

کیفیت فازی و نسل جدیدی از شاخصهای کارآیی

عباس پرچی^۱ و ماشالله ماشینچی^۲

abbasparchami@gmail.com, mashinchi@mail.uk.ac.ir

چکیده

مفهوم کیفیت فازی که برپایه‌ی مفهوم مجموعه‌های فازی مطرح می‌شود، در اغلب محیط‌های صنعتی قابل استفاده می‌باشد. در این مقاله، حدود مشخصه‌ی فنی به عنوان دو کران فازی در نظر گرفته شده، و برای محاسبه‌ی فاصله‌ی میان این دو کران فازی، یک فاصله‌ی جدید معرفی شده است. سپس برپایه‌ی فاصله‌ی معرفی شده و در حالتی که کیفیت به صورت فازی معرفی شود، شاخصهای کارایی فرایند تعمیم داده شده‌اند. همچنین روابط میان شاخصهای کارایی تعمیم یافته مطرح و مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: کیفیت فازی، حدود مشخصه فنی، شاخص کارایی فرایند.

۱ مقدمه

بستگی ندارند. شخصی که مسئول تعیین حد مشخصه‌ی بالایی (USL) و حد مشخصه‌ی پایینی (LSL)^۴ است باید آگاهی کامل در مورد تغییرپذیری فرایند داشته باشد. از آنجا که هیچ رابطه ریاضی یا آماری بین حدود کنترل^۵ و حدود مشخصه‌ی فنی وجود ندارد، بدیهی است که در بعضی از مواقع تشخیص این حدود همراه با ابهام^۶ بوده و این ابهام به کمک نظریه‌ی مجموعه‌های فازی^۷ می‌تواند در قالب یک مجموعه‌ی فازی مطرح گردد.

از جمله ابزار کنترل کیفیت، شاخصهای کارایی فرایند هستند. با در نظر گرفتن چنین شاخصهایی می‌توان تغییرپذیری یک فرایند تولیدی را که می‌تواند شامل انحرافات با دلیل باشد، با توجه به نیازها و مشخصات فنی محصول، کمی کرد و با

امروزه بیشتر کالاهای مصرفی با سیستم‌های تولیدی انبوه ساخته می‌شوند و به سبب پراکندگی عوامل دخیل در تولید، به ندرت اقلام تولید شده از جهات مختلف یکسان‌اند. مصرف کنندگان به دلیل پایین بودن نسبی قیمت کالاهایی که با چنین سیستم‌های تولیدی ساخته می‌شوند، پراکندگی در کیفیت آنها را، البته در محدوده‌ی مشخصی می‌پذیرند. از این رو تولید کننده باید سعی کند تا پراکندگی کیفیت را در داخل محدوده‌ی قابل قبولی حفظ نماید [۱]. این محدوده‌ی قابل قبول در یک فرایند تولیدی، بوسیله‌ی دو حد مشخصه‌ی فنی USL و LSL تعیین می‌شود. منشأ معرفی و محاسبه‌ی این حدود به خارج از فرایند مربوط است که معمولاً توسط مدیران، مهندسان طراح و یا مشتری تعیین می‌گردند و بدیهی است که به فرایند تولید

^۱ بخش آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

^۲ بخش آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

^۳ Upper specification limit

^۴ Lower specification limit

^۵ Control limits

^۶ Fuzziness

^۷ Fuzzy set theory

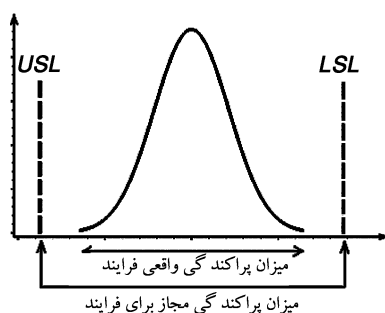
تعمیم می‌دهیم. روابط میان شاخص‌های کارایی تعمیم‌یافته را در بخش ششم بررسی می‌کنیم.

۲ شاخص‌های کارایی فرآیند

تعریف ۱ [۱] شاخص کارایی فرآیند آماره‌ای است برای برآورد توانایی ذاتی یک فرآیند تولیدی و بررسی چگونگی عملکرد فرآیند تولیدی نسبت به حدود مشخصه‌ی فنی محصول.

