برآورد بیزی بر اساس توزیع پسین امکانی با داده‌های فازی

محسن عارفی[۱]، سید محمود طاهری[۱]

Arefi@math.iut.ac.ir, Taheri@cc.iut.ac.ir

چکیده

این مقاله، به معرفی یک شیوه‌ی بیزی برای برآورد یک پارامتر مجهول بر اساس توزیع پیشین امکانی، هنگامی که داده‌های مدل تحت بررسی فازی باشند، می‌پردازد. در این شیوه، ابتدا توزیع پسین بر اساس یک توزیع پیشین امکانی و با استفاده از یک T—نرم مناسب، برای حالتی که داده‌های مدل آماری مورد مطالعه نادقیق (فازی) باشند، ساخته می‌شود. آن گاه بر اساس این توزیع پسین، پارامتر مورد نظر برآورد می‌شود.

کلمات کلیدی: برآورد نقطه‌ای، برآورد بیز، توزیع پیشین امکانی، توزیع پسین امکانی، داده فازی.

۱ مقدمه و تاریخچه

استنباط بیزی برای مدل‌های آماری، بر اساس دو فرض زیر پایگذاری می‌شود:

الف) پارامتر مدل آماری $f(\underline{x}|\theta)$، یک طبیعت تصادفی داشته باشد و دارای تابع احتمال پیشین $\pi(\theta)$ باشد.

ب) داده‌های مشاهده شده از متغیر تصادفی X، به‌طور دقیق گزارش شوند.

فرض الف از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. درنظر گرفتن پارامتر مجهول به‌صورت یک کمیت تصادفی و چگونگی ساختن یا به دست آوردن و تعبیر توزیع پیشین، همواره از موضوع‌های مورد بحث بین آماردانان کلاسیک و بیزی بوده است. از سوی دیگر در برخی از موارد ممکن است داده‌های به‌دست آمده/ مشاهده شده/ گزارش شده از متغیر تصادفی X، داده‌هایی دقیق نباشند بلکه به‌صورت مبهم (فازی) باشند.

با توجه به دو دشواری بالا، در این مقاله، یک روش امکانی از نگرش بیزی معرفی می‌شود. در این روش فرض می‌شود پارامتر θ دارای یک توزیع پیشین امکانی $\pi^*(\theta)$ است و هم چنین داده‌های موجود نیز به‌صورت نادقیق (فازی) هستند.

پیش از ورود به بحث اصلی، تاریخچه‌ای از مطالعات استنباط بیزی در محیط فازی ارائه می‌شود. قاعده تصمیم بیز فازی بر اساس یک تابع زیان در محیط فازی توسط اکیودا و همکاران [۹] و تاناکا و همکاران [۱۵] بررسی شده است. گیل و همکاران [۵] برآورد بیزی را به حالتی که داده‌های فازی باشند، تعمیم دادند. طاهری و بهبودیان [۱۳، ۱۴] نگرش بیزی با داده‌های معمولی و فازی را برای آزمون فرض فازی تعمیم داده‌اند. فیتل و هارتر [۱٦] نیز بر اساس اصل گسترش به بررسی برخی موضوعات آماری با نگرش بیزی در محیط فازی پرداخته‌اند. ایده‌های دیگر در مورد نگرش بیزی و کاربردهایی از آن در برآوردهای مختلف و آزمون فرض‌های معمولی و فازی را می‌توان در [۴، ٦—۸، ۱۲] دنبال نمود.

[۱] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

این مقاله در چهار بخش تنظیم شده است. معرفی توزیع پسین بر اساس یک توزیع پیشین امکانی تحت داده‌های فازی و مثال‌های مربوط به آن در بخش دوم بررسی و ارزیابی شده است. در بخش سوم، بر اساس توزیع پسین امکانی به چگونگی برآورد پارامتر مدل می‌پردازیم و با مثال‌های عددی، مطالب ارائه شده را تشریح می‌کنیم. بخش چهارم نیز شامل نتیجه‌گیری و جمع‌بندی است.

۲ توزیع پیشین امکانی و توزیع پسین امکانی تحت داده‌های فازی

در این بخش، توزیع پسین بر اساس توزیع پیشین امکانی و با داده‌های فازی معرفی می‌گردد. ابتدا به دو تعریف زیر از [۱۴] توجه کنید. فرض کنید $(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{P}_\theta)$ یک فضای احتمال باشد.

