نگاه بیزی به برآوردگرهای کلاسیک توزیع نمایی تعمیم یافته

اکبر اصغرزاده [۱] ، رزا رضایی [۲]

چکیده:

در این مقاله، ارتباط بین برآوردگرهای بیز[۳] و برآوردگرهای کلاسیک [۴] پارامتر شکل توزیع نمایی تعمیم یافته[۵] بررسی و نشان داده می‌شود که برآوردگرهای کلاسیک را می‌توان با انتخاب مقادیر مناسبی برای پارامترهای توزیع پیشین از روی برآوردگرهای بیز محاسبه کرد. برآوردگرهای کلاسیک از لحاظ میانگین مربع خطا مقایسه می‌شوند. به منظور مقایسه برآوردگرهای بیز و کلاسیک یک مطالعه شبیه سازی انجام می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع نمایی تعمیم یافته، برآورد MLE، برآورد UMVUE، برآورد بیز، توزیع پیشین، برآورد فاصله ای.

۱ مقدمه

توزیع نمایی تعمیم یافته دارای تابع چگالی

$$f(x;\alpha)=\alpha(1-e^{-x})^{\alpha-1}e^{-x} \quad x>0,\alpha>0 \quad (1)$$

و تابع توزیع[۶]

$$F(x;\alpha)=(1-e^{-x})^{\alpha} \quad x>0,\alpha>0 \quad (2)$$

می‌باشد که در آن α پارامتر شکل[۷] است. توزیع نمایی تعمیم یافته[۸] که در مدل‌های طول عمر به‌کار می‌رود، اخیراً مورد توجه آماردانان زیادی قرار گرفته است. گوپتا و کاندو [۲] با مطالعه خواص نظری توزیع نمایی تعمیم یافته نشان دادند که این توزیع در برخی حالات بهتر از توزیع‌های گاما و وایبل به داده‌ها برازش می‌شوند. برای مطالعه بیشتر روی ویژگی‌های این توزیع و برآورد پارامترهای آن می توان به منابع [۲و۳] مراجعه کرد.

در این مقاله، برآورد پارامتر α از دو روش کلاسیک و بیزی مورد بررسی قرار گرفته است. نشان داده می شود که برآوردگرهای کلاسیک را می‌توان از برآوردگرهای بیز به‌دست آورد.

۲ برآوردگرهای کلاسیک

در میان برآوردگرهای کلاسیک α، برآورد درستنمایی ماکزیمم[۹] (MLE) پارامتر α حائز اهمیت می‌باