

همگرایی تابع خودکواریانس نمونه‌ای در فرایندهای پایدار متقارن

صفیه محمودی^۱، سارا گرمسیری^۱

چکیده:

در فرایندهای ایستا با واریانس متناهی، تابع خودکواریانس نمونه‌ای^۲ ($SACVF$) و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای^۳ ($SACF$) به تابع خودکواریانس و تابع خودهمبستگی فرایند همگرا هستند. اما در بسیاری از فرایندهای ایستای اکید با توزیع‌های کناری دم‌سنگین و واریانس نامتناهی، در صورتی که تابع خودکواریانس با ضریب $n^{-\frac{1}{\alpha}}$ ، که آن را نرخ همگرایی تابع می‌نامیم تقسیم شود، به متغیر تصادفی پایدار با اندیس پایداری $\frac{\alpha}{4}$ میل می‌کند. در این مقاله همگرایی تابع خودکواریانس نمونه‌ای و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای فرایندهای ایستای α -پایدار متقارن را بررسی می‌کنیم. **واژه‌های کلیدی:** فرایندهای ایستا، تابع خودکواریانس نمونه‌ای، تابع خودهمبستگی نمونه‌ای، توزیع‌های دم‌سنگین، متغیر تصادفی پایدار.

۱ مقدمه

ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x}) \quad |h| < n,$$

و

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)},$$

که $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$ و در حالتی که فرایند دارای واریانس متناهی با میانگین صفر و دنباله ارگودیک باشد، $\hat{\gamma}(h) \xrightarrow{a.s.} Cov(X_0, X_h)$ و همچنین $\hat{\rho}(h) \xrightarrow{a.s.} Corr(X_0, X_h)$ (نماد $\xrightarrow{a.s.}$ به معنای همگرایی با احتمال یک است.) [۲]

ولی در حالتی که واریانس نامتناهی و فرایند دارای توزیع کناری دم‌سنگین باشد تمرکز بر $\overline{X}$ چندان معنی دار

اخیراً توجه بسیاری از آماردانان در آنالیز سری‌های زمانی متوجه داده‌هایی شده است که دارای خواصی مانند وابستگی‌های طولانی مدت، غیر خطی بودن و توزیع کناری دم‌سنگین^۴ هستند. چنین داده‌هایی بسیار زیادند از جمله داده‌های مالی، اقتصادی، مخابراتی و غیره و رفتار این داده‌ها نیز برای آنالیز آنها با سری‌های زمانی دیگر تفاوت‌های عمده‌ای دارد. [۵، ۷، ۸، ۹، ۱۱]

اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ مشاهداتی از فرایند ایستای $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$ با واریانس متناهی باشند، آنگاه تابع خودکواریانس نمونه‌ای و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای به

^۱ دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

^۲ Sample autocovariance

^۳ Sample autocorrelation

^۴ Heavy tail

در بسیاری از فرایندهای با واریانس نامتناهی ثابت شده است که برای تابع به کندی تغییرپذیر^۶ L ، کسر $\frac{\hat{\gamma}_n(h)}{n^{1-2/\alpha}L(n)}$ در توزیع به یک متغیر تصادفی پایدار با اندیس $\alpha/2$ میل می‌کند. میل کردن $\hat{\gamma}_n(h)$ به یک متغیر تصادفی باعث خواهد شد نتوانیم مانند حالتی که واریانس متناهی است از $\hat{\gamma}_n(h)$ برای استنتاجات آماری استفاده کنیم. در این مقاله رفتار حدی $\hat{\gamma}_n(h)$ را در فرایندهای (اکیداً) ایستای $S\alpha S$ (مقارن α -پایدار)، که کلاس بزرگی از فرایندهای ایستای دارای واریانس نامتناهی را شامل می‌شود، بررسی می‌کنیم.

۲ نکاتی در مورد فرایندهای $S\alpha S$

هر فرایند ایستای $S\alpha S$ یا α -پایدار مقارن $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$ دارای نمایشی به فرم $X_t = \int_{\Omega} f_t(\omega) M(d\omega)$ برای $t = 1, 2, \dots$ است که M یک اندازه تصادفی $S\alpha S$ روی Ω با اندازه کنترل m است و $0 < \alpha < 2$ و $\int_{\Omega} |f_t(\omega)|^{\alpha} m(d\omega) < \infty$ و رازینسکی [۱۲] ثابت کرده است که هر فرایند ایستا به فرم بالا را می‌توان به سه قسمت مستقل و منحصر به فرد زیر

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}, \quad (3)$$

تجزیه کرد، که $\{X_t^{(1)}\}$ یک فرایند میانگین متحرک آمیخته^۷، $\{X_t^{(2)}\}$ یک فرایند هارمونیک و $\{X_t^{(3)}\}$ نوع سوم از یک فرایند ایستای پایدار است که نه میانگین