تعریف ۱ یک فضای نمونه‌ای فازی $\widetilde{\mathcal{X}}$ مرتبط با $\mathcal{X}$، عبارت است از یک افراز فازی از $\mathcal{X}$ توسط پیشامدهای فازی، یعنی رده‌ای از زیرمجموعه‌های فازی $\widetilde{X}_i, i=۱,۲,...,k$ از $\mathcal{X}$ که تابع عضویت آنها اندازه‌پذیر بورل باشد و در شرط تعامد صدق کنند، یعنی $\sum_{i=۱}^{k}\widetilde{X}_i(x)=۱,\ \forall x\in X$. بنا بر این فضای نمونه‌ای فازی به صورت $\widetilde{\mathcal{X}}=\{\widetilde{X}_۱,...,\widetilde{X}_k\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲ یک نمونه تصادفی فازی به حجم n از $\widetilde{\mathcal{X}}$ عبارت است از یک نمونه تصادفی به حجم n از فضای نمونه‌ای فازی $\widetilde{\mathcal{X}}$، یعنی یک n تایی به‌صورت $\widetilde{X}_{r_i}\in\widetilde{\mathcal{X}}$ ،$\underline{\widetilde{X}}=(\widetilde{X}_{r_۱},\widetilde{X}_{r_۲},...,\widetilde{X}_{r_n})$، $i=۱,...,n$ ، که احتمال مربوط به آن به‌صورت زیر به‌دست می آید

$$P(\underline{\widetilde{X}}|\theta)=\int_{\Re}...\int_{\Re}\prod_{i=۱}^{n}\widetilde{X}_{r_i}(x_i)dF(x_۱,...,x_n|\theta).$$

که در آن $F(x_۱,\ldots,x_n|\theta)$، تابع توزیع احتمال نمونه تصادفی $X_۱,...,X_n$ است.

تعریف ۳ یک اندازه امکان Π روی فضای اندازه $(\mathcal{X},\mathcal{F})$ ($\mathcal{F}$: یک میدان سیگمایی بر $\mathcal{X}$) به‌صورت تابع مجموعه‌ای $\Pi:\mathcal{F}\to[۰,۱]$ تعریف می‌شود، که در شرایط زیر صدق می کند

$$\Pi(A)\geq ۰,$$
$$\Pi(\mathcal{X})=۱,$$
$$\Pi(\bigcup_{i=۱}^{\infty}A_i)=\sup_i \Pi(A_i)\ \ \forall\, A_i\in\mathcal{F}.$$

همچنین $(\mathcal{X},\mathcal{F},\Pi)$ را یک فضای امکان نامیم. به علاوه تابع $\pi(.)$ را یک تابع (توزیع) امکان متناظر با Π می‌نامیم، اگر

$$\Pi(A)=Poss(A)=\sup_{x\in A}\pi(x),\quad \forall\, A\in\mathcal{F}.$$

تعریف ۴ مدل آماری $f(\underline{x}|\theta)$ را با پارامتر مجهول θ درنظر بگیرید. فرض کنید اطلاعاتی مربوط به پارامتر θ به‌صورت تقریبی و مبهم در اختیار داشته باشیم. اگر این اطلاعات را به‌وسیله‌ی یک مجموعه فازی (یک تابع امکان) $\pi^*(\theta)$ صورت‌بندی کنیم، آن گاه $\pi^*(\theta)$ را توزیع پیشین امکانی گوییم.

تذکر ۱ باید توجه داشت که در تعریف ۴، جنبه‌ی امکانی پارامتر θ مورد توجه است. به سخن دیگر، عدم اطمینان در مورد مقدار واقعی θ از نوع تصادفی و احتمالی نیست بلکه از نوع ابهام و نادقیق بودن است. لذا $\pi^*(\theta)$ یک مدل امکانی است نه یک مدل احتمالی. در این دیدگاه، اساساً نیازی نیست که فرض شود θ یک متغیر تصادفی است. همچنین لزومی ندارد که $\pi^*(\theta)$ در شرط $\int_\Theta \pi^*(\theta)d\theta=۱$ صدق کند (بنا به طبیعت امکانی توزیع $\pi^*(\theta)$).

تذکر ۲ گفتنی است که صورت‌بندی و تعبیر یک تابع امکان بسیار آسان‌تر از صورت‌بندی و تعبیر یک تابع احتمال برای پارامتر θ است. با این حال روش‌هایی نیز برای ساختن یا به‌دست آوردن توابع امکان پیشنهاد شده‌اند که علاقمندان می‌توانند برای نمونه به مراجع [۱ – ۳] مراجعه نمایند.

تعریف ۵ یک تابع دو متغیره به‌صورت $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ را یک $T-$نرم گوییم، اگر در شرایط زیر صدق نمایید

۱- $T(x,1)=x$،

۲- $x_1\leq x_2,\ y_1\leq y_2\ \Rightarrow\ T(x_1,y_1)\leq T(x_2,y_2)$

۳- $T(x,y)=T(y,x)$،

۴- $T[x,T(y,z)]=T[T(x,y),z]$.

