احتمال بر روی مشبکه‌های متعادل

مهدیه صائب[۱]، ماشاءالله ماشین‌چی[۱]
Mahdie.saeb@gmail.com, mashinchi@mail.uk.ac.ir

چکیده

از زمان معرفی مجموعه‌های فازی تا کنون، از آن زمان که دکتر لطفی عسکرزاده مجموعه فازی را تعریف کرد تاکنون تعمیم‌های بسیاری از این مفهوم ارائه شده است. دو نمونه از این تعمیم‌ها، مجموعه‌های فازی شهودی و مجموعه‌های فازی متعادل هستند. در این مقاله، تعمیم جدیدی از مجموعه‌های فازی تحت عنوان مجموعه‌های فازی متعادل شهودی ارائه شده و ثابت شده است که این مجموعه‌ها با مشبّکه‌ی متعادل و کامل L_*^b یکریختند. در پایان، احتمال بر روی شبکه‌های متعادل L_*^b و $L_\square^b$ بررسی شده، فرمول‌هایی دقیق برای آن به دست آمده است.

واژه‌های کلیدی: احتمال، مجموعه‌های فازی شهودی، مجموعه‌های فازی شهودی متعادل، مشبّکه‌ی کامل

۱ مقدمه

مجموعه فازی در سال ۱۹۶۵ توسط لطفی عسکر زاده، به عنوان الگویی برای صورت‌بندی مفاهیم نادقیق معرفی شد[۱۲]. بر طبق تعریف زاده، میزان عضویت هر عنصر در یک مجموعه‌ی فازی به کمک عددی بین ۰ و ۱ مشخص می‌شود. در سال ۱۹۸۶، آتاناسوف، در تعمیمی از مجموعه‌های فازی، مجموعه فازی شهودی را معرفی کرد[۱]. وی علاوه بر درجه‌ی عضویت، در یک مجموعه‌ی فازی درجه‌ی عدم عضویت را تعریف کرد که هر دوی این درجات بین صفر و یک قرار دارند. او همچنین تفاضل مجموع این دو درجه و یک را به‌عنوان درجه‌ی عدم قطعیت تعریف کرد[۲].

در سال ۲۰۰۶، هومندا با توجه به عدم تقارن عملگرهای معمولی بر روی مجموعه‌های فازی، گسترشی جدید از مجموعه‌های فازی را ارائه داد[۷]. بر طبق تعریف هومندا، یک مجموعه فازی متعادل مجموعه‌ای است که میزان عضویت هر عضو در آن توسط عددی بین ۱− و۱ بیان می‌گردد. در این مقاله، تعمیمی به‌نام مجموعه‌های فازی متعادل شهودی از مجموعه‌های فازی را معرفی می‌کنیم و آن‌گاه به بررسی احتمال بر روی این مجموعه‌ها می‌پردازیم. مقاله حاضر به‌ترتیب زیر تدوین شده است: در بخش دوم، تعاریف و مفاهیم مقدماتی درباره‌ی مجموعه‌های فازی شهودی و یکسان بودن آنها با مشبّکه‌ی L_* بیان می‌شود، بخش سوم شامل تعریف احتمال بر روی مشبّکه‌ی L_* و تعمیمی از آن یعنی مشبّکه‌ی $L_\square$ است و در ادامه، شکل کلی بر روی این دو شبکه خواهد آمد. در بخش چهارم، مجموعه‌های فازی متعادل شهودی تعریف می‌شوند و بیان خواهد شد که این مجموعه‌ها، با مشبّکه‌ی L_*^b یکریختند. سرانجام، در بخش آخر، احتمال بر روی مشبّکه‌های L_*^b و $L_\square^b$ (که تعمیمی از L_*^b است) را بررسی می‌کنیم، شکل کلی آن بر روی این دو شبکه را به‌دست می‌آوریم و بیان می‌کنیم که احتمال بر روی مشبّکه‌های L_*^b و $L_\square^b$، به‌ترتیب تعمیمی از احتمال بر روی مشبّکه‌های L_* و $L_\square$

[۱] دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان

است. منابع اصلی این مقاله، مراجع [۵]، [۷]، [۱۰] و [۱۱] هستند که برای مطالعه بیشتر می‌توان به آن‌ها رجوع نمود.