نیست. لذا در فرایند ایستای (اکید) $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$ با توزیع کناری دم‌سنگین، تابع خودکواریانس نمونه‌ای به صورت

$$\hat{\gamma}_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t X_{t+h}, \quad (1)$$

و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\rho}_n(h) = \frac{\hat{\gamma}_n(h)}{\hat{\gamma}_n(0)}. \quad (2)$$

در فرایند ایستا با واریانس متناهی، از تابع خودهمبستگی نمونه‌ای برای برازنده کردن یک مدل $ARMA(p, q)$ مناسب استفاده می‌شود. تابع خودکواریانس نمونه‌ای در فرایندهای ایستا، ابزاری اساسی برای استنتاج و مدلیابی و پیش‌بینی در کلاس L_2 ، یعنی کلاس متغیرهای تصادفی با واریانس متناهی است. اما در صورتی که واریانس نامتناهی باشد چنین نتایجی لزوماً به دست نمی‌آیند. البته در حالتی که $\{X_t\}$ یک فرایند خطی با نوفه‌های مستقل و هم‌توزیع با واریانس نامتناهی باشد، تابع خودکواریانس نمونه‌ای حتی برای داده‌های دم‌سنگین خواص خوبی مانند سازگاری را دارد [۳، ۴]. اما در مدل‌های غیر خطی همیشه چنین خاصیتی برقرار نیست و اغلب سری‌های ایستای دم‌سنگین، غیرخطی هستند. برای مثال دیویس و رزنیک [۵] مثالی از یک سری زمانی دوخطی^۵ مطرح کردند که برای هر $h > 0$ ، $(\hat{\rho}(1), \hat{\rho}(2), \dots, \hat{\rho}(h)) \Rightarrow (W_1, W_2, \dots, W_h)$ که در آن W_i یک متغیر تصادفی غیرتباهیده است. (نماد $\Rightarrow$ به معنای همگرایی در توزیع می‌باشد).

^۵Bilinear

^۶تابع L را به کندی تغییرپذیر گویند هرگاه به ازای هر مقدار مثبت t ،

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$$

^۷Mixing

متحرک و نه هارمونیک است.

قضیه زیر تعمیمی از نتیجه به دست آمده توسط رزینیک و همکاران [۹] است که در آن به بررسی رفتار حدی ACVF و ACF نمونه‌ای در فرایندهای میانگین متحرک آمیخته می‌پردازد.

قضیه ۱ فرض کنید m یک اندازه σ -متناهی روی Ω و λ اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ باشد. اگر

$$0 < \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega, x)|^{\alpha} m(d\omega) \lambda(dx) < \infty$$

و

$$(X_t, t = 1, 2, \dots) = \quad (4)$$

$$\left(\int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega, t+x) M(d\omega, dx), t = 1, 2, \dots \right)$$

که در آن M ، اندازه تصادفی SaS روی $\Omega \times \mathbb{R}$ با اندازه کنترل $m \times \lambda$ یک فرایند میانگین متحرک آمیخته باشد آنگاه برای هر $H \geq 0$

$$(n^{1-2/\alpha} \hat{\gamma}_n(h), h = 0, 1, \dots, H) \Rightarrow$$

$$\left(\left(\frac{C_{\alpha}}{C_{\alpha/2}} \right)^{2/\alpha} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} f(\omega, t+x) \right.$$

$$\left. f(\omega, t+h+x) \tilde{M}(d\omega, dx), h = 0, 1, \dots, H \right)$$

که در آن $\tilde{M}$ اندازه تصادفی $\frac{\alpha}{2}$ -پایدار و اکیداً مثبت روی $\Omega \times (0, 1)$ با اندازه کنترل $m \times \lambda$ و C_{α} مقداری ثابت می‌باشد. (نماد $\Rightarrow$ به معنای همگرایی در توزیع می‌باشد.)

^۸ متغیر X را دارای خاصیت تغییرپذیری منظم گوئیم هرگاه به ازای مقادیر $0 < \alpha < 2$ ، $0 < x P(|X| > x)^{\alpha} < \infty$ نسبت به x یک تابع به کندی تغییرپذیر باشد.

توجه کنید که فرایند $\{X_t\}$ تعریف شده در رابطه (؟؟)، از نوع فرایند $\{X_t^{(1)}\}$ است. در این فرایند تابع خودکواریانس نمونه‌ای با نرخ $n^{2/\alpha-1}$ رشد کرده و در توزیع به یک متغیر تصادفی میل می‌کند. همچنین تابع خودهمبستگی نمونه‌ای این فرایند، همگرایی ضعیف به یک متغیر تصادفی می‌باشد.

