایسه مقادیر مشاهده شده و برازش شده داده های پیرگوشی توسط دو مدل پروبیت و لجستیک

آلودگی صوتی محیط کار			وزوز گوش: بلی	وزوز گوش: خیر
بلی	سابقه خانوادگی	بلی	۵ (۴/۹۷) [۴/۹۳]	۱۳ (۱۳/۰۴) [۱۲/۹۷]
		خیر	۷ (۸/۱۳) [۸/۱۴]	۱۹ (۸/۶۳) [۱۷/۹۶]
خیر		بلی	۱۰ (۱۰/۵۲) [۱۰/۴۴]	۲۷ (۲۶/۳۳) [۲۶/۶۶]
		خیر	۲۲ (۲۰/۰۱) [۲۰/۴۹]	۴۹ (۵۰/۹۷) [۵۰/۴۰]

پرانتز مقدار برازش شده مدل پروبیت و براکت مقدار برازش شده مدل لجستیک

جدول ۷. مقادیر برازش شده برآورده MLE پارامترهای مدل

متغیر	مدل پروبیت			مدل لجستیک		
	ضرائب	خطای استاندارد	P-Value	ضرائب	خطای استاندارد	P-Value
ثابت	۲/۵۲-	۰/۳۴	۰/۰۰۰	۴/۲۸-	۰/۶۱	۰/۰۰۰
آلودگی صوتی محیط کار	۰/۸۰	۰/۲۲	۰/۰۰۰	۱/۳۶	۰/۳۷	۰/۰۰۰
سابقه خانوادگی	۱/۲۱	۰/۲۲	۰/۰۰۰	۲/۰۴	۰/۳۸	۰/۰۰۰
وزوز گوش	۱/۰۳	۰/۲۳	۰/۰۰۰	۱/۷۵	۰/۴۰	۰/۰۰۰

جدول ۸. بررسی مناسب بودن مدل برازش شده پروبیت و لجستیک

آماره	درجه آزادی	پروبیت		لجستیک	
		مقدار	P-Value	مقدار	P-Value
χ^2	۴	۳/۳۲	۰/۵۰۶	۲/۶۷	۰/۶۰۴
D	۴	۲/۸۶	۰/۵۸۱	۲/۳۰	۰/۶۸۱

جدول ۹. بررسی مناسب بودن مدل برازش شده پروبیت و لجستیک

آماره	درجه آزادی	پروبیت		لجستیک	
		مقدار	P-Value	مقدار	P-Value
χ^2	۱۶۵	۱۷۶/۹۰۹	۰/۲۴۹	۱۷۶/۶۸۹	۰/۲۵۳
D	۱۶۵	۱۸۸/۶۱۳	۰/۱۰	۱۸۸/۶۱۲	۰/۱۰

جدول ۱۰. مقادیر برازش شده برآورده MLE پارامترهای مدل

متغیر	مدل پروبیت			مدل لجستیک		
	ضرائب	خطای استاندارد	P-Value	ضرائب	خطای استاندارد	P-Value
ثابت	۰/۶۲۷	۱/۳۲۹	۰/۶۳۷	۰/۹۵۲	۲/۳۲۳	۰/۶۸۲
سن	۰/۰۱۶	۰/۰۱۶	۰/۳۱۲	۰/۰۳۰	۰/۰۲۷	۰/۲۶۷
جنس	-۰/۳۸۵	۰/۲۵۷	۰/۱۳۴	-۰/۶۳۷	۰/۴۳۶	۰/۱۴۴
وضعیت تاهل	-۰/۵۲۴	۰/۲۶۱	۰/۰۴۵	-۰/۹۲۶	۰/۴۵۴	۰/۰۴۱
ساعات کار در هفته	-۰/۰۳۰	۰/۰۳۱	۰/۳۳۹	-۰/۰۵۰	۰/۰۵۵	۰/۳۷
سابقه کار	۰/۰۳۴	۰/۰۴۴	۰/۳۳۱	۰/۰۵۵	۰/۰۷۵	۰/۴۶۳

مراجع

[۱] مطلبی، هومن، ۱۳۸۳، بررسی میزان شیوع فرسودگی شغلی در کارشناسان شاغل در مراکز آموزشی درمانی شهرستان گرگان. پایان نامه دکترای حرفه ای ، دانشگاه علوم پزشکی گرگان.

[۲] خردمند نیا، منوچهر، رستگاری، مصطفی، ۱۳۸۲، آشنایی با الگوهای خطی تعمیم یافته ، اندیشه آماری ،سال هشتم ،شماره دوم ،پاییز و زمستان.

[3]. http://www.gseis.ucla.edu/courses/ed231c/notes3/probit1.html

[4]. Dobson, A,1990, *An Introduction To Generalized Linear Models*, Chapman and Hall, London.

[5] .McCullagh, P. and Nelder, J. A., 1989, *Generalized Linear Models*, Second Edition, Chapman and Hall, London.

[6]. Agresti, A., 2002, *An Introduction to Categorical Data Analysis,* John Wiley, New York.

[7]. Ayatollahi S. M. T., Dowlatabadi E., Ayatollahi S.A.R., 2002, Age at menarche in Iran, *Annals of Humman Biology*, 29, 4, 355-362.

[8]. Iravani K., Heydari S. T., Rosenhall U. L. F., 2005, Effect of Hereditary and Environmental Factors on Presbycusis, in press.

[9]. SPSS 11.5 Mathsoft Inc. 2002.

[10]. Minitab 13.2 Minitab Inc. 2000.