۲ تعریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱ [۵] یک مجموعه‌ی فازی شهودی $A(IFS)$ در X عبارت است از

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), v_A(x)\rangle \mid x \in X\}$$

که در آن توابع $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ و $v_A : X \longrightarrow [0,1]$ به ترتیب درجه توابع عضویت و عدم عضویت عنصر $x \in X$ هستند، به طوری‌که برای هر $x \in X$ نامساوی زیر برقرار است

$$0 \leq \mu_A(x) + v_A(x) \leq 1$$

به‌وضوح هر مجموعه فازی معمولی می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$$

بنابراین هر مجموعه‌ی فازی، یک مجموعه فازی شهودی است.

تعریف ۲ [۴] مقدار $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - v_A(x)$ را عدم محدودیت (عدم قطعیت، تردید، ضریب شهود) عنصر $x \in X$ در مجموعه فازی شهودی A می‌نامیم.

مثال ۱ [۱۱] فرض کنید X مجموعه‌ی تمام کشورهایی باشد که حکومت مردم‌سالاری[۲] دارند و فرض کنید در هر عضو این مجموعه (که یک کشور است) درصد رای‌دهندگانی که به فرد خاصی رأی داده‌اند برابر $\mu(x)$ باشد. همچنین فرض کنید درصد رأی دهندگانی که به این فرد رأی نداده‌اند را با $v(x)$ نمایش دهیم. در این صورت درصد واجدین شرایط رأی‌دادن که در انتخابات شرکت نکرده‌اند برابر $\pi(x) = 1 - \mu(x) - v(x)$ خواهدبود.

تعریف ۳ [۳] فرض کنیم P یک مجموعه باشد. یک ترتیب[۳] (ترتیب جزئی[۴]) روی P، رابطه‌ای مانند $\leq$ روی P است به طوری‌که برای هر $x, y, z \in P$ داشته باشیم

۱) $x \leq x$.

۲) اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آنگاه $x = y$.

۳) اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه $x \leq z$.

خاصیت ۱، خاصیت انعکاسی[۵]، خاصیت ۲ خاصیت پادتقارنی[۶] و خاصیت ۳، خاصیت تعدّی[۷] نامیده می‌شود.

تعریف ۴ [۳] فرض کنیم P یک مجموعه و $\leq$ ترتیبی روی P باشد. در این صورت گوییم $(P, \leq)$ یک مجموعه مرتب[۸] (مرتب جزئی[۹]) است.

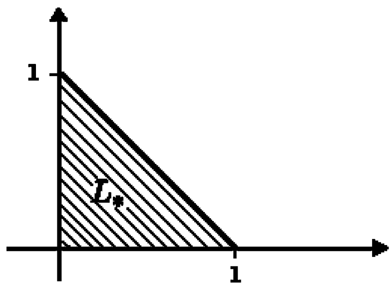
تعریف ۵ [۳] یک مشبّکه[۱۰] عبارت است از مجموعه‌ای مرتب جزئی مانند $(P, \leq)$ که هر دو عضو آن در P، کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین داشته باشند.

اگر $x, y \in P$، آنگاه $\sup\{x, y\}$ را با $x \vee y$ و $\inf\{x, y\}$ را با $x \wedge y$ نشان می‌دهیم.