کارکردن با این نوع شاخص‌ها بسیار راحت است زیرا اطلاعات در مورد یک فرآیند تصادفی پیچیده را در یک قالب عدد ساده خلاصه می‌کنند. بدیهی است که برای بررسی، تجزیه و تحلیل یک فرآیند، کافی است رفتار مشخصه‌ی کیفیت فرآیند را نسبت به حدود مشخصه‌ی فنی ارزیابی کرد. به این منظور ژوران [۶] نسبت پهنای حدود مشخصه‌ی فنی به پهنای حدود تolerانس طبیعی (6σ) را به‌عنوان اولین شاخص کارایی فرآیند به‌صورت زیر معرفی کرد (شکل ۱)

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (۱)$$



شکل ۱. شرحی نموداری برای معرفی شاخص ژوران.

این شاخص تنها وقتی کارایی دارد که $\mu = M$ ، که در آن $M = (USL + LSL)/2$ و همچنین σ به‌ترتیب میانگین و انحراف معیار مشخصه‌ی کیفیت می‌باشند. برای رفع محدودیت تطابق μ بر M ، کان [۷] شاخص کارایی زیر را

استفاده از آن، به‌حذف یا کاهش این تغییرپذیری کمک نمود. از دیگر کاربردهای شاخص‌های کارایی فرآیند، تشخیص کارایی (یا عدم کارایی) یک فرآیند تولیدی می‌باشد [۲]. علاوه‌براین می‌توان با یاری گرفتن از این شاخص‌ها، چندین فرآیند تولیدی را با یکدیگر مقایسه کرده و مناسبترین فرآیند را انتخاب نمود.

لی [۸] و هونگ [۴] شاخص C_{pk} را به‌صورت یک عدد فازی برای داده‌های فازی تعمیم دادند. در چنین حالتی، تسای [۱۷] نیز شاخص کارایی C_p را به‌عنوان یک عدد فازی تعمیم داد. در بحث کنترل کیفیت، منصفانه‌تر آن است که عملاً به‌جای استفاده از مشخصه‌ی کیفیت دقیق و غیر فازی از مشخصه‌ی کیفیت انعطاف‌پذیر و فازی استفاده کنیم. یانگینگ [۱۶ و ۱۸] با استفاده از فرمول احتمال یک پیشامد فازی، که قبلاً توسط زاده ارائه شده بود، اولین شاخص کارایی فرآیند را بر مبنای کیفیت فازی ارائه نمود. سپس این ایده توسط صادق‌پور [۱۶] برای کیفیت چندبعدی نیز تعمیم داده شد. در یک کار تحقیقاتی توسط پرچمی و همکاران [۱۲]، با استفاده از تمامی فواصل اطمینان از ۱۰۰ درصد تا ۰ درصد به‌طور همزمان، روشی نوین برای برآورد شاخص‌های کارایی سنتی معرفی شده است. همچنین آنها اولین شاخص کارایی فازی مثلثی را درحالتی که حدود مشخصه‌ی فنی اعداد فازی مثلثی در نظر گرفته‌شده‌اند معرفی و مورد بررسی آماری قرار دادند [۱۰، ۱۱ و ۱۳]. معطی و همکاران [۹] شاخص‌های کارایی فازی را برای حالتی که حدود مشخصه‌ی فنی به‌صورت اعداد فازی LR معرفی شده باشند، تعمیم دادند.

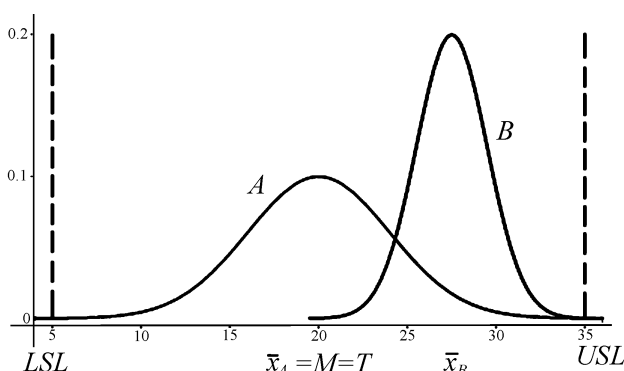
در بخش دوم مقاله، مروری بر شاخص‌های کارایی متداول خواهیم داشت. در بخش سوم، به معرفی کران‌های فازی و نیز معرفی یک متر جدید بر روی کرانهای فازی خواهیم پرداخت و برپایه‌ی آن، چندین شاخص کارایی فرآیند را در بخش چهارم

معرفی نمود

فرآیند می‌گیریم. اطلاعات به دست آمده از این دو نمونه در

زیر درج شده است (شکل ۲)

$$\bar{x}_A = 20, \quad s_A = 4, \quad \bar{x}_B = 27/5, \quad s_B = 2.$$



شکل ۲. مقایسه دو فرآیند با واریانسهای نابرابر در مثال ۲.