چون فرایند $\{X_t^{(2)}\}$ یک فرایند به طور شرطی مرکزی شده است، توابع خودکواریانس و خودهمبستگی نمونه‌ای آن به طور تصادفی کراندار هستند و با احتمال یک، به یک متغیر تصادفی ناتباهیده میل می‌کنند. [۱۴]

در این مقاله به بررسی رفتار حدی تابع خودکواریانس فرایندهای از نوع سوم می‌پردازیم. همچنین برای خلاصه نویسی و نماد گذاری ساده‌تر از این قسمت منظور از فرایند متقارن پایدار $\{X_t\}$ فرایندی از نوع سوم است و $\gamma(h)$ نیز تابع خودهمبستگی این فرایند خواهد بود.

با استفاده از یک زنجیر مارکف بازگشتی پوچ با فضای وضعیت شمارا که در آن زمان بازگشت به یک موقعیت خاص دارای توزیعی با خاصیت تغییرپذیری منظم^۸ است. نشان می‌دهیم فرایند $\{X_t\}$ از نوع سوم را به گونه‌ای می‌توان ساخت که برای مقدار ثابت r و تابع به کندی تغییرپذیر L ، کسر $\frac{\hat{\gamma}_n(h)}{n^r L(n)}$ به یک متغیر تصادفی $\frac{\alpha}{2}$ -پایدار میل کند. بر اساس این که زنجیر مارکف را به چه صورت تعریف کنیم، r در فاصله $(1 - 2/\alpha, 0)$ تغییر می‌کند. نکته جالب این است که در این حالت، ACF نمونه‌ای به مقدار ثابت میل می‌کند.

فرض کنید $\{X_t\}$ یک فرایند SaS به صورت

به طوری که

$$(Y'_n(h), h = 0, 1, \dots, H) \stackrel{d}{=} \left(\int_{\Omega} \sum_{t=1}^n f_t(\omega) \times f_{t+h}(\omega) \tilde{M}(d\omega), h = 0, 1, \dots, H \right), \quad (7)$$

و

$$Y''_n(h) = C_{\alpha/\gamma}^{\gamma/\alpha} \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j \Gamma_i^{-1/\alpha} \Gamma_j^{-1/\alpha} \times \sum_{t=1}^n f_t(V_i) f_{t+h}(V_j) q(V_i)^{-1/\alpha} q(V_j)^{-1/\alpha}.$$

که در آن $\tilde{M}$ اندازه‌ی تصادفی $\frac{\alpha}{\gamma}$ -پایدار اکیدا مثبت روی Ω با اندازه کنترل m است. بنابراین طبق قضیه اسلوتسکی^{۱۱} [۱] برای بررسی همگرایی $\hat{\gamma}_n(h)$ ، کافی است به بررسی همگرایی $Y'_n(h)$ و $Y''_n(h)$ بپردازیم.

با توجه به این که اندازه تصادفی M دارای نمونه‌های مستقل است، در صورتی که در یک زنجیر مارکف $\{S_n\}_{n \geq 0}$ بازگشت به وضعیت اولیه (در اینجا صفر) شانس کمی داشته باشد، تابع f_t را می‌توان به گونه‌ای مرتبط با زنجیر مارکف تعریف کرد که جرم بیشتری در تکیه‌گاه f_t و f_{t+h} روی مجموعه‌های مجزا متمرکز شود و بنابراین وابستگی بین X_t و X_{t+h} کمتر باشد. در واقع سرعت بازگشت $\{S_n\}_{n \geq 0}$ به موقعیت اولیه معادل با قدرت همبستگی فرایند پایدار $\{X_t\}$ می‌باشد و در صورتی که زنجیر مارکف بازگشتی مثبت باشد، وابستگی فرایند پایدار حداکثر می‌شود که در واقع یک فرایند غیر ارگودیک خواهیم داشت. از طرف دیگر در صورتی که زنجیر انتقالی باشد حداقل وابستگی در فرایند پایدار وجود خواهد داشت یعنی یک فرایند پایدار ارگودیک خواهیم

داشت. حال اگر q یک تابع اکیدا مثبت روی Ω باشد به طوری که $\int_{\Omega} q(w) m(dw) = 1$ ، با توجه به این که m یک اندازه‌ی کنترل σ -متناهی است، چنین تابعی همواره وجود دارد. بنابراین با یک تغییر متغیر در این فرایند خواهیم داشت:

$$(X_t, t = 1, 2, \dots) \stackrel{d}{=} \left(\int_{\Omega} f_t(w) q(w)^{(-1/\alpha)} M_0(dw), t = 1, 2, \dots \right)$$

که M_0 یک اندازه‌ی تصادفی $S\alpha S$ با اندازه کنترل m_0 است و برای هر زیرمجموعه‌ی اندازه پذیر A از Ω ، $m_0(A) = \int_A q(w) m(dw)$ می‌باشد. با توجه به اینکه $m_0(\Omega) = 1$ نمایش زیر را برای $\{X_t\}$ داریم:

$$(X_t, t = 1, 2, \dots) \stackrel{d}{=} (C_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} f_t(V_i) q(V_i)^{-\frac{1}{\alpha}}, t = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

