

توابع زیان متعادل^۱

اکبر اصغرزاده^۲

چکیده

این مقاله، مروری است بر توابع زیان متعادل که همزمان دو محک خوبی برازش^۳ و دقت برآورد را منعکس می‌کنند. از دیدگاه بیزی برآورد پارامتر میانگین و بردار میانگین با این توابع زیان مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مجاز بودن^۴ کلاسی از برآوردگرهای خطی از میانگین نمونه، در مدل نرمال مورد بررسی قرار می‌گیرد. **واژه‌های کلیدی:** توابع زیان متعادل، برآورد بیز، مجاز بودن یک برآوردگر.

۱. مقدمه

در تئوری تصمیم آماری، توابع زیان معمولاً تأکید روی دقت برآورد دارند. در حالیکه خوبی برازش نیز یک محک مهمی است. از اینرو، زلنر^۵ [۸] در سال ۱۹۹۴ توابع زیان متعادل را معرفی نمود که همزمان دو محک خوبی برازش و دقت برآورد را منعکس می‌کنند. در گذشته، توابع زیان منعکس‌کننده یکی از این دو محک اما نه هر دو، برای آنالیز میانگین‌ها، رگرسیون و دیگر مسائل برآورد بکار رفته‌اند. برای مثال، برآورد کمترین مربعات^۶، خوبی برازش را منعکس می‌کند، در حالیکه، استفاده از تابع درجه ۲، صرفاً دقت برآورد را نشان می‌دهد. همانطور که شناخته شده است، تأکید تنها روی محک دقت یک برآوردگر، به عنوان مثال میانگین مربع خطا، اغلب منجر به برآوردگرهای اریب می‌شود. از طرف دیگر، استفاده از محک خوبی برازش، همانند مجموع مربعات باقیمانده‌ها^۷ در یک مسأله رگرسیون، منجر به برآوردگری می‌شود که خوبی برازش را می‌دهد و ناریب است. با این وجود، چنین برآوردگری ممکن است به دقت یک برآوردگر اریب با مقدار اریبی کم نباشد. از اینرو، معرفی توابع زبانی که همزمان دو محک خوبی برازش (یا فقدان اریبی) و دقت برآورد را لحاظ کنند، ضروری به نظر می‌رسد. توابع زیان متعادل، این ضرورت را برآورده می‌سازند.

در مقاله [۸]، برآورد میانگین و بردار ضرایب رگرسیونی از دیدگاه

بیزی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. رودریگز^۸ و زلنر [۵] مسأله برآورد میانگین زمان لازم برای شکست را با تابع زیان متعادل مطالعه کردند. چانگ و کیم^۹ [۱] برآورد همزمان میانگین نرمال چندمتغیره را وقتی که تابع زیان متعادل است، مطالعه کرده و برآوردگرهای از نوع جیمز و استاین^{۱۰} را برای این تابع زیان بدست آوردند. برای مطالعه بیشتر روی مسأله برآورد با تابع زیان متعادل می‌توان به دی و همکاران^{۱۱} [۲]، سنجرى و اصغرزاده [۶ و ۷] و گروبر^{۱۲} [۳] مراجعه کرد.

در بخش ۲ این مقاله، تابع زیان متعادل تعریف و انواع مختلف آن بیان می‌شود. در بخش ۳، برآورد میانگین جامعه را از دیدگاه بیزی مورد بررسی قرار داده و مجاز بودن کلاسی از برآوردگرهای خطی میانگین نمونه، مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲. تابع زیان متعادل

فرض کنید که $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ یک بردار از مشاهدات باشد بطوریکه

$$\mathbf{X} = \theta \mathbf{1} + \mathbf{u} \quad (1)$$

که θ میانگین مشترک X_i ها، $\mathbf{1}$ بردار $n \times 1$ تایی با عناصر ۱ و \mathbf{u} یک بردار $n \times 1$ تایی خطا باشد. افزون بر این، فرض کنید که برای پارامتر θ یک چگالی پسین $\pi(\theta | \Delta)$ که $\Delta = (\mathbf{X}, \pi_0)$ و π_0 یک چگالی پیشین برای θ است، وجود دارد. فرض های مختلفی را می‌توان درباره توزیع \mathbf{X} و π_0 در نظر گرفت.