حال با توجه به اینکه $USL = 20$ و $LSL = 8$ در نظر گرفته شده‌اند، شاخص‌های C_p و C_{pk} را به ترتیب با استفاده از (۱) و (۲) برای دو فرآیند به صورت زیر برآورد می‌کنیم

$$\begin{aligned} \hat{C}_p(B) &= 2/5, \quad \hat{C}_p(A) = 1/25 \\ \hat{C}_{pk}(B) &= 1/25, \quad \hat{C}_{pk}(A) = 1/25. \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که از یک طرف با توجه به تساوی C_{pk} ها و از طرف دیگر عدم حساسیت C_p نسبت به انحراف μ از M نمی‌توان بوسیله‌ی شاخص‌های C_p و C_{pk} تصمیم درستی در مورد انتخاب یکی از دو فرآیند A و B گرفت. حال اگر مقدار هدف را برابر $T = 20$ در نظر بگیریم، می‌توانیم مقدار C_{pm} را با استفاده از (۳) برای دو فرآیند به صورت زیر برآورد کنیم

$$\hat{C}_{pm}(B) = 0/644, \quad \hat{C}_{pm}(A) = 1/25$$

و در نتیجه فرآیند A را بر فرآیند B ارجحیت دهیم.

$$\begin{aligned} C_{pk} &= \frac{USL - LSL - 2|\mu - M|}{6\sigma} \\ &= \frac{\min\{USL - \mu, \mu - LSL\}}{3\sigma} \end{aligned} \quad (2)$$

سینگ و تاگوچی [۵] شاخص زیر را با توجه به مقدار هدف معرفی شده T ، ارائه دادند

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[(X - T)^2]}} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (3)$$

همچنین پیرن و همکاران [۱۵] از ترکیب دو شاخص C_{pk} و C_{pm} شاخص کامل‌تری را به صورت زیر معرفی نمودند

$$\begin{aligned} C_{pmk} &= \frac{USL - LSL - 2|\mu - M|}{6\sqrt{E[(X - T)^2]}} \\ &= \frac{USL - LSL - 2|\mu - M|}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \end{aligned} \quad (4)$$

مثال ۱ [۳] در یک فرآیند تولیدی نرمال، فرض کنید $USL = 20$ و $LSL = 8$. با توجه به اینکه میانگین و انحراف معیار نمونه‌ی اخذ شده از این فرآیند به ترتیب $\bar{x} = 16$ و $s = 2$ مشاهده شده است، مقدار شاخص C_p به صورت زیر برآورد می‌شود

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6s} = \frac{20 - 8}{6(2)} = 1.$$

برآورد $\hat{C}_p = 1$ به آن معنی است که فرآیند کاراست به شرط آنکه میانگین فرآیند بر $M = 14$ منطبق باشد. ولی با توجه به مقدار $\bar{x} = 16$ این شرط برقرار نبوده و در نتیجه از شاخص C_{pk} استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \hat{C}_{pk} &= \frac{USL - LSL - 2|\bar{x} - M|}{6s} \\ &= \frac{20 - 8 - 2|16 - 14|}{6(2)} = 0/6667 \end{aligned}$$

مثال ۲ [۲] به منظور ارجحیت دادن و انتخاب یکی از دو فرآیند تولیدی A و B ، دو نمونه‌ی تصادفی مستقل از این دو

۳ کیفیت فازی

$D(\widetilde{USL}, \widetilde{LSL})$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$D(\widetilde{USL}, \widetilde{LSL}) = \int_0^1 g(\alpha) (u_\alpha - l_\alpha) d\alpha, \quad (5)$$

که در آن $\widetilde{USL}_\alpha = (-\infty, u_\alpha]$ و $\widetilde{LSL}_\alpha = [l_\alpha, +\infty)$ تابعی غیرنزولی روی بازه‌ی $[0, 1]$ می باشد به طوری که $g(0) = 0$ و $\int_0^1 g(\alpha) d\alpha = 1$ (به عنوان مثال، به ازای $g(\alpha) = (n+1)\alpha^n$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$ می توان g را به صورت در نظر گرفت).