که C_{α} مقداری ثابت، $\{\varepsilon_i\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid رادمچر^۹ و $\{\Gamma_i\}$ زمان‌های ورود^{۱۰} در یک فرایند پواسن با نرخ واحد روی $[0, \infty)$ و $\{V_i\}$ متغیرهای iid با توزیع m_0 هستند و سه دنباله‌ی $\{\varepsilon_i\}$ و $\{\Gamma_i\}$ و $\{V_i\}$ مستقل هستند. [۱۴]

رزنیک و همکاران در سال ۱۹۹۹ با استفاده از نمایش سری گون بالا، تابع خودکواریانس نمونه‌ای یک فرایند ایستای $S\alpha S$ را به دو جزء مجزا به صورت زیر تجزیه کردند. یعنی به ازای هر $H \geq 0$ و $n > 0$ ،

$$(n\hat{\gamma}_n(h), h = 0, 1, \dots, H) \stackrel{d}{=} \left(\frac{C_{\alpha}}{C_{\alpha/\gamma}} \right)^{\gamma/\alpha} (Y'_n(h) + Y''_n(h), h = 0, 1, \dots, H), \quad (6)$$

^۹Rademacher
^{۱۰}Arrival times
^{۱۱}Slutsky's theorem

$S\alpha S$ ایستای آمیخته است که در آن M روی Ω اندازه‌ی تصادفی $S\alpha S$ با اندازه‌ی کنترل m است. [۱۳]

حال اگر فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به طوری که $U_{ij}^{(n)}(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{m\alpha\{1, \frac{1}{\alpha}\}}} = \infty$ و همچنین $\sum_{t=1}^n f_t(V_i) f_{t+h}(V_j) q(V_i)^{-1/\alpha} q(V_j)^{-1/\alpha}$ باشد می‌توان ثابت کرد برای هر $i \neq j$ $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left| \frac{U_{ij}^{(n)}(h)}{a_n} \right| = 0$ ، و به ازای هر $h \geq 0$ ،

$$a_n^{-1} Y_n''(h) \xrightarrow{p} 0. \quad (۸)$$

و به ازای هر $h \in \mathbb{Z}_+$ ، اگر فرض کنید $\gamma_i = E_0(f_0 f_i)$ و W متغیر تصادفی اکیداً پایدار با اندیس پایداری $\frac{\alpha}{2}$ باشد آنگاه:

$$\frac{1}{a_n} (Y_n'(\circ), Y_n'(1), \dots, Y_n'(h)) \Rightarrow (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_h) W. \quad (۹)$$

برای اثبات دقیق تمام موارد به مرجع [۱۰] مراجعه شود.

۳ نتیجه اصلی

برای $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \Omega$ ، تابع $\tau_1(\omega) = \min\{n : n > 0, \omega_n = 0\}$ را اولین زمان برخورد به صفر و برای $k > 1$ ، اگر $\tau_{k-1}(\omega) < \infty$ ، $\tau_k(\omega) = \min\{n : n > \tau_{k-1}(\omega), \omega_n = 0\}$ را k مین زمان برخورد به صفر در نظر بگیرید. در صورتی که d دوره‌ی تناوب زنجیر مارکف $\{S_n\}$ باشد، فرض کنید تابع به کندی تغییرپذیر L_0 وجود دارد به طوری که

$$\sum_{k=1}^n P_0[\tau_1 \geq k] = n^\beta L_0(n), \quad (۱۰)$$

فرآیند میانگین متحرک آمیخته ختم خواهد شد. با توجه به اینکه رفتار تابع خود کوواریانس نمونه‌ای یک فرآیند میانگین متحرک آمیخته در قسمت قبل بیان شد، زنجیر را بازگشتی پوچ در نظر می‌گیریم و رفتار تابع خود کوواریانس نمونه‌ای فرایندهای پایدار نظیر یک زنجیر مارکف بازگشتی پوچ را بررسی می‌کنیم.

برای ساختن یک فرایند $S\alpha S$ ایستای وابسته به زنجیر مارکف بازگشتی پوچ، فرض کنید $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_+}$ که $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ و $\{S_n\}_{n \geq 0}$ یک زنجیر مارکف بازگشتی پوچ تحویل‌ناپذیر با فضای وضعیت $\mathbb{Z}$ باشد و فرض کنید به ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ ، P_k تابع توزیع احتمال روی Ω برای زنجیر $\{S_n\}_{n \geq 0}$ با شروع از $S_0 = k$ باشد. همچنین μ یک اندازه‌ی پایا برای $\{S_n\}$ باشد بدین معنا که،

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(\{k\}) P_k[S_1 \in B] = \mu(B), \quad \forall B \subset \mathbb{Z}.$$