Rodrigues -۸

Chung and Kim -۹

James and Stein -۱۰

Dey et al. -۱۱

Gruber -۱۲

Balanced loss functions -۱

۲ گروه آمار، دانشگاه مازندران

Goodness of fit -۳

Admissibility -۴

Zellner -۵

least squares estimation -۶

Sum of squared residuals -۷

۳. برآورد میانگین

در این بخش ابتدا برآورد بیزی پارامتر میانگین و بردار میانگین را با توابع زیان متعادل مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس مجاز بودن کلاسی از برآوردهای خطی به فرم $a\bar{X} + b$ ، در حالتیکه توزیع جامعه نرمال است مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳.۱. برآورد بیزی میانگین

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای با میانگین θ باشد (بر اساس مدل ۱). هدف پیدا کردن برآوردگر بیزی پارامتر θ تحت تابع زیان L_1 می‌باشد. ریسک پسین برآوردگر $\hat{\theta}$ می‌شود.

$$E[L_1(\hat{\theta}, \theta) | \mathbf{X}] = \frac{\omega}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^2 + (1-\omega) E[(\hat{\theta} - \theta)^2 | \mathbf{X}]$$

که $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ برای یافتن برآوردگر بیزی، کافی است $\hat{\theta}$ را طوری پیدا کنیم که ریسک پسین کمترین مقدار را داشته باشد. با حل معادله

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} E[L_1(\hat{\theta}, \theta) | \mathbf{X}] = 0$$

برآوردگر بیزی $\hat{\theta}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\hat{\theta}_B = \omega \bar{X} + (1-\omega) E(\theta | \mathbf{X}) \quad (3)$$

که در آن $E(\theta | \mathbf{X})$ میانگین پسین می‌باشد. همانطوریکه مشاهده می‌شود، $\hat{\theta}_B$ ترکیبی از برآوردگر غیر بیزی \bar{X} و برآوردگر بیزی $E(\theta | \mathbf{X})$ می‌باشد.

در حالتی که θ یک بردار میانگین و عناصر نمونه برداری باشند، به کمک مشتق‌گیری برداری برآوردگر بیزی، مشابه با حالت قبل به صورت زیر به دست می‌آید [۷].

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \omega \bar{\mathbf{X}} + (1-\omega) E(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{X})$$

که در آن $\hat{\mathbf{X}}$ بردار میانگین نمونه و $E(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{X})$ بردار میانگین پسین است.

۳.۲. چند مثال

مثال ۱: فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال $N(\theta, \sigma^2)$ باشد بطوریکه توزیع پیشین θ نیز نرمال با میانگین μ و واریانس τ^2 است. در آن صورت به سادگی می‌توان نشان داد که توزیع پسین θ ، نرمال با میانگین و واریانس

برای پارامتر θ یک چگالی پسین $\pi(\theta | \Delta)$ که $\Delta = (\mathbf{X}, \pi_0)$ و π_0 یک چگالی پیشین برای θ است، وجود دارد. فرض‌های مختلفی را می‌توان درباره توزیع \mathbf{X} و π_0 در نظر گرفت.

تابع زیان متعادل برای برآورد پارامتر θ به صورت زیر معرفی می‌شود.

$$L_1(\hat{\theta}, \theta) = \frac{\omega}{n} (\mathbf{X} - \hat{\boldsymbol{\theta}})' (\mathbf{X} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + (1-\omega) (\hat{\theta} - \theta)^2 \\ = \frac{\omega}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^2 + (1-\omega) (\hat{\theta} - \theta)^2 \quad (2)$$