نکته ۱ دو شرط $g(0) = 0$ و $\int_0^1 g(\alpha) d\alpha = 1$ تضمین می کنند که تعریف ۵ تعمیمی برای فاصله و تفاضل معمولی می باشد. به عبارت دیگر، اگر کران ها و حدود غیرفازی USL و LSL را به ترتیب به صورت دو تابع نشانگر $I_{\{x|x \leq USL\}}$ و $I_{\{x|x \geq LSL\}}$ در نظر بگیریم، آنگاه به ازای هر α در بازه $[0, 1]$ ، خواهیم داشت $l_\alpha = LSL$ و $u_\alpha = USL$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} D(USL - LSL) &= \int_0^1 g(\alpha) (u_\alpha - l_\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^1 g(\alpha) (USL - LSL) d\alpha \\ &= (USL - LSL) \int_0^1 g(\alpha) d\alpha \\ &= USL - LSL. \end{aligned}$$

به منظور سادگی محاسبات، بحث را برای دو حالت کران های فازی خطی و نمایی پی می گیریم و در هر مورد مثالی ارائه می دهیم.

۲.۳ کران های فازی خطی

تعریف ۶ کران بالای فازی $\widetilde{USL}_L \in F_U(\mathbb{R})$ را یک کران بالای فازی خطی می نامیم، هرگاه تابع عضویت آن به صورت

۱.۳ کران های فازی و فاصله ی میان دو کران فازی

فرض کنید که مجموعه ی تمامی زیرمجموعه های فازی از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را با نماد $F(\mathbb{R})$ نشان دهیم. به عبارتی فرض کنید $F(\mathbb{R}) = \{\tilde{A} | \tilde{A} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]\}$

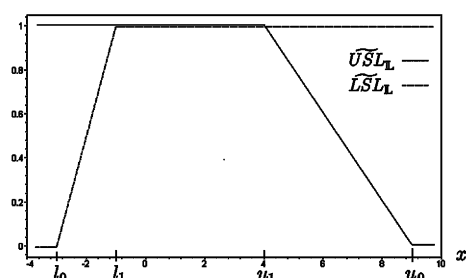
تعریف ۲ به ازای هر α متعلق به بازه ی $[0, 1]$ ، α -برش مجموعه ی فازی $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$ به صورت مجموعه ی معمولی $\tilde{A}_\alpha = \{x | \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$ تعریف می شود.

تعریف ۳ اگر $\widetilde{USL} \in F(\mathbb{R})$ دارای سه شرط زیر باشد، آنگاه $\widetilde{USL}$ یک کران بالای فازی نامیده می شود
الف) $\widetilde{USL}$ یک تابع غیرصعودی باشد،
ب) برد تابع $\widetilde{USL}$ بازه ی $[0, 1]$ را بپوشاند،
ج) وجود داشته باشد $u_1 \in \mathbb{R}$ به طوری که به ازای هر $x \leq u_1$ داشته باشیم $\widetilde{USL}(x) = 1$.

تعریف ۴ اگر $\widetilde{LSL} \in F(\mathbb{R})$ دارای سه شرط زیر باشد، آنگاه $\widetilde{LSL}$ یک کران پایینی فازی نامیده می شود
الف) $\widetilde{LSL}$ یک تابع غیرنزولی باشد،
ب) برد تابع $\widetilde{LSL}$ بازه ی $[0, 1]$ را بپوشاند،
ج) وجود داشته باشد $l_1 \in \mathbb{R}$ به طوری که به ازای هر $x \geq l_1$ داشته باشیم $\widetilde{LSL}(x) = 1$.

مجموعه ی تمام کران های بالایی و پایینی فازی را به ترتیب با نمادهای $F_U(\mathbb{R})$ و $F_L(\mathbb{R})$ نشان می دهیم.

تعریف ۵ اگر $\widetilde{USL} \in F_U(\mathbb{R})$ و $\widetilde{LSL} \in F_L(\mathbb{R})$ ، آنگاه فاصله ی میان دو کران فازی $\widetilde{USL}$ و $\widetilde{LSL}$ را با نماد



شکل ۳. توابع عضویت کران‌های بالایی و پایینی فازی خطی

در مثال ۳.

۳.۳ کران‌های فازی نمایی

تعریف ۸ کران بالای فازی $\widetilde{USL}_E \in F_U(\mathbb{R})$ را یک کران

بالای فازی نمایی می‌نامیم، هرگاه تابع عضویت آن به صورت

زیر تعریف شود

$$\widetilde{USL}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq u_1, \\ e^{-\left(\frac{x-u_1}{s_u}\right)^r} & \text{if } x > u_1, \end{cases} \quad (9)$$

که برای سهولت آن را به اختصار با نماد

$\widetilde{USL}_E = U(u_1, s_u)_E$ نشان می‌دهیم به طوری که $u_1, s_u \in \mathbb{R}$

و $s_u \geq 0$.