تعریف ۶ نمونه تصادفی فازی $\underline{\widetilde{X}}=(\widetilde{X}_{r_1},\widetilde{X}_{r_2},...,\widetilde{X}_{r_n})$ را با احتمال $P(\underline{\widetilde{X}}|\theta)$ درنظر بگیرید. فرض کنید θ دارای توزیع پیشین امکانی $\pi^*(\theta)$ باشد. توزیع پسین θ، تحت $T-$ نرم $T(a,b)$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})=\frac{T(P(\underline{\widetilde{X}}|\theta),m(\theta))}{m(\underline{\widetilde{X}})},$$

که $m(\underline{\widetilde{X}})=\sup_{\theta\in\Theta}(T(P(\underline{\widetilde{X}}|\theta),\pi^*(\theta)))$ تابع حاشیه‌ای تحت داده‌های فازی است.

مثال ۱ متغیر تصادفی X را با توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ درنظر بگیرید. فرض کنید λ دارای توزیع پیشین امکانی زیر باشد

$$\pi^*(\lambda)=e^{-\lambda},\qquad \lambda>0.$$

احتمال نمونه تصادفی فازی $\underline{\widetilde{X}}=(\widetilde{X}_{r_1},\widetilde{X}_{r_2},...,\widetilde{X}_{r_n})$ به‌صورت زیر است

$$P(\underline{\widetilde{X}}|\lambda)=\int_{\Re}...\int_{\Re}\prod_{i=1}^{n}\widetilde{X}_{r_i}(x_i)\lambda^n e^{-(\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i)}dx_1...dx_n.$$

بنابراین طبق تعریف ۶، توزیع پسین θ، تحت T$-$ نرم ضرب به‌صورت زیر به‌دست می آید

$$\pi^*(\lambda|\underline{\widetilde{X}})=$$

$$\frac{\int_{\Re}...\int_{\Re}\prod_{i=1}^{n}\widetilde{X}_{r_i}(x_i)\lambda^n e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{n}x_i+1)}dx_1...dx_n}{\sup_{\lambda>0}\int_{\Re}...\int_{\Re}\prod_{i=1}^{n}\widetilde{X}_{r_i}(x_i)\lambda^n e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{n}x_i+1)dx_1...dx_n}}.$$

مثال ۲ فرض کنید متغیر تصادفی X توزیع برنولی $Bin(1,\theta)$ داشته باشد. فرض کنید θ دارای توزیع پیشین امکانی زیر باشد

$$\pi^*(\theta)=\begin{cases}2\theta & 0<\theta\leq 0/5,\\ 2(1-\theta) & 0/5<\theta<1.\end{cases}$$

فضای نمونه‌ای فازی $\widetilde{\mathcal{X}}$ را با دو پیشامد فازی $\widetilde{X}_1$ و $\widetilde{X}_2$ به‌صورت زیر درنظر بگیرید

$$\widetilde{X}_1(x)=\begin{cases}m_0 & x=0\\ m_1 & x=1\end{cases},\widetilde{X}_2(x)=\begin{cases}1-m_0 & x=0\\ 1-m_1 & x=1\end{cases}.$$

احتمال یک نمونه تصادفی فازی به حجم n به‌صورت زیر است ($t=\sum_{i=1}^{n}x_i$)

$$P(\underline{\widetilde{X}}|\theta)=\sum_{x_1=0}^{1}...\sum_{x_n=0}^{1}\prod_{i=1}^{n}\widetilde{X}_{r_i}(x_i)\theta^t(1-\theta)^{n-t}.$$

در نتیجه، توزیع پسین تحت $T-$نرم ضرب به‌صورت زیر به‌دست می آید

$$\pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})=\begin{cases}\dfrac{2\sum_{x_1=0}^{1}...\sum_{x_n=0}^{1}\prod_{i=1}^{n}\widetilde{X}_{r_i}(x_i)\theta^{t+1}(1-\theta)^{n-t}}{\sup_{0<\theta<1}\left[\sum_{x_1=0}^{1}...\sum_{x_n=0}^{1}\prod_{i=1}^{n}\widetilde{X}_{r_i}(x_i)\theta^t(1-\theta)^{n-t}\pi^*(\theta)\right]} & 0<\theta\leq 0/5,\\ \dfrac{2\sum_{x_1=0}^{1}...\sum_{x_n=0}^{1}\prod_{i=1}^{n}\widetilde{X}_{r_i}(x_i)\theta^{t}(1-\theta)^{n-t+1}}{\sup_{0<\theta<1}\left[\sum_{x_1=0}^{1}...\sum_{x_n=0}^{1}\prod_{i=1}^{n}\widetilde{X}_{r_i}(x_i)\theta^t(1-\theta)^{n-t}\pi^*(\theta)\right]} & 0/5<\theta<1.\end{cases}$$

اکنون فرض کنید توابع عضویت پیشامدهای فازی $\widetilde{X}_۱$ و $\widetilde{X}_۲$ به‌صورت زیر باشند

$$\widetilde{X}_۱(x)=\begin{cases}۰/۲۵ & x=۰\\ ۰/۷۵ & x=۱\end{cases},\ \widetilde{X}_۲(x)=\begin{cases}۰/۷۵ & x=۰\\ ۰/۲۵ & x=۱\end{cases}.$$

فرض کنید بر اساس یک نمونه تصادفی به حجم $n=۳$، نمونه تصادفی فازی $(\widetilde{X}_۲,\widetilde{X}_۲,\widetilde{X}_۱)$ مشاهده شده است.