با فرض اینکه $\mu\{0\} = 1$ ، اندازه‌ی m را روی Ω برای هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر $A \subset \Omega$ به صورت $m(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k(A) \mu(\{k\})$ تعریف می‌کنیم. تبدیل مکانی θ را به صورتی در نظر می‌گیریم که به ازای هر $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \Omega$ ، $\theta(\omega) = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ ، حافظه‌ی m باشد و تابع حقیقی $f_0 : \Omega \rightarrow R$ را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که

$$0 < \int |f_0(\omega)|^\alpha m(d\omega) < \infty,$$

و

$$f_0(\omega) = f_0(\omega) I_{[\omega_0=0]}.$$

و برای $t = 1, 2, \dots$ ، $f_t(\omega) = f_{t-1}(\theta(\omega))$ ، فرایند $X_t = \int f_t(\omega) M(dw)$ با f_t و m تعریف شده، یک فرایند

برای شبیه‌سازی فرض می‌کنیم که $A = \{0\}$. چون شبیه‌سازی فرایندهای $S_{\alpha S}$ به طور مستقیم کار ساده‌ای نیست از نمایش سری گون این فرایندها که در رابطه (۵) مطرح شد، برای شبیه‌سازی استفاده می‌کنیم.

زنجیر قدم زدن تصادفی متقارن $S_{n+1} = S_n + \xi_n$ که در آن ξ_n ، متغیرهای تصادفی $i.i.d$ با $E\xi_1 = 0$ و $E\xi_1^2 < \infty$ با توزیع آغازین زیر را در نظر بگیرید.

$$p_m = \frac{1}{3} 2^{-|m|}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11)$$

سری زیر را با استفاده از این زنجیر می‌سازیم

$$X_n = \sum_{i=1}^K \varepsilon_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} 2^{\frac{|Y_n^i|}{\alpha}} I_{[Y_n^i=0]}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$ یک دنباله $i.i.d$ از متغیرهای تصادفی رادمچر، $\{\Gamma_i\}_{i \geq 1}$ دنباله‌ای از زمان‌های رسیدن فرایند پواسن با پارامتر یک روی $(0, \infty)$ و $\{Y_n^i, n \in \mathbb{N}\}$ زنجیر قدم زدن تصادفی متقارن $i.i.d$ با توزیع آغازین داده شده در رابطه (۱۱) است و همه فرایندهای مذکور مستقل‌اند. بنابراین تولید داده‌های آنها منجر به شبیه‌سازی فرایند می‌شود. کافی است داده‌های تصادفی نظیر هریک تولید شود و البته فرایند $\{Y_n^1\}$ با توزیع آغازین رابطه (۱۱)، یعنی هربار Y_0^i را به گونه‌ای تولید کنیم که شانس اختیار کردن مقدار m در آن برابر $\frac{1}{3} 2^{-|m|}$ باشد.

برای شبیه‌سازی داده از این سری، $K = 10^5$ و $\alpha = 1/5$ را در نظر گرفته و در هر بار شبیه‌سازی، 1000 داده تولید می‌کنیم. اگر $f_0 = I_{[\omega_0=0]}$ و $\gamma_h = P_0[S_h = 0] = p_h$ باشد آن‌گاه با توجه به قضیه

و $0 < \beta < 1$ یا $\alpha \geq 1$. حال با توجه به تجزیه رازینسکی و همکاران که در رابطه (۶) مطرح شد و قضیه اسلوتسکی برای رفتار حدی دو جزء Y_n' و Y_n'' ، در روابط (۸) و (۹) اثبات قضیه زیر واضح است.

قضیه ۲. اگر $0 < \alpha < 2$ و $0 \leq \beta \leq 1$ و زنجیر مارکف بازگشتی پوچ و تحویل‌ناپذیر $\{S_n\}$ ، در فرض رابطه (۷) صدق کند آنگاه تابع به کندی تغییرپذیر L و متغیر تصادفی $\alpha/2$ -پایدار و اکیداً مثبت W وجود دارند به طوری که به ازای هر $h \in \mathbb{Z}_+$ در صورتی که $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n^{\beta(2/\alpha-1)} L(n)} (\hat{\gamma}_n(0), \hat{\gamma}_n(1), \dots, \hat{\gamma}_n(h)) \Rightarrow W(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_h).$$

و $\hat{\rho}_n(h) \xrightarrow{p} \gamma_h/\gamma_0$ که در آن $\hat{\gamma}_n$ و $\hat{\rho}_n$ تعریف شده در روابط (۱) و (۲) هستند و برای $h = 0, 1, \dots$ $\gamma_i = E_0(f_0 f_i)$ است.

برای اثبات دقیق‌تر مرجع [۱۰] را ملاحظه فرمایید.

۴ شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی از یک فرایند $\{X_t^{(r)}\}$ که توسط یک زنجیر قدم زدن تصادفی متقارن تولید شده است، به طور تجربی به بررسی نتایج بدست آمده در بخش قبل می‌پردازیم و با رسم نمودار تابع خودهمبستگی داده‌های شبیه‌سازی شده، رفتار مجانبی ACF و ACVF نمونه‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرایند ایستای $S_{\alpha S}$ زیر را در نظر بگیرید:

$$X_n = \int_{\mathbb{Z}} I_{[\omega_n \in A]} M(d\omega), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

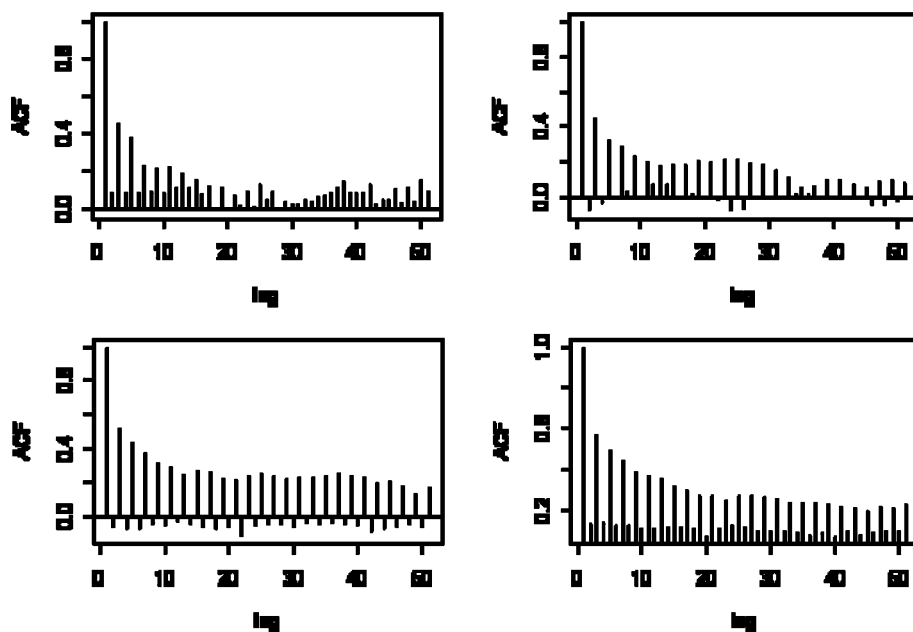
برای n های مختلف از تاخیر ۱ تا ۸ حساب کرده‌ایم و در ردیف آخر هر جدول برای مقایسه، مقدار p_h بدست آمده در رابطه قبل را قرار داده‌ایم. در این جدول مشاهده می‌کنید که با بزرگ شدن n ، میل کردن ACF نمونه‌ای به یک عدد ثابت مشهودتر است در صورتی که ACVF نمونه‌ای در شکل (۲) رفتاری تصادفی از خود نشان می‌دهد.

حد مکانی [۶] برای $h > 0$ ، زمانی که $n \rightarrow \infty$ داریم

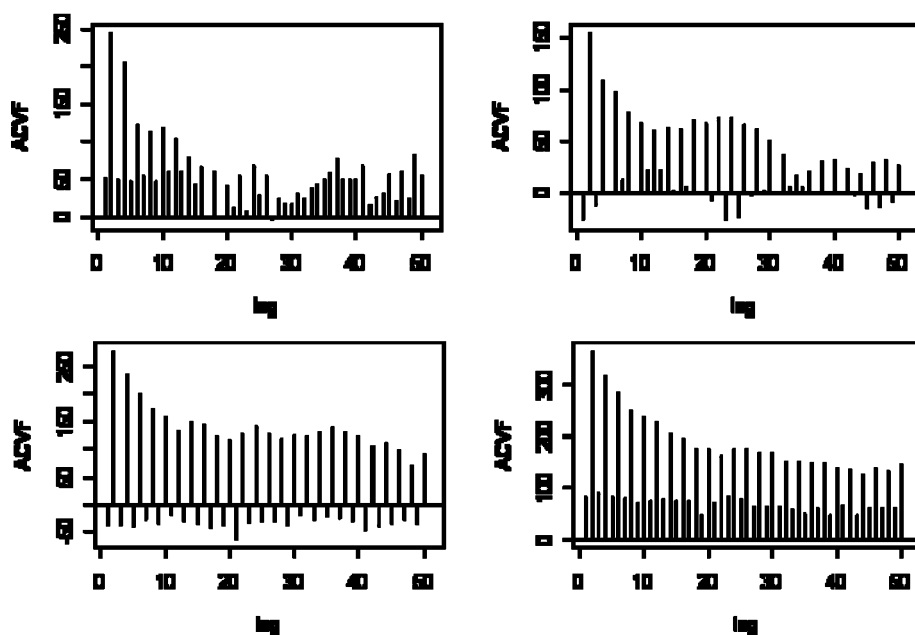
$$\hat{p}_n(h) \xrightarrow{P} p_h = \begin{cases} (h/2)^{-h} & \text{اگر } h \text{ زوج باشد} \\ 0 & \text{اگر } h \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

نمودار و جدول ACF نمونه‌ای این داده‌های شبیه‌سازی شده در شکل (۱) و جدول (۱) و همچنین نمودار ACVF نمونه‌ای آنها در شکل (۲) ارائه شده است.

در جدول (۱) مقدار $\hat{p}_n$ را در هر چهار بار شبیه‌سازی



شکل ۱. نمودار ACF نمونه‌ای برای فرایند $\{X_t^{(2)}\}$ و $n = 1000$



شکل ۲. نمودار ACVF نمونه‌ای برای فرایند $\{X_t^{(r)}\}$ و $n = 1000$

جدول ۱. ACF نمونه‌ای برای فرایند $\{X_t^{(r)}\}$.

lag	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$n = 100$	۰/۰۸۶۲	۰/۱۶۷۰	۰/۰۵۷۰	۰/۲۴۰	۰/۰۱۸۰	۰/۰۱۱	۰/۰۰۹	-۰/۰۴۵
$n = 300$	۰/۰۶۵	۰/۳۲۱	۰/۰۴۲	۰/۲۹۳	۰/۰۲۱	۰/۰۹۰	۰/۰۳۹	۰/۰۸۴
$n = 500$	۰/۱۳۳	۰/۳۶۵	۰/۱۲۶	۰/۳۲	۰/۱۰۲	۰/۱۵۷	۰/۱	۰/۱۷۱
$n = 700$	۰/۱۱۱	۰/۴۴۹	۰/۱۱۲	۰/۳۸	۰/۱۰۳	۰/۲۳۳	۰/۱۱۳	۰/۲۱۹
$n = 900$	۰/۰۶۹	۰/۴۵۳	۰/۰۹۷	۰/۳۸۱	۰/۰۹۳	۰/۲۲۸	۰/۱۰۶	۰/۲۲
$n = 1000$	۰/۰۹۴	۰/۴۵۵	۰/۰۹۴	۰/۳۸۲	۰/۰۸۸	۰/۲۲۹	۰/۱۰۲	۰/۲۱
p_h	۰	۰/۵	۰	۰/۳۷۵	۰	۰/۳۱۲	۰	۰/۲۷۳

lag	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$n = 100$	۰/۰۳۷	۰/۴۳۰	۰/۱۴۲۰	۰/۲۲۳	۰/۲۰۱۰	۰/۲۷۶۰	۰/۲۰۸۰	۰/۳۰۸۰
$n = 300$	-۰/۰۴۶	۰/۴۱۶	۰/۰۱۲	۰/۲۵۶	۰/۰۶۶	۰/۲۹	۰/۰۹۱	۰/۲۴۴
$n = 500$	-۰/۰۵	۰/۴۱۲	۰/۰۱۴	۰/۲۵۵	۰/۰۵۲	۰/۲۷۳	۰/۰۸۵	۰/۲۲۷
$n = 700$	-۰/۰۳۴	۰/۴۳۴	۰/۰۲۱	۰/۲۹۱	۰/۰۶۶	۰/۲۷۳	۰/۱۱۹	۰/۲۰۶
$n = 900$	-۰/۰۵۳	۰/۴۴	۰	۰/۳۰۴	۰/۰۳۳	۰/۲۷۵	۰/۰۷۹	۰/۲۱۳
$n = 1000$	-۰/۰۷۷	۰/۴۵۵	-۰/۰۳	۰/۳۲۱	۰	۰/۲۸۸	۰/۰۴۱	۰/۲۳۲
p_h	۰	۰/۵	۰	۰/۳۷۵	۰	۰/۳۱۲	۰	۰/۲۷۳

lag	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$n = 100$	-۰/۱۷	۰/۲۹۳	-۰/۱۷۱	۰/۲۷۷	-۰/۰۹۷	۰/۱۵۹	۰/۰۴۱	۰/۰۹۴۰
$n = 300$	-۰/۱۰۵	۰/۵۰۹	-۰/۱۳۵	۰/۴۵۶	-۰/۱۰۵	۰/۳۴	-۰/۰۲۹	۰/۲۹۹
$n = 500$	-۰/۰۸۹	۰/۴۹۵	-۰/۱۲۱	۰/۴۵۵	-۰/۱۰۱	۰/۳۷۱	-۰/۰۵۴	۰/۳۰۹
$n = 700$	-۰/۰۷۴	۰/۴۹۲	-۰/۰۸۸	۰/۴۱۹	-۰/۰۸۴	۰/۳۲۹	-۰/۰۶۲	۰/۲۸
$n = 900$	-۰/۰۷	۰/۴۹۵	-۰/۰۷۵	۰/۴۲	-۰/۰۷۶	۰/۳۳۵	۰/۰۵۶	۰/۲۸۴
$n = 1000$	-۰/۰۷۱	۰/۵۱۸	-۰/۰۷۴	۰/۴۲۹	۰/۰۷۵	۰/۳۷۲	-۰/۰۵۱	۰/۳۲۱
p_h	۰	۰/۵	۰	۰/۳۷۵	۰	۰/۳۱۲	۰	۰/۲۷۳