تعریف ۹ کران پایینی فازی $\widetilde{LSL}_E \in F_L(\mathbb{R})$ را یک کران

پایینی فازی نمایی می‌نامیم، هرگاه تابع عضویت آن به صورت

زیر تعریف شود

$$\widetilde{LSL}_E(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-l_1}{s_l}\right)^r} & \text{if } x < l_1, \\ 1 & \text{if } x \geq l_1, \end{cases} \quad (10)$$

که برای سهولت آن را به اختصار با نماد $\widetilde{LSL}_E = L(l_1, s_l)_E$

نشان می‌دهیم به طوری که $l_1, s_l \in \mathbb{R}$ و $s_l \geq 0$.

قضیه ۲ فرض کنید $n = 0, 1, 2, \dots$ باشد،

$g(\alpha) = (n+1)\alpha^n$. آنگاه برای هر دو کران بالایی و پایینی

زیر تعریف شود

$$\widetilde{USL}_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq u_1, \\ \frac{x-u_0}{u_1-u_0} & \text{if } u_1 < x < u_0, \\ 0 & \text{if } u_0 \leq x, \end{cases} \quad (6)$$

که برای سهولت آن را به اختصار با نماد

$\widetilde{USL}_L = U(u_1, u_0)_L$ نشان می‌دهیم به طوری که $u_1, u_0 \in \mathbb{R}$

و $u_1 \leq u_0$.

تعریف ۷ کران پایینی فازی $\widetilde{LSL}_L \in F_L(\mathbb{R})$ را یک کران

پایینی فازی خطی می‌نامیم، هرگاه تابع عضویت آن به صورت

زیر تعریف شود

$$\widetilde{LSL}_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq l_0, \\ \frac{x-l_0}{l_1-l_0} & \text{if } l_0 < x < l_1, \\ 1 & \text{if } l_1 \leq x, \end{cases} \quad (7)$$

که برای سهولت آن را به اختصار با نماد $\widetilde{LSL}_L = L(l_0, l_1)_L$

نشان می‌دهیم به طوری که $l_0 \leq l_1$ و $l_1, l_0 \in \mathbb{R}$.

قضیه ۱ فرض کنید $n = 0, 1, 2, \dots$ ، $g(\alpha) = (n+1)\alpha^n$ ،

آنگاه برای هر دو کران بالایی و پایینی فازی خطی

$\widetilde{USL}_L = U(u_1, u_0)_L$ و $\widetilde{LSL}_L = L(l_0, l_1)_L$ داریم

$$D(\widetilde{USL}_L, \widetilde{LSL}_L) = \frac{1}{n+2} [(n+1)(u_1 - l_1) + (u_0 - l_0)]. \quad (8)$$

مثال ۳ در خط تولید یک محصول خاص، کران‌های فازی

«تقریباً بزرگتر از ۱-» و «تقریباً کوچکتر از ۴»، که به ترتیب

بوسیله‌ی توابع عضویت $\widetilde{LSL}_L = L(-3, -1)_L \in F_L(\mathbb{R})$

و $\widetilde{USL}_L = U(4, 9)_L \in F_U(\mathbb{R})$ معرفی می‌شوند، به عنوان

حدود مشخصه‌ی فازی فرایند در نظر گرفته شده‌اند (شکل ۳).

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی میان این دو کران فازی خطی، اگر در

قضیه ۱ مقدار $n = 1$ فرض شود، آنگاه پهنای میان دو کران

فازی برابر $D(\widetilde{USL}_L, \widetilde{LSL}_L) = \frac{22}{3} \simeq 7.333$

می‌شود.