احتمال این نمونه تصادفی فازی به‌صورت زیر است

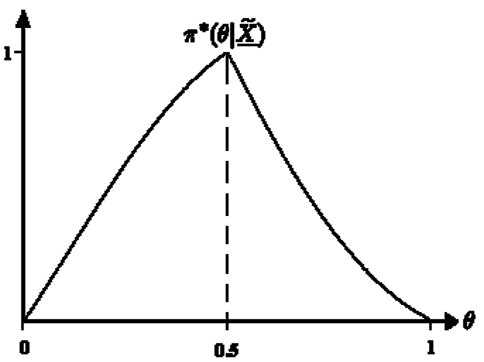
$$P(\underline{\widetilde{X}}|\theta)=\sum_{x_۱=۰}^{۱}\sum_{x_۲=۰}^{۱}\sum_{x_۳=۰}^{۱}(۰/۲۵)^{x_۱+x_۲-x_۳+۱}(۰/۷۵)^{۲-x_۱-x_۲+x_۳}\theta^t(۱-\theta)^{n-t},$$

که $t=x_۱+x_۲+x_۳$. بر این اساس، توزیع پسین تحت T–نرم ضرب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (شکل ۱)

$$\pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})=\begin{cases}۱۶\sum_{x_۱=۰}^{۱}\sum_{x_۲=۰}^{۱}\sum_{x_۳=۰}^{۱}(۰/۲۵)^{x_۱+x_۲-x_۳+۱}(۰/۷۵)^{۲-x_۱-x_۲+x_۳}\theta^{t+۱}(۱-\theta)^{n-t} & ۰<\theta\leq ۰/۵,\\ ۱۶\sum_{x_۱=۰}^{۱}\sum_{x_۲=۰}^{۱}\sum_{x_۳=۰}^{۱}(۰/۲۵)^{x_۱+x_۲-x_۳+۱}(۰/۷۵)^{۲-x_۱-x_۲+x_۳}\theta^{t}(۱-\theta)^{n-t+۱} & ۰/۵<\theta<۱.\end{cases}$$

تابع فوق ماکزیمم مقدار خود را در $\theta=۰/۵$ اختیار می‌کند و در نتیجه مقدار تابع حاشیه‌ای برابر است با

$$m(\underline{\widetilde{X}})=\sup_\theta(P(\underline{\widetilde{X}}|\theta).\pi^*(\theta))=P(\underline{\widetilde{X}}|\theta=۰/۵).\pi^*(\theta=۰/۵)=۰/۱۲۵.$$



شکل ۱. نمودار توزیع پسین امکانی در مثال ۲.

۳ برآوردهای نقطه‌ای بر اساس توزیع پسین با داده‌های فازی

در این بخش، روش‌هایی را برای به‌دست آوردن یک برآورد نقطه‌ای برای θ، بر اساس توزیع پسین امکانی، معرفی می‌کنیم.

تعریف ۷ توزیع پسین $\pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})$ را تحت توزیع پیشین امکانی $\pi^*(\theta)$ و با داده‌های فازی $\underline{\widetilde{X}}$ در نظر بگیرید. برآورد $\hat{\theta}=d(\underline{\widetilde{X}})$ را یک برآورد ماکزیمم پسین امکانی ($MPPE$)[۲] برای پارامتر θ گوییم اگر

$$\pi^*(\hat{\theta}|\underline{\widetilde{X}})\geq\pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})\qquad\forall\theta\in\Theta,$$

که Θ دامنه تغییرات پارامتر θ (فضای پارامتر) است.

توجه دارید که این تعریف مشابه با تعریف برآورد ماکزیمم پسین در حالت احتمالی است (رجوع کنید به [۱۰]، صفحه ۱۳۷). هم چنین بر اساس روش‌های غیر فازی سازی [۱۱] می‌توان به شیوه‌های دیگری نیز θ را برآورد کرد.