ادامه جدول ۱

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	lag
۰/۳۸۷۰	۰/۲۸۱۰	۰/۴۳۷۰	۰/۳۲۸۰	۰/۴۵۲۰	۰/۴۲۱۰	۰/۴۳۳۰	۰/۲۹۹۰	$n = ۱۰۰$
۰/۴۰۱	۰/۲۶۶	۰/۴۵۶	۰/۲۳۲	۰/۴۹۳	۰/۲۷۵	۰/۵۴۶	۰/۲۱۲	$n = ۳۰۰$
۰/۴۲	۰/۱۶۱	۰/۴۷۵	۰/۱۵۳	۰/۵۲۱	۰/۱۷۴	۰/۵۸	۰/۱۴۳	$n = ۵۰۰$
۰/۳۹۸	۰/۱۳۴	۰/۴۵۱	۰/۱۳۷	۰/۵	۰/۱۵۷	۰/۵۷۵	۰/۱۴	$n = ۷۰۰$
۰/۴	۰/۱۲۸	۰/۴۵۲	۰/۱۳۲	۰/۵۰۲	۰/۱۴۵	۰/۵۷۷	۰/۱۳۳	$n = ۹۰۰$
۰/۳۹۲	۰/۱۲۹	۰/۴۴۷	۰/۱۳۳	۰/۴۹۷	۰/۱۴۵	۰/۵۷۵	۰/۱۳۵	$n = ۱۰۰۰$
۰/۲۷۳	۰	۰/۳۱۲	۰	۰/۳۷۵	۰	۰/۵	۰	p_h

مراجع

- [1] Billingsley, P. (1995), *Probability and Measure*, 3rd Ed., Wiley, New York.
- [2] Brockwell, P. and Davis, R. (1991), *Time Series: Theory and Methods*, 2nd Ed., Springer, New York.
- [3] Davis, R. and Resnick, S. (1985), Limit theory for moving average of random variables with regularly varying tail probabilities, *Annual Probability*, 13, 179-195.
- [4] Davis, R. and Resnick, S. (1986), Limite theory for the sample covariance and correlation functions of moving averages, *Annual Statistics*, 14, 533-558.
- [5] Davis, R. and Resnick, S. (1996), Limite theory for bilinear processes with heavy tailed noise, *Annual Applied Probability*, 6, 1191-1210.
- [6] Durrett, R. (1996), *Probability: Theory and Examples*, 2nd Ed., Duxbury Press, Belmont.
- [7] Feigin, P. and Resnik, S. (1999), Pitfalls of fitting autoregressive models with emphasis on heavy-tailed time series, *Extremes*, 1, 391-422.
- [8] Resnick, S. (1998), Why non-linearities can ruin the heavy tailed modelers day, In: Adler, R., Feldman, R., Taquq, M. (Eds.), *A Practical Guide To Heavy Tails: Statistical Techniques for Analyzing Heavy Tailed Distribution*, Birkhauser, Boston.
- [9] Resnick, S., Samorodnitsky, G. and Xue, F. (1999), *How misleading can sample acf's of stable MA's be? (very)*, Technical Report 1209, Department of Operations Research and Industrial

- Engineering, Cornell University. Available at <http://www.orie.cornell.edu/trlist/trlist.html> as TR1209.ps.Z; *ann. App. Probab.*, 9, no,3.
- [10] Resnick, S., Samorodnitsky, G. and Xue, F. (2000), Growth rates of sample covariances of stationary symmetric alpha-stable processes associated with null recurrent Markov chains, *stochastic processes and Application*, 85, 321-339.
- [11] Resnick, S. and Van Den Berg, E. (1999), Sample correlation behavior for the heavy tailed general bilinear process, Technical Report 1210, Department of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Available at <http://www.orie.cornell.edu/trlist/trlist.html> as TR1209.ps.Z; *ann. App. Probab.*, 9, no, 3.
- [12] Rosinski, J. (1997), Structure of stationary stable process, In: Alder. R., Feldman. R., Taqqu. M. (Eds), *A Practical Guide To Heavy Tails: Statistical Techniques for Analyzing Heavy Tailed Distribution*, Birkhauser, Boston.
- [13] Rosinski, J. and Samorodnitsky, G. (1996), Classes of mixing stable process, *Bernoulli*, 2, 365-377.
- [14] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. (1994), *Stable Non-Gaussian Random Process, Stochastic Modeling*, chapman and Hall, New York.