تعریف ۱۱ در یک فرایند فازی تعمیم شاخصهای کارایی (۴-۱) به صورت زیر می باشد

$$C_{\tilde{p}} = \frac{D(\widetilde{USL}, \widetilde{LSL})}{\sqrt[3]{\sigma}}, \quad (12)$$

$$C_{\tilde{p}k} = \frac{D(\widetilde{USL}, \widetilde{LSL}) - 2|\mu - m|}{\sqrt[3]{\sigma}}, \quad (13)$$

$$C_{\tilde{p}m} = \frac{D(\widetilde{USL}, \widetilde{LSL})}{\sqrt[3]{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (14)$$

$$C_{\tilde{p}mk} = \frac{D(\widetilde{USL}, \widetilde{LSL}) - 2|\mu - m|}{\sqrt[3]{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \quad (15)$$

به طوری که $m = (l_1 + u_1)/2$ و T مقدار هدف می باشد. توجه شود که شاخص $C_{\tilde{p}}$ در حالتی مورد استفاده قرار می گیرد که $\mu = m$ باشد.

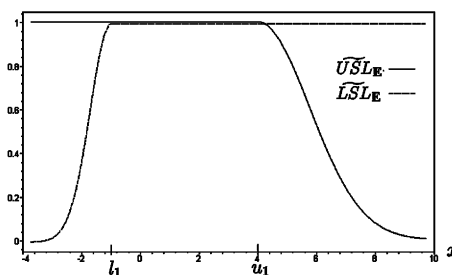
نکته ۲ در یک فرایند فازی که حدود تفرانس فرایند به صورت فازی در نظر گرفته شده است، انتظار می رود که مرکز بازه ی تفرانس نیز فازی معرفی شود. این امر مستلزم معرفی مفهوم جدید جمع بر روی دو کران فازی است که در این مقاله برای سهولت در محاسبات از آن پرهیز شده و به تسامح $m = (l_1 + u_1)/2$ در نظر گرفته شده است.

نکته ۳ اگر حدود مشخصه ی فنی غیر فازی و دقیق در نظر گرفته شوند، آنگاه با توجه به نکته ۱، شاخصهای کارایی معرفی شده در تعریف ۱۱ منطبق بر شاخصهای کارایی متداول یعنی شاخصهای (۴-۱) می باشند.

$$\widetilde{LSL}_E = L(l_1, s_l)_E \text{ و } \widetilde{USL}_E = U(u_1, s_u)_E \text{ داریم}$$

$$D(\widetilde{USL}_E, \widetilde{LSL}_E) = [u_1 - l_1] + \sqrt{\frac{\pi}{4(n+1)}} [s_u + s_l]. \quad (11)$$

مثال ۴ در خط تولید یک محصول خاص، کرانهای فازی «تقریباً بزرگتر از ۱-» و «تقریباً کوچکتر از ۴»، که به ترتیب بوسیله ی توابع عضویت $\widetilde{LSL}_E = L(-1, 1)_E \in F_L(\mathbb{R})$ و $\widetilde{USL}_E = U(4, 2/5)_E \in F_U(\mathbb{R})$ معرفی می شوند، به عنوان حدود مشخصه ی فازی فرایند در نظر گرفته شده اند (شکل ۴). برای محاسبه ی فاصله ی میان این دو کران فازی نمایی، اگر در قضیه ۲ مقدار $n = 1$ فرض شود، آنگاه پهنای میان دو کران فازی برابر است با $D(\widetilde{USL}_E, \widetilde{LSL}_E) = 5 + \frac{3/5 \times \sqrt{2\pi}}{4} \simeq 7/193$



شکل ۴. توابع عضویت کرانهای بالایی و پایینی فازی نمایی در

مثال ۴

۴ اندازه گیری میزان کارایی در یک فرایند فازی

تعریف ۱۰ یک فرایند با حدود مشخصه ی بالایی و پایینی فازی $\widetilde{USL} \in F_U(\mathbb{R})$ و $\widetilde{LSL} \in F_L(\mathbb{R})$ را که در آن $l_1 \leq u_1$ و مشخصه ی کیفیت فرایند دارای توزیع نرمال می باشد، به اختصار یک فرایند فازی گوئیم.

قضیه ۵ در یک فرایند فازی داریم $\widetilde{C}_{pmk} = \frac{\widetilde{C}_{pm} \widetilde{C}_{pk}}{\widetilde{C}_p}$

نکته ۴ با توجه به نکات ۱ و ۲، بدیهی است که تمامی روابط مطرح شده بین شاخص‌های کارایی تعمیم‌یافته در قضایای ۳، ۴ و ۵ میان شاخص‌های کارایی متداول نیز برقرار می‌باشند.