[۲] Maximum possibilistic posterior estimate

تعریف ۸ تابع غیر فازی ساز $Deff(.)$ را درنظر بگیرید. برآورد نقطه‌ای $\hat{\theta}$ بر اساس توزیع پسین امکانی $\pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\theta} = Deff(\pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})).$$

الف) روش غیر فازی سازی مرکز ثقل را درنظر بگیرید. بر اساس این روش، برآورد نقطه‌ای $\hat{\theta} = d_{COG}(\underline{\widetilde{X}})$ به‌صورت زیر به‌دست می آید

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= d_{COG}(\underline{\widetilde{X}}) \\ &= \frac{\int_\theta \theta\pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})d\theta}{\int_\theta \pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})d\theta} \\ &= \frac{\int_\theta \theta T(P(\underline{\widetilde{X}}|\theta), \pi^*(\theta))d\theta}{\int_\theta T(P(\underline{\widetilde{X}}|\theta), \pi^*(\theta))d\theta}. \end{aligned}$$

ب) روش غیر فازی سازی مرکز سطح را درنظر بگیرید. بر اساس این روش، برآورد نقطه‌ای $\hat{\theta} = d_{COA}(\underline{\widetilde{X}})$ به‌صورت زیر به‌دست می آید

$$\int_{-\infty}^{d_{COA}(\underline{\widetilde{X}})} \pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})d\theta = \int_{d_{COA}(\underline{\widetilde{X}})}^{\infty} \pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})d\theta,$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{d_{COA}(\underline{\widetilde{X}})} T(P(\underline{\widetilde{X}}|\theta), \pi^*(\theta))d\theta$$

$$= \int_{d_{COA}(\underline{\widetilde{X}})}^{\infty} T(P(\underline{\widetilde{X}}|\theta), \pi^*(\theta))d\theta.$$

ج) بر اساس روش غیر فازی سازی زیر برآورد نقطه‌ای (مرکز سوپریمم) $\hat{\theta} = d_{SOC}(\underline{\widetilde{X}})$ این‌گونه تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \hat{\theta} = d_{SOC}(\underline{\widetilde{X}}) &= \frac{\sup_\theta\{\theta\pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})\}}{\sup_\theta\{\pi^*(\theta|\underline{\widetilde{X}})\}} \\ &= \frac{\sup_\theta[\theta T(P(\underline{\widetilde{X}}|\theta), \pi^*(\theta))]}{\sup_\theta[T(P(\underline{\widetilde{X}}|\theta), \pi^*(\theta))]}. \end{aligned}$$

مثال ۳ مثال ۱ را درنظر بگیرید. فرض کنید فضای نمونه‌ای فازی شامل ۲۵ پیشامد فازی زیر باشد

$$\widetilde{X}_۱(x) = \begin{cases} ۱ - ۲x & ۰ < x \leq ۰/۵ \\ ۰ & ۰/۵ < x \end{cases},$$

$$\widetilde{X}_i(x) = \begin{cases} ۲x - i + ۲ & \frac{i-۲}{۲} < x \leq \frac{i-۱}{۲} \\ i - ۲x & \frac{i-۱}{۲} < x < \frac{i}{۲} \end{cases}, i = ۲, ۳, ..., ۲۴$$

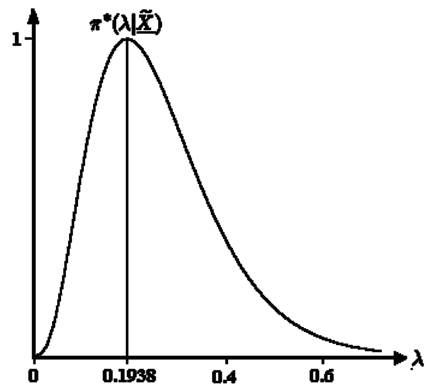
$$\widetilde{X}_{۲۵}(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۱۱/۵ \\ ۲(x - ۱۱/۵) & ۱۱/۵ \leq x \leq ۱۲ \\ ۱ & ۱۲ < x \end{cases}.$$

فرض کنید بر اساس یک نمونه تصادفی فازی به حجم $n = ۳$ نمونه فازی $(\widetilde{X}_۲, \widetilde{X}_{۱۰}, \widetilde{X}_{۲۰})$ مشاهده شده است. توزیع پسین تحت این نمونه تصادفی به‌صورت زیر است (شکل ۲)

$$\begin{aligned} &\pi^*(\lambda|\underline{\widetilde{X}}) \\ &= \frac{\int_۰^۱ \int_۴^۵ \int_۹^{۱۰} \widetilde{X}_۲(x)\widetilde{X}_{۱۰}(y)\widetilde{X}_{۲۰}(z)\lambda^۳ e^{-\lambda(x+y+z+۱)}dxdydz}{m(\underline{\widetilde{X}})} \\ &= \frac{۸e^{-\frac{۳۱\lambda}{۲}}(e^{-\frac{\lambda}{۲}} + e^{\frac{\lambda}{۲}} - ۲)^۳}{۰/۰۰۰۰۴۵۲۳\lambda^۳}. \end{aligned}$$

که ماکزیمم خود را در $\lambda = ۰/۱۹۳۹$ اختیار می‌کند و مقدار تابع حاشیه‌ای برابر است با

$$\begin{aligned} m(\underline{\widetilde{X}}) &= \sup_\theta(P(\underline{\widetilde{X}}|\theta).\pi^*(\theta)) \\ &= P(\underline{\widetilde{X}}|\theta = ۰/۱۹۳۹).\pi^*(\theta = ۰/۱۹۳۹) \\ &= ۰/۰۰۰۰۴۵۲۳. \end{aligned}$$



شکل ۲. نمودار توزیع پسین امکانی در مثال ۳.