---
[۲] Democracy
[۳] Order
[۴] Partially order
[۵] Reflexive
[۶] Antisymmetry
[۷] Transitivity
[۸] Order set
[۹] Partially order set
[۱۰] Lattice

تعریف ۶ [۳] مشبّکه‌ی $(P,\leq)$ را مشبّکه کامل[11] گوییم هرگاه زیرمجموعه مانند X از P، در X کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین داشته باشد. مجموعه های فازی شهودی (معرفی شده در تعریف ۱) تعمیم مهمی از مجموعه‌های فازی معمولی هستند و بنابراین شناخت همه جانبه‌ی آنها، امری است که ما را در شناخت بیشتر مجموعه‌های فازی یاری خواهد کرد. برای راحت‌تر کردن بررسی خواصّ مجموعه‌های فازی شهودی، اکنون مشبّکه‌ای یکریخت با این مجموعه‌ها معرفی می‌کنیم و از این پس به جای بررسی IFSها، این مشبّکه را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

تعریف ۷ [۶] مجموعه زیر را درنظر بگیرید



شکل ۱: مشبکه‌ی L_*

$$L_* = \{(a,b) \mid a,b \in [0,1], a+b \leq 1\}$$

بر روی L_*، ترتیب را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall (a,b),(c,d) \in L_* \quad (a,b) \leq_* (c,d) \iff a \leq b \& c \geq d$$

قضیه ۱ [۲] $(L_*,\leq_{L_*})$ یک مشبّکه‌ی کامل است.

از این پس در همه جا فرض می‌کنیم $y=(y_1,y_2)$ و $x=(x_1,x_2)$.

این مجموعه می‌تواند به‌عنوان یک ساختار جبری[12] مانند $(L_*,\wedge,\vee)$ درنظر گرفته شود که روی آن عملگرهای $\vee$ (اجتماع[13]) و $\wedge$ (اشتراک[14]) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$x \wedge y = (\min(x_1,y_1), \max(x_2,y_2))$$

$$x \vee y = (\max(x_1,y_1), \min(x_2,y_2))$$

اگر $x,y \in L_*$.

قضیه ۲ [۳] یک مجموعه‌ی فازی شهودی مانند

$$A(u) = \{(u,\mu_A(u),v_A(u)) \mid u \in U\}$$

یکریخت با L_* است.

از این پس یکه‌های مشبّکه‌ی L_* را با $1_{L_*} = (1,0)$ و $0_{L_*} = (0,1)$ نشان می‌دهیم.

با توجه به قضیه‌ی قبل، می‌توان به جای بررسی خواص مجموعه‌های فازی شهودی، خواص مشبّکه‌ی L_* را بررسی نمود.

تعریف ۸ [۱۰] مجموعه $L_\square$ و ترتیب $\leq_\square$ روی آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L_\square = [0,1]^2,\ (a,b) \leq_\square (c,d) \Longrightarrow a \leq b \& c \geq d$$

$$\forall (a,b),(c,d) \in L_\square$$

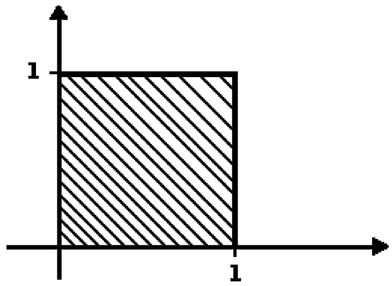
مشابه مشبّکه‌ی L_*، این مجموعه هم می تواند به‌عنوان یک ساختار جبری مانند $(L_\square,\wedge,\vee)$ درنظر گرفته شود که روی آن عملگرهای $\vee$ (اجتماع) و $\wedge$ (اشتراک) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$x \wedge y = (\min(x_1,y_1), \max(x_2,y_2))$$

$$x \vee y = (\max(x_1,y_1), \min(x_2,y_2))$$

اگر $x,y \in L_\square$.

[11] Complete lattice
[12] Algebraic structure
[13] Join
[14] Meet



شکل ۲: مشبکه‌ی $L_\square$

قضیه ۳ [۱۰] $(L_\square, \leq_\square)$ یک مشبّکه‌ی کامل است.
یکه‌های مشبّکه‌ی $L_\square$ را با $0_{L_\square} = (0,1)$ و $1_{L_\square} = (1,0)$ نشان می‌دهیم.

۳ احتمال بر روی مشبّکه‌های L_* و $L_\square$

تعریف ۹ [۱۰] دو عملگر □ و ⊕ را بر روی L_* و $L_\square$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = ((x_1 + x_2) \wedge 1, (y_1, y_2) \vee 0)$$

$$(x_1, y_1) \square (x_2, y_2) = ((x_1 + x_2 - 1) \vee 0, (y_1 + y_2) \wedge 1)$$

که در آن $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L_*$ یا $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L_\square$ و $\vee = \max$ و $\wedge = \min$.

تعریف ۱۰ [۱۰] یک احتمال بر روی L_* تابعی مانند $P : L_* \longrightarrow [0,1]$ است که در سه شرط زیر صدق می‌کند

(۱) $P((0,1)) = 0\ ,\ P((1,0)) = 1$

(۲) $\forall a, b \in L_* \quad P(a \oplus b) + P(a \otimes b) = P(a) + P(b)$

(۳) $\forall a_n, a \in L_*, n \in \square \ a_n \uparrow a \Longrightarrow P(a_n) \uparrow P(a)$

در شرط ۳ نماد "$a_n \uparrow a$" به این معنا است که a_n یک دنباله‌ی نانزولی نسبت به‌ترتیب $\leq_*$ در L_* است و $a = \vee_{n\in\square} a_n$[۸].

قضیه ۴ [۱۰] فرض کنیم $P : L_* \longrightarrow [0,1]$ یک تابع احتمال بر روی L_* باشد. در این صورت برای $\alpha = 1 - P((0,0))$ داریم

$$P((x,y)) = \alpha x + (1-\alpha)(1-y) \quad \forall (x,y) \in L_*$$

تعریف ۱۱ [۱۰] یک احتمال بر روی $L_\square$ تابعی مانند $P : L_\square \longrightarrow [0,1]$ است که در سه شرط زیر صدق می‌کند

(۱) $P((0,1)) = 0\ ,\ P((1,0)) = 1$

(۲) $\forall a, b \in L_\square \mathcal{P}(a \oplus b) + \mathcal{P}(a \otimes b) = P(a) + P(b)$

(۳) $\forall a_n, a \in L_\square, n \in \square \quad a_n \uparrow a \Longrightarrow P(a_n) \uparrow P(a)$

در شرط ۳ نماد "$a_n \uparrow a$" به این معنا است که a_n یک دنباله‌ی نانزولی نسبت به $\leq_\square$ در $L_\square$ است و $a = \vee_{n\in\square} a_n$[۹].

قضیه ۵ [۱۰] فرض کنیم $P : L_\square \longrightarrow [0,1]$ یک تابع احتمال بر روی $L_\square$ باشد. در این صورت برای $\alpha = P((1,1))$ داریم

$$P((x,y)) = \alpha x + (1-\alpha)(1-y) \quad \forall (x,y) \in L_\square$$

۴ مجموعه‌های فازی شهودی متعادل

در بخش دوم، مجموعه‌های فازی شهودی تعریف شدند و بیان شد که این مجموعه‌ها، تعمیمی از مجموعه‌های فازی عادی هستند. حال مجموعه‌های فازی شهودی متعادل را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۲ یک مجموعه فازی متعادل شهودی، مجموعه‌ای مانندA است که

$$A = \{(u, \mu_A(u), v_A(u)) \mid u \in U\}$$

و در آن برای هر $u \in U$، $\mu_A(u), v_A(u) \in [-1, 1]$. همچنین $v_A(u)$ و $\mu_A(u)$ به درجه‌ی عدم عضویت و درجه‌ی عضویت عنصر $u \in U$ هستند و برای هر $u \in U$ داریم

$$-1 \le \mu_A(u) + v_A(u) \le 1$$

مثال ۲ هر مجموعه‌ی فازی متعادل A، یک مجموعه متعادل شهودی است، زیرا

$$A = \{(u, \mu_A(u), -\mu_A(u)) \mid u \in U\}$$

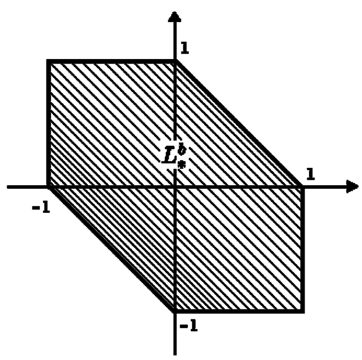
که در آن $\mu_A(u) \in [-1, 1]$، پس $-\mu_A(u) \in [-1, 1]$ و با توجه به این که $\mu_A(u) + (-\mu_A(u)) = 0 \in [-1, 1]$، پس A یک مجموعه فازی متعادل شهودی است.

تعریف ۱۳ مقدار $\pi_A(u) = 1 - \mu_A(u) - v_A(u)$ را ضریب شهود متعادل عنصر $u \in U$ می‌نامیم.

تعریف ۱۴ مجموعه L^b_* و رابطه‌ی $\le^b_*$ روی آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم (شکل ۳):

$$L^b_* = \{(a, b) \mid (a, b) \in [-1, 1]^2, a + b \in [-1, 1]^2$$

$$(a, b) \le^b_* (c, d) \iff a \le b \& c \ge d \quad \forall (a, b), (c, d) \in L^b_*$$



شکل ۳: مشبکه‌ی L^b_*

قضیه ۶ $(L^b_*, \le^b_*)$ یک مشبکه‌ی کامل است.

توجه کنید که می توان L^b_* را به‌عنوان یک ساختار جبری مانند $(L^b_*, \wedge, \vee)$ در نظر گرفت که بر روی آن عملگر های $\vee$ (اجتماع) و $\wedge$ (اشتراک) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$x \wedge y = (\min(x_1, y_1), \max(x_2, y_2))$$

$$x \vee y = (\max(x_1, y_1), \min(x_2, y_2))$$

اگر $x, y \in L^b_*$.

از این پس یکه های L^b_* را با $1_{L^b_*} = (1, -1)$ و $0_{L^b_*}(-1, 1)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۷ L^b_* کوچکترین شبکه متعادل شامل L_* است.

قضیه ۸ هر مجموعه‌ی فازی شهودی متعادل مانند

$$A(u) = \{(u, \mu_A(u), v_A(u)) | \, u \in U\}$$

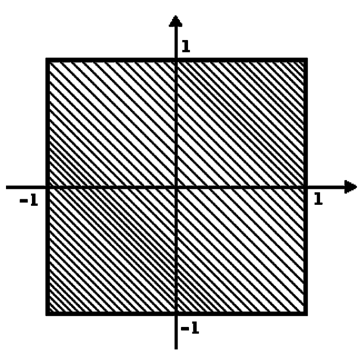
با L^b_* یکریخت است.

بنابراین با بررسی خواص مجموعه های فازی متعادل شهودی، می‌توان خواص L^b_* را به‌دست آورد و با توجه به قضیه ۸ نتیجه گرفت که این خواص برای مجموعه‌های فازی شهودی متعادل نیز برقرار هستند.

تعریف ۱۵ مجموعه $L^b_\square$ و رابطه‌ی $\le^b_\square$ روی آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم (شکل ۴)

$$L^b_\square = [-1, 1]^2$$

$$(a, b) \le^b_\square (c, d) \iff a \le b \& c \ge d \ \ \forall (a, b), (c, d) \in L^b_\square$$



شکل ۴: مشبکه‌ی $L^b_\square$

قضیه ۹ $(L^b_\square, \leq^b_\square)$ یک مشبّکه‌ی کامل است.