با قبول فرض این که مقدار هدف $T = 5/5$ و حدود مشخصه‌ی فنی فازی به صورت $\widetilde{LSL}_L = L(0, 4)_L \in F_L(\mathbb{R})$ و $\widetilde{USL}_L = U(10, 12)_L \in F_U(\mathbb{R})$ معرفی شده‌اند، میانگین و انحراف معیار فرایند به ترتیب بر روی محورهای افقی و عمودی شکل ۵ رسم شده‌اند. شباهت‌ها و تفاوت‌های رفتاری میان سه شاخص $\widetilde{C}_{pm}$ ، $\widetilde{C}_{pk}$ ، $\widetilde{C}_p$ نسبت به تغییرات دو پارامتر μ و σ در این شکل مشاهده می‌شوند. به عنوان مثال، کلیه‌ی نقاط (μ, σ) در دو خط افقی منجر به مقادیر $\widetilde{C}_p = 0/5$ و $\widetilde{C}_{pk} = 1$ می‌شوند. این خطوط نشان می‌دهند که شاخص $\widetilde{C}_p$ تنها تابعی از σ است و به μ نیز بستگی ندارد. دو شبه‌مثلی که در شکل ۵ رسم شده‌اند، نشان‌دهنده‌ی نقاطی از صفحه‌ی $\mu\sigma$ می‌باشند که منجر به مقادیر $\widetilde{C}_{pk} = 0/5$ و $\widetilde{C}_{pm} = 1$ می‌شوند و بیانگر نحوه‌ی ارتباط $\widetilde{C}_{pk}$ با پارامترهای μ و σ می‌باشند. به ازای هر مقدار ثابت σ ، ماکزیمم مقدار شاخص $\widetilde{C}_{pk}$ ، به ازای $\mu = \frac{4+1}{4} = 5/4$ حاصل می‌شود که در این نقطه $\widetilde{C}_{pk}$ بر $\widetilde{C}_p$ منطبق می‌باشد. همچنین مجموعه‌ی نقاط (μ, σ) که در شرط $\widetilde{C}_{pm} = c$ و یا به طور معادل، در شرط $\sigma^2 + (\mu - T)^2 = \left\{ D \left(\widetilde{USL}_L, \widetilde{LSL}_L \right) / 6c \right\}^2$ صدق می‌کنند، به ازای $c = 0/5$ و $c = 1$ دو نیم‌دایره‌ی رسم شده در شکل ۵ می‌باشند. به ازای هر مقدار ثابت σ ، ماکزیمم مقدار شاخص $\widetilde{C}_{pm}$ ، به ازای $\mu = T$ حاصل می‌شود که در این نقطه $\widetilde{C}_{pm}$ بر $\widetilde{C}_p$ منطبق می‌باشد.

مثال ۵ فرض کنید در مثال‌های ۳ و ۴ میانگین و انحراف معیار فرایند به ترتیب $\mu = 1/5$ و $\sigma = 2/3$ برآورد شده‌اند. در این صورت با استفاده از قضایای ۱ و ۲ و فرمول (۱۲) می‌توان شاخص کارایی $\widetilde{C}_p$ را به ترتیب به صورت زیر برآورد نمود

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_{\bar{p}} &= \frac{2(u_1 - l_1) + (u_o - l_o)}{18\sigma} \\ &= \frac{2(4 + 1) + (9 + 3)}{12} \\ &\simeq 1/833 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_{\bar{p}} &= \frac{4[u_1 - l_1] + \sqrt{2\pi}[s_u + s_l]}{24\sigma} \\ &\simeq \frac{4(4 + 1) + 2/5 \cdot 7(2/5 + 1)}{16} \\ &\simeq 1/798. \end{aligned}$$

۵ روابط میان شاخصهای کارایی فرایند تعمیم‌یافته

قضایای زیر را می‌توان به کمک فرمول‌های (۱۲)–(۱۵) اثبات نمود. هم‌چنین علاقمندان برای مشاهده‌ی اثبات این قضایا می‌توانند به مرجع [۱۴] رجوع نمایند.

قضیه ۳ در یک فرایند فازی داریم

$$(الف) \quad \widetilde{C}_p \geq \widetilde{C}_{pk} \geq \widetilde{C}_{pmk}$$

$$(ب) \quad \widetilde{C}_p \geq \widetilde{C}_{pm} \geq \widetilde{C}_{pmk}$$

قضیه ۴ در یک فرایند فازی داریم

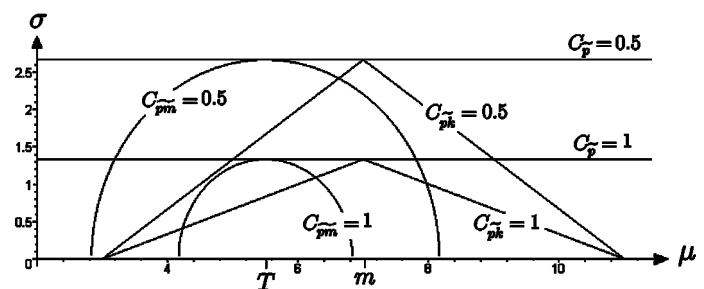
$$(الف) \quad \widetilde{C}_{pk} = \widetilde{C}_p - \frac{1}{3} \left| \frac{\mu - m}{\sigma} \right|$$