اکنون تحت این توزیع پسین، برآوردهای نقطه‌ای برای θ به‌صورت زیر به‌دست می آیند

• **برآورد ماکزیمم پسین امکانی:**

$$\hat{\lambda}_{۱} = MPPE(\lambda) = ۰/۱۹۳۹$$

• **برآورد مرکز ثقل:**

$$\hat{\lambda}_{۲} = d_{COG}(\underline{\widetilde{X}}) = \frac{\int_{۰}^{\infty} \lambda \pi^*(\lambda|\underline{\widetilde{X}})d\lambda}{\int_{۰}^{\infty} \pi^*(\lambda|\underline{\widetilde{X}})d\lambda}$$

$$= \frac{۲۴\int_{۰}^{۱}\int_{۴}^{۵}\int_{۹}^{۱۰} \widetilde{X}_{۲}(x)\widetilde{X}_{۱۰}(y)\widetilde{X}_{۲۰}(z)\left(\frac{۱}{x+y+z+۱}\right)^{۵} dxdydz}{۶\int_{۰}^{۱}\int_{۴}^{۵}\int_{۹}^{۱۰} \widetilde{X}_{۲}(x)\widetilde{X}_{۱۰}(y)\widetilde{X}_{۲۰}(z)\left(\frac{۱}{x+y+z+۱}\right)^{۴} dxdydz}$$

$$= ۰/۲۵۷۰$$

• **برآورد مرکز سطح:** این برآورد تحت رابطه زیر به‌دست می آید:

$$\int_{۰}^{۱}\int_{۴}^{۵}\int_{۹}^{۱۰} \widetilde{X}_{۲}(x)\widetilde{X}_{۱۰}(y)\widetilde{X}_{۲۰}(z)\int_{۰}^{d_{COA}} \lambda^{۳} e^{-\lambda(x+y+z+۱)} d\lambda dxdydz$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty} \pi^*(\lambda|\underline{\widetilde{X}})d\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\lambda}_{۳} = d_{COA} = ۰/۲۳۱۶.$$

• **برآورد سوپریمم مرکز:**

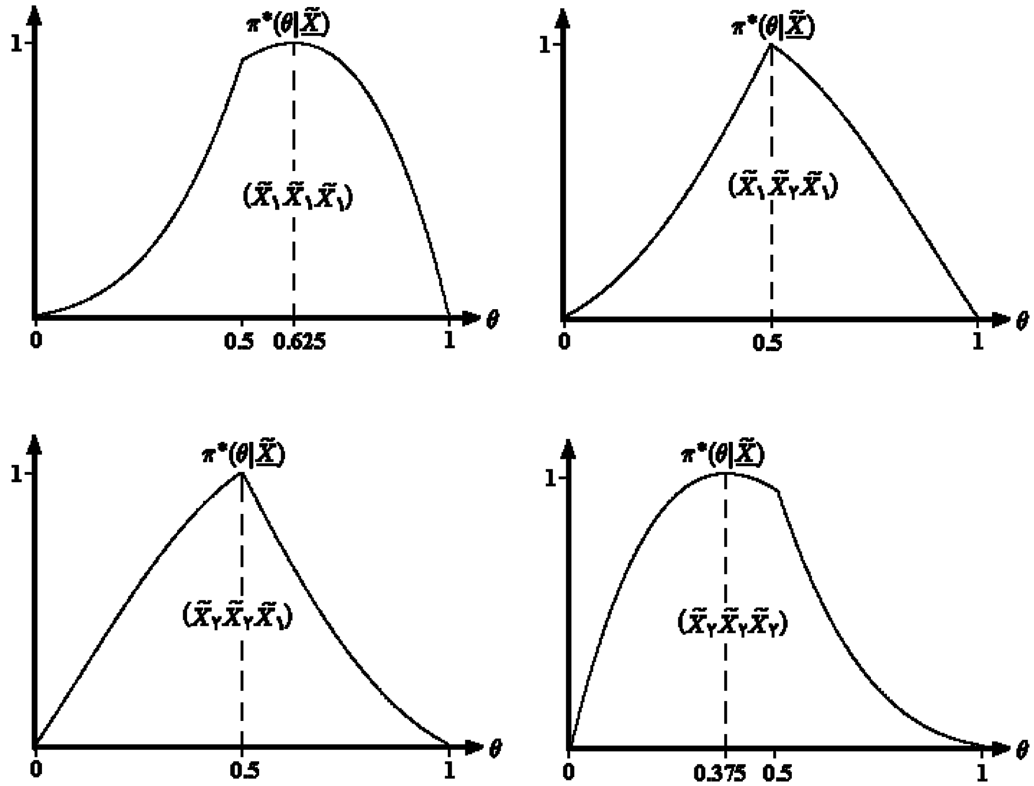
$$\hat{\lambda}_{۴} = d_{SOC}(\underline{\widetilde{X}}) = \frac{\sup_{\lambda>۰}\{\lambda\pi^*(\lambda|\underline{\widetilde{X}})\}}{\sup_{\lambda>۰}\{\pi^*(\lambda|\underline{\widetilde{X}})\}} = \frac{\sup_{\lambda>۰}\{\lambda P(\underline{\widetilde{X}}|\lambda)\pi^*(\lambda)\}}{\sup_{\lambda>۰}\{P(\underline{\widetilde{X}}|\lambda)\pi^*(\lambda)\}} = ۰/۲۲۵۴.$$