که در آن $0 \leq \omega \leq 1$ و $\hat{\theta}$ یک برآوردگر θ است. اولین جمله در رابطه (۲)، خوبی برازش را نشان می‌دهد، در حالیکه دومین جمله دقت برآوردگر را نشان می‌دهد. در رابطه (۲)، بجای تابع زیان درجه دوم $(\hat{\theta} - \theta)^2$ ، می‌توان از توابع زیان دیگری همچون $|\hat{\theta} - \theta|$ ، استفاده نمود. دقت کنید که برای $\omega = 0$ ، این تابع زیان به یک تابع زیان درجه دوم تبدیل می‌شود، در حالیکه برای $\omega = 1$ ، این تابع صرفاً خوبی برازش را نشان می‌دهد.

تابع زیان متعادل در (۲) را می‌توان به صورت زیر تعمیم و گسترش داد.

$$L_r(\hat{\theta}, \theta) = \omega q(\theta) \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^r}{n} + (1-\omega) q(\theta) (\hat{\theta} - \theta)^r$$

که در آن $0 \leq \omega \leq 1$ و $q(\theta)$ تابعی مثبت از θ است که تابع وزن نامیده می‌شود. در حالتی خاص که $q(\theta) = 1$ باشد، این تابع زیان به تابع زیان L_1 در (۲) تبدیل می‌شود.

برای حالت برداری، فرض کنید $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ که $\mathbf{X}_\alpha = (X_{1\alpha}, X_{2\alpha}, \dots, X_{p\alpha})'$ ، $\alpha = 1, 2, \dots, N$ یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای با بردار میانگین $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ باشد. برای برآورد بردار میانگین $\boldsymbol{\theta}$ ، تابع زیان متعادل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$L_r(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\omega}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}})' \mathbf{Q} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ + (1-\omega) (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})' \mathbf{Q} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$$

که $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)'$ یک برآوردگر $\boldsymbol{\theta}$ و \mathbf{Q} یک ماتریس معین مثبت از بعد $p \times p$ است. دقت کنید در حالت خاص که $\omega = 0$ و $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ باشد، تابع زیان درجه دوم، $\|\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\|^2$ حاصل خواهد شد.

کنیم در آن صورت توزیع پسین، نرمال چندمتغیره با بردار میانگین $\frac{N}{N+1/m} \bar{X}$ و ماتریس کواریانس $\frac{1}{N+1/m} I$ خواهد بود. بنابراین برآوردگر بیز می‌شود:

$$E(\theta | \mathbf{X}) = \frac{\left[\frac{n\bar{X}}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\tau^2} \right]}{\left[\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2} \right]}$$

$$E(\theta | \mathbf{X}) = \omega \bar{X} + (1-\omega) \hat{\theta}_B = \bar{X} \frac{\omega + Nm}{1 + Nm} \quad (۴)$$

$$\text{Var}(\theta | \mathbf{X}) = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}}$$

۳.۳ مجاز بودن برآوردگر $a\bar{X} + b$

با توجه به مثالهای فوق، برآوردگرهای بیز به فرم خطی $a\bar{X} + b$ می‌باشد. در این بخش مجاز بودن این کلاس از برآوردهای خطی تحت مدل (۱) مورد مطالعه قرار می‌گیرد. تابع ریسک برآوردگر $a\bar{X} + b$ تحت تابع زیان متعادل L_1 به صورت زیر می‌باشد،

می‌باشد. از اینرو، برآوردگر بیز در (۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$\hat{\theta}_B = \frac{n\tau^2 + \sigma^2 \omega}{n\tau^2 + \sigma^2} \bar{X} + (1-\omega) \frac{\mu\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2} \quad (۵)$$

که به فرم خطی $a\bar{X} + b$ می‌باشد.

$$R(\theta, a\bar{X} + b) = \frac{\omega}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i - a\bar{X} - b)^2 + (1-\omega) E(a\bar{X} + b - \theta)^2$$

مثال ۲: فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با تابع چگالی احتمال

$$f(x | p) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \quad 0 < p < 1.$$

به سادگی می‌توان نشان داد که این تابع ریسک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

باشد. اگر توزیع پیشین p توزیع بتا $Beta(\alpha, \beta)$ با چگالی

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1}, \quad 0 < p < 1, \alpha, \beta > 0$$

به کمک تابع فوق می‌توان ریسک برآوردگر بیز را پیدا نموده و همچنین ناحیه‌ای که در آن $a\bar{X} + b$ مجاز است، مشخص کرد.