یکه‌های $L^b_\square$ را با $1_{L^b_\square} = (1,-1)$ و $0_{L^b_\square} = (-1,1)$ نمایش می‌دهیم.

توجه کنید که می‌توانیم بر روی $L^b_\square$ عملگرهای $\vee$ (اجتماع) و $\wedge$ (اشتراک) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x \wedge y = (\min(x_1,y_1), \max(x_2,y_2))$$

$$x \vee y = (\max(x_1,y_1), \min(x_2,y_2))$$

اگر $x,y \in L^b_\square$.

۵ احتمال بر روی مشبکه‌های L^b_* و $L^b_\square$

در بخش قبل، مشبّکه‌های L^b_* و $L^b_\square$ را تعریف کردیم. اکنون شکل کلی تابع احتمال بر روی آنها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱۶ دو عملگر $\otimes$ و $\oplus$ را بر روی L_* و $L_\square$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2) = (((x_1,x_2)\wedge 1)\vee -1, (y_1+y_2-1)\vee -1)$$

$$(x_1,y_1)\otimes(x_2,y_2) = ((x_1+x_2-1)\vee -1, ((y_1+y_2)\wedge 1)\vee -1),$$

که در آن $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in L^b_*$ یا $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in L^b_\square$ و $\vee = \max$ و $\wedge = \min$.

تعریف ۱۷ یک احتمال بر روی L^b_* تابعی مانند $P : L^b_\square \longrightarrow [0,1]$ است که در سه شرط زیر صدق می‌کند

۱) $P((-1,1)) = 0\ ,\ P((1,-1)) = 1$

۲) $\forall a,b \in L^b_* P(a\oplus b) + P(a\otimes b) = P(a) + P(b)$

۳) $\forall a_n, a \in L^b_*, n \in \square \quad a_n \uparrow a \Longrightarrow P(a_n) \uparrow P(a)$

در شرط ۳ نماد "$a_n \uparrow a$" به این معنا است که a_n یک دنباله‌ی نانزولی در L^b_* است و $a = \vee_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

قضیه ۱۰ فرض کنیم $P : L^b_* \longrightarrow [0,1]$ یک تابع احتمال بر روی L^b_* باشد. در این صورت برای $\alpha = 1 - P((0,0))$ داریم

$$P(x,y) = \begin{cases} \alpha x + (1-\alpha)(1-y) & if\ x,y \in [0,1] \\ (1-\alpha)(1-y) & if \begin{array}{l} x \in [0,1], \\ y \in [0,1] \end{array} \\ \alpha x + (1-\alpha) & if \begin{array}{l} x \in [0,1], \\ y \in [-1,0], \\ x+y \geq 0 \end{array} \\ x + (1-\alpha)(y+2) & if \begin{array}{l} x \in [0,1], \\ y \in [-1,0], \\ x+y \leq 0 \end{array} \\ (1-\alpha)(2+y) & if\ x,y \in [-1,0] \end{cases}$$

که در آن $(x,y) \in L^b_*$.

تعریف ۱۸ یک احتمال بر روی $L^b_\square$ تابعی مانند $P : L^b_\square \longrightarrow [0,1]$ است که در سه شرط زیر صدق می‌کند

۱) $P((-1,1)) = 0\ ,\ P((-1,1)) = 1$

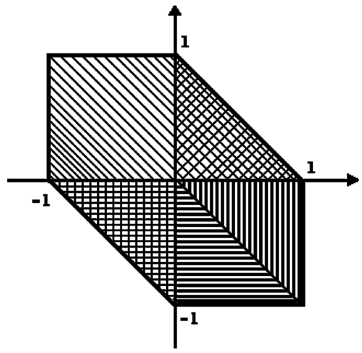
۲) $\forall a,b \in L^b_\square P(a\oplus b) + P(a\otimes b) = P(a) + P(b)$

۳) $\forall a_n, a \in L^b_\square, n \in \square a_n \uparrow a \Longrightarrow P(a_n) \uparrow P(a)$