مثال ۴ مثال ۲ را درنظر بگیرید. فرض کنید توابع عضویت دو پیشامد فازی $\widetilde{X}_{۱}$ و $\widetilde{X}_{۲}$ از فضای نمونه‌ای فازی $\widetilde{\mathcal{X}}$ به‌صورت زیر باشند

$$\widetilde{X}_{۱}(x) = \begin{cases} ۰/۲۵ & x = ۰ \\ ۰/۷۵ & x = ۱ \end{cases}, \widetilde{X}_{۲}(x) = \begin{cases} ۰/۷۵ & x = ۰ \\ ۰/۲۵ & x = ۱ \end{cases}.$$

در این صورت، بر اساس نمونه‌های تصادفی فازی به حجم ۳ از فضای نمونه‌ای فازی فوق، برآوردهای نقطه‌ای مختلف برای θ را می‌توان به‌دست آورد، که نتایج آن در جدول زیر خلاصه شده است (شکل ۳).

نمونه تصادفی	$m(\underline{\widetilde{X}})$	$\sup_{\theta}\left[\theta P(\underline{\widetilde{X}}\|\theta)\pi^*(\theta)\right]$	$MPPE(\theta)$	$d_{COG}(\underline{\widetilde{X}})$	$d_{COA}(\underline{\widetilde{X}})$	$d_{SOC}(\underline{\widetilde{X}})$
$(\widetilde{X}_{۱},\widetilde{X}_{۱},\widetilde{X}_{۱})$	۰/۱۳۳۵	۰/۰۹۱۷	۰/۶۲۵۰	۰/۶۱۴۸	۰/۶۲۲۷	۰/۶۸۷۱
$(\widetilde{X}_{۱},\widetilde{X}_{۱},\widetilde{X}_{۲})$ $(\widetilde{X}_{۱},\widetilde{X}_{۲},\widetilde{X}_{۱})$ $(\widetilde{X}_{۲},\widetilde{X}_{۱},\widetilde{X}_{۱})$	۰/۱۲۵۰	۰/۰۶۵۴	۰/۵۰۰۰	۰/۵۳۹۱	۰/۵۳۹۴	۰/۵۲۳۱
$(\widetilde{X}_{۲},\widetilde{X}_{۲},\widetilde{X}_{۱})$ $(\widetilde{X}_{۲},\widetilde{X}_{۱},\widetilde{X}_{۲})$ $(\widetilde{X}_{۱},\widetilde{X}_{۲},\widetilde{X}_{۲})$	۰/۱۲۵۰	۰/۰۶۲۵	۰/۵۰۰۰	۰/۴۶۰۹	۰/۴۶۰۶	۰/۵۰۰۰
$(\widetilde{X}_{۲},\widetilde{X}_{۲},\widetilde{X}_{۲})$	۰/۱۳۳۵	۰/۰۶۲۵	۰/۳۷۵۰	۰/۳۸۵۲	۰/۳۷۷۳	۰/۴۶۸۲



شکل ۳. توزیع‌های پسین امکانی برای نمونه‌های فازی مختلف در مثال ۴.