فرض شود. در آن صورت توزیع پسین p توزیع $Beta(\alpha + \sum_{i=1}^n X_i, n - \sum_{i=1}^n X_i + \beta)$ خواهد بود. از اینرو برآوردگر بیز می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{p}_B &= \omega \bar{X} + (1-\omega) E(p | \mathbf{X}) \\ &= \omega \bar{X} + (1-\omega) \frac{\alpha + \sum_{i=1}^n X_i}{n + \alpha + \beta} \\ &= \frac{n + \alpha\omega + \beta\omega}{n + \alpha + \beta} \bar{X} + (1-\omega) \frac{\alpha}{n + \alpha + \beta} \end{aligned}$$

قضیه ۱. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از جامعه‌ای (نه لزوماً نرمال) با میانگین θ و واریانس σ^2 باشد. در آن صورت $a\bar{X} + b$ بسرای θ تحت تابع زیان L_1 غیر مجاز است هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) $a > 1$

(ب) $a < \omega$

(ج) $a = 1, b \neq 0$

مثال ۳: فرض کنید که X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از یک توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ و ماتریس کواریانس $\sigma^2 I$ باشد. اگر توزیع پیشین θ را نیز یک توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین θ_0 و ماتریس کواریانس mI فرض

اثبات: کافی است در هر حالت برآوردگری معرفی شود که از لحاظ ریسک بر $a\bar{X} + b$ برتری داشته باشد.

(الف) اگر $a > 1$ ، آنگاه

$$(a - \omega)^2 > (1 - \omega)^2$$

و بنابراین

قضیه ۲: اگر X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از $N(\theta, \sigma^2)$ باشد در آن صورت $a\bar{X} + b$ بسرای θ مجاز است هرگاه داشته باشیم $a < 1, b \in \mathbb{R}$ یا $\omega \leq a < 1, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} R(\theta, a\bar{X} + b) &= [(a-1)\theta + b]^2 + \frac{\sigma^2}{n} [(a-\omega)^2 + \omega(n-\omega)] \\ &\geq \frac{\sigma^2}{n} [(a-\omega)^2 + \omega(n-\omega)] \\ &> \frac{\sigma^2}{n} [(1-\omega)^2 + \omega(n-\omega)] \\ &= R(\theta, \bar{X}) \end{aligned}$$

لذا در این حالت $a\bar{X} + b$ نمی‌تواند مجاز باشد زیرا \bar{X} بر آن برتری دارد.

اثبات: از مثال ۱، برآوردگر بیز θ به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{\theta}_B = \frac{n\tau^2 + \sigma^2\omega}{n\tau^2 + \sigma^2} \bar{X} + (1-\omega) \frac{\mu\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2}$$

همانطوریکه مشاهده می‌شود ضریب \bar{X} یعنی $\frac{n\tau^2 + \sigma^2\omega}{n\tau^2 + \sigma^2}$ اکیداً بین ω و ۱ است. از طرفی چون تابع زیان L_n اکیداً محدب است، لذا برآوردگر بیز فوق، یکتا بوده و بنابراین مجاز نیز خواهد بود. این ثابت می‌کند که $a\bar{X} + b$ برای $\omega < a < 1, b \in \mathbb{R}$ مجاز است. به کمک روش حدی بیز می‌توان مجاز بودن $\omega\bar{X} + b$ را اثبات کرد که اثبات این در مرجع [۶] آمده است.