در شرط ۳ نماد "$a_n \uparrow a$" به این معنا است که a_n یک دنباله‌ی نانزولی در $L^b_\square$ است و $a = \vee_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

قضیه ۱۱ فرض کنیم $P : L^b_\square \longrightarrow [0,1]$ یک تابع احتمال بر روی $L^b_\square$ باشد. در این صورت برای $\alpha = P((1,1))$ داریم

$$P((x,y)) = \begin{cases} \alpha x + (1-\alpha)(1-y) & if\ x,y \in [0,1] \\ (1-\alpha)(1-y) & if \begin{array}{l} x \in [-1,0], \\ y \in [0,1] \end{array} \\ (1-\alpha)(2+y) & if\ x,y \in [-1,0] \\ \alpha x + (1-\alpha)(2+y) & if \begin{array}{l} x \in [0,1], \\ y \in [-1,0] \end{array} \end{cases}$$



شکل ۵: نواحی مشخص شده در قضیه‌ی ۱۰

قضایای ۱۲ و ۱۳ نشان می‌دهند که نتایج به‌دست آمده درباره‌ی توابع احتمال بر روی $L^b_\square$ و $L_\square$، ، تعمیمی از نتایج قبلی (قضایای ۴ و ۵) است.

قضیه ۱۲ تحدید احتمال بر روی $L^b_\square$ به $L_\square$، دقیقا احتمال بر روی $L_\square$ است.

قضیه ۱۳ تحدید احتمال بر روی L^b_* به L_*، دقیقا احتمال بر روی L_* است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، تعمیم جدیدی از مجموعه‌های فازی به‌نام مجموعه‌های فازی متعادل شهودی معرفی شد و بیان شد که این مجموعه‌ها با مشبّکه‌ی کامل L^b_* یکریخت هستند، آن‌گاه احتمال بر روی مشبّکه‌ی L^b_* و در نتیجه بر روی مجموعه‌های فازی فازی متعادل شهودی بررسی گردید و فرمول‌هایی دقیق برای آن به‌دست آمد.

مراجع

[1] Atanassov, K., Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy sets and systems 20 (1986) 87-96.

[2] Atanassov, K., Intuitionistic fuzzy sets, Theory and Applications, Phisica-Verlag(2000)

[3] Birkhoff, G., Lattice theory, Collequium publication Vol. 25, (American Mathematics Society, Providence, RI. 1984), Third Edition.

[4] Deschrijver, G., Kerre, E. E., On the position of intuitionistic fuzzy set theory in the framework of theories modelling imprecion, Information Science 177 (2007) 1860-1866.

[5] Deschrijver, G., Kerre, E.E., On the relationship between some extensions of fuzzy set theory, Fuzzy Sets and Systems 133 (2003) 227-235.

[6] Deschrijver, G., Kerre, E.E., Uninorms in L*-fuzzy set theory, Fuzzy Sets and Systems 148 (2004) 243-262.

[7] Homenda, Wladyslaw, Balanced fuzzy sets . Information science 176 (2006) 2467-2506.

[8] T. Kroupa, T., Conditional Probability on MV-algebra, Fuzzy Sets and Systems 149 (2005) 369-381.

[9] Lendelova, K., Michalikova A., and Riecan B., Representation of probability on triangular, In Issues in Soft Computing - Decisions and Operation Research , O. Hryniewic, J. Kacprzyk and D. Kuchta (Eds.), EXIT, Warsaw, (2005) 235-242.

[10] Lendelova, K.,Riecan, B., The probability on triangular and square, Submitted in Fuzzy Sets and Systems.

[11] Rezaei, H., Fuzzy Logic and its Applications in Artificial Intelligence : Intuition-based Similarity Measures , P.H.D Dissetation , 2006.

[12] zadeh, L. A., Fuzzy sets, Information and control 26(1965) 338-353.