$$(ب) \quad \widetilde{C}_{pm} = \frac{\widetilde{C}_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma} \right)^2}}$$

$$(ج) \quad \widetilde{C}_{pmk} = \frac{\widetilde{C}_{pk}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma} \right)^2}}$$

سپاسگزاری

نویسنده‌ی اول از حمایت مالی جزیی قطب سیستم‌های فازی ایران و نویسنده‌ی دوم از حمایت مالی طرح ریاست جمهوری با شماره‌ی ۱۵-۸-۱۳۸۵-۸۵۳۱۴۳ تقدیر و تشکر می‌نماید.



شکل ۵. رفتار سه شاخص کارایی C_p ، C_{pk} و C_{pm} نسبت به تغییرات میانگین و انحراف معیار.

مراجع

- [۱] طارقیان، ح.ر. و بزرگ‌نیا، ا. (۱۳۷۶)، کاربرد سیستم‌های کنترل کیفیت با استفاده از روش‌های آماری، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، چاپ اول.
- [۲] نورالسنا، ر. (۱۳۷۶)، کنترل کیفیت آماری، انتشارات دانشگاه علم و صنعت.
- [۳] یاوری، ع.ر. (۱۳۸۳)، شاخص‌های کارایی فرآیند، پایان نامه کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر.
- [4] Hong, D.H. (2004), A note on C_{pk} index estimation using fuzzy numbers, *European Journal of Operational Research* 158(2), 529-532.
- [5] Hsiang, T.C. and Taguchi, G. (1985), Tutorial on quality control and assurance-The Taguchi methods, *Joint Meetings of the American Statistical Association*, Las Vegas, Nevada, 188-195.
- [6] Juran, J.M. (1974), *Juran's Quality Control Handbook*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York.
- [7] Kane, V.E. (1986), Process capability indices, *Journal of Quality Technology* 18, 41-52.
- [8] Lee, H.T. (2001), C_{pk} index estimation using fuzzy numbers, *European Journal of Operational Research* 129 (3), 683-688.
- [9] Moeti, M.T., Parchami, A. and Mashinchi, M. (2006), A note on fuzzy process capability indices, *Scientia Iranica* 13, Number 4, 379-385.
- [10] Parchami, A., Mashinchi, M., Yavari, A.R. and Maleki, H.R. (2005), Process capability indices as fuzzy numbers, *Austrian Journal of Statistics* 34 (4), 391-402.

-
- [11] Parchami, A., Mashinchi, M. and Maleki, H.R. (2006), Fuzzy confidence intervals for fuzzy process capability index, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 17 (3), 287-295.
- [12] Parchami, A. and Mashinchi, M. (2007), Fuzzy estimations for process capability indices, *Information Sciences* 177, Issue 6, 1452-1462.
- [13] Parchami, A. and Mashinchi, M. (2006), Making decision to evaluate fuzzy process capability index, *Asian Fuzzy Systems Society (AFSS) International conference*, Boading, China, 28-33.
- [14] Parchami, A. and Mashinchi, M. (2008), A new generation of process capability indices, *Journal of Applied Statistics*, Submitted.
- [15] Pearn, W.L., Kotz, S. and Johnson, N. (1992), Distribution and inferential properties of capability indices, *Journal of Quality Technology* 24, 41-52.
- [16] Sadeghpour-Gildeh, B. (2006), Multivariate process capability index based on fuzzy tolerance region, *37-th Annual Iranian Mathematics Conference*, Azarbaijan University of Tarbiat Moallem, Tabriz, Iran, 607-610.
- [17] Tsai, C.C. and Chen, C.C. (2006), Making decision to evaluate process capability index C_P with fuzzy numbers, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 30, 334-339.
- [18] Yongting, C. (1996), Fuzzy quality and analysis on fuzzy probability, *Fuzzy Sets and Systems* 83, 283-290.