ب) اگر $\omega < a$ باشد، آنگاه $(a-\omega)^2 > (1-\omega)^2$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} R(\theta, a\bar{X} + b) &= (a-1)^2 \left[\theta + \frac{b}{a-1} \right]^2 + \frac{\sigma^2}{n} [(a-\omega)^2 + \omega(n-\omega)] \\ &> (\omega-1)^2 \left[\theta + \frac{b}{a-1} \right]^2 + \frac{\sigma^2}{n} [(a-\omega)^2 + \omega(n-\omega)] \\ &\geq (\omega-1)^2 \left[\theta + \frac{b}{a-1} \right]^2 + \frac{\sigma^2}{n} \omega(n-\omega) \\ &= \left[(\omega-1)\theta + \frac{b(\omega-1)}{a-1} \right]^2 + \frac{\sigma^2}{n} \omega(n-\omega) \\ &= R(\theta, \omega\bar{X} + \frac{b(\omega-1)}{a-1}) \end{aligned}$$

نتیجه ۱. با توجه به دو قضیه فوق ناحیه مجاز بودن $a\bar{X} + b$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\{(a, b) : \omega \leq a < 1, \forall b\} \cup \{1, 0\}$$

در حالتیکه $\omega = 0$ باشد نوار عمودی زیر

$$\{(a, b) : 0 \leq a < 1, \forall b\} \cup \{1, 0\}$$

حاصل خواهد شد که ناحیه مجاز بودن متناظر با تابع زیان درجه دوم است (مرجع [۴] صفحات ۳۲۵-۳۲۳). بنابراین نتیجه حاصل با نتایجی که از قبل برای تابع زیان درجه دوم وجود داشته است مطابقت دارد. یادآور می‌شویم که در حالتی خاص که $\omega = 0$ باشد، تابع زیان متعادل به تابع زیان درجه دوم کاهش پیدا می‌کند.

ج) اگر $a = 1, b \neq 0$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} R(\theta, \bar{X} + b) &= \frac{\sigma^2}{n} [(1-\omega)^2 + \omega(n-\omega)] + b^2 \\ &> \frac{\sigma^2}{n} [(1-\omega)^2 + \omega(n-\omega)] \\ &= R(\theta, \bar{X}) \end{aligned}$$

لذا در این حالت $\bar{X} + b$ نمی‌تواند مجاز باشد زیرا \bar{X} بر آن برتری دارد.

مراجع

- [1] Chung, Y. and Kim, C., 1997, Simultaneous Estimation of the Multivariate Normal Mean under Balanced Loss Function, *Commun. Stat. - Theory and Methods*, Vol.26, pp. 1599-1611.
- [2] Dey, D.K., Ghosh, M. and Strawderman, W., 1999, On Estimation with Balanced Loss Functions, *Statistics & Probability Letters*, V. 45, No. 2, pp. 97-101.
- [3] Gruber, M.H.G., 2004, The Efficiency of Shrinkage Estimators with respect to Zellner's Balanced Loss Function, *Commun. Stat.-Theory and Methods*, Vol. 33, No. 2, pp. 235-249.
- [4] Lehmann, E.L. and Casella, G., 1998, *Theory of Point Estimation*, Springer Verlag, New York.

- [5] Rodrigues, J. and Zellner, A., 1995, Weighted Balanced Loss Function for the Exponential Mean Time to Failure, *Commun. Stat. –Theory and Methods*, V. 23, pp. 3609-3616.
- [6] Sanjari Farsipour, N. and Asgharzadeh, A., 2004, Estimation of a Normal Mean Relative Balanced Loss Functions, *Statistical Paper*, Vol. 45, pp. 279-286.
- [7] Sanjari Farsipour, N. and Asgharzadeh, A., 2003, Bayesian Multivariate Normal Analysis under Balanced Loss Function, *Pak. J. Stat.* , V. 19, No. 2, pp. 231-240.
- [8] Zellner, A., 1994, Bayesian and Non-Bayesian Estimation Using Balanced Loss Functions, *Statistical Decision Theory and Related Topics V*, (J.O. Berger and S.S. Gupta Eds.), New York: Springer-Verlag, pp. 377-390.