برای مثال اگر نتایج نمونه به حجم $n=۳$ از جامعه فوق منجر به مشاهدات فازی $(\widetilde{X}_۲,\widetilde{X}_۲,\widetilde{X}_۱)$ شود، آنگاه برآوردهای θ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

- برآورد ماکزیمم پسین امکانی:

$$\hat{\theta}_۱ = MPPE(\theta) = ۰/۵۰۰۰.$$

- برآورد مرکز ثقل:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_۲ &= d_{COG}(\widetilde{\underline{X}}) = \frac{\int_۰^۱ \theta\pi^*(\theta|\widetilde{\underline{X}})d\theta}{\int_۰^۱ \pi^*(\theta|\widetilde{\underline{X}})d\theta} \\ &= \frac{\int_۰^{۰/۵} \theta\pi^*(\theta|\widetilde{\underline{X}})d\theta + \int_{۰/۵}^۱ \theta\pi^*(\theta|\widetilde{\underline{X}})d\theta}{\int_۰^{۰/۵} \pi^*(\theta|\widetilde{\underline{X}})d\theta + \int_{۰/۵}^۱ \pi^*(\theta|\widetilde{\underline{X}})d\theta} \\ &= ۰/۴۶۰۹.\end{aligned}$$

- برآورد مرکز سطح:

$$\int_۰^{d_{COA}} P(\widetilde{\underline{X}}|\theta)\pi^*(\theta)d\theta = ۰/۰۲۹۹۵$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\theta}_۳ = d_{COA} = ۰/۴۶۰۶.$$

- برآورد سوپریمم مرکز:

$$\hat{\theta}_۴ = d_{SOC}(\widetilde{\underline{X}}) = \frac{\sup_\theta\{\theta\pi^*(\theta|\widetilde{\underline{X}})\}}{\sup_\theta\{\pi^*(\theta|\widetilde{\underline{X}})\}} = \frac{۰/۰۶۲۵}{۰/۱۲۵۰} = ۰/۵۰۰۰.$$

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک شیوه‌ی بیزی برای برآورد پارامتر مجهول بر اساس مدل‌های امکانی معرفی شد. در این شیوه، بر اساس یک توزیع پیشین امکانی و با داده‌های فازی، یک توزیع پسین ارائه شد. در ادامه با استفاده از توزیع پسین امکانی، روش‌هایی برای برآورد پارامتر مدل آماری تحت بررسی پیشنهاد گردید. تعمیم و صورت‌بندی رویکرد فوق در چارچوب نظریه تصمیم، با درنظر گرفتن تابع زیان، می‌تواند از موضوعات آینده برای تحقیق و بررسی باشد.

مراجع

[1] Chen, Y.H., Wang, W.J., and Chiu, C.H. (2000). *New estimation method for the membership values in fuzzy sets.* Fuzzy Sets and Systems, 112: 521-525.

[2] Civanlar, N.R., and Trussell, H.J. (1986). *Constructing membership functions using statistical data.* Fuzzy Sets and Systems, 18: 1-13.

[3] Dubois, D., and Prade, H. Sandri, S. (1993). *On possibility/probability transformations.* In: R. Lowen, M. Roubens (Eds.), Fuzzy Logic, State of the Art, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, pp. 103-112.

[4] Frühwirth-Schnatter, S. (1993). *On fuzzy Bayesian inference.* Fuzzy Sets and Systems, 60: 41-58.

[5] Gil, M.A., Corral, N., and Gil, P.(1985).*The fuzzy decision problem:an approach to the point estimation problem with fuzzy information.* European J. Oper. Res. 22 26-34.

[6] Hareter, D., and Viertl, R. (2004). *Fuzzy information and Bayesian statistics* , In: M. Lopez-Diaz, et al. (Eds.), Soft Methodology and Random Information Systems, Springer-Verlag, Berlin, pp. 392-398.

[7] Lapointe, S., and Bobee, B. (2000). *Revision of possibility distribution: A Bayesian inference pattern.* Fuzzy Sets and Systems, 116: 119-140.

[8] León-Rojas, J.M., and Morales, M. (2004). *Interval fuzzy Bayesian inference.* In: M. Lopez-Diaz, et al. (Eds.), Soft Methodology and Random Information Systems, Springer-Verlag, Berlin, pp. 559-566.

[9] Okuda, T., Tanaka, H., and Asai, L. (1978). *A formulation of fuzzy decision problems with fuzzy information using probability measures of fuzzy events.* Inform. Control 38 135-147.

[10] Robert, C.P. (1994). *The Bayesian Choice.* Springer, Heidelberg.

[11] Ross, T.J. (1995). *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, McGraw-Hill.

[12] Taheri, S.M. (2003). *Trends in fuzzy statistics.* Austrian Journal of Statistics, 32: 239-257.

[13] Taheri, S.M. and Behboodian, J. (2001). *A Bayesian approach to fuzzy hypotheses testing.* Fuzzy Sets and Systems, 123: 39-48.

[14] Taheri, S.M. and Behboodian, J. (2006). *On Bayesian approach to fuzzy testing hypothesis with fuzzy data.* Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 19: 139-154.

[15] Tanaka, H., Okuda, T., and Asai, K. (1979). *Fuzzy information and decision in a statistical model.* In: M.M. Gupta et al. (Eds.), Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, North-Holland, Amsterdam, pp. 303-320.

[16] Viertl, R., and Hareter, D. (2004). *Fuzzy information and stochastics.* Iranian Journal of Fuzzy Systems, 1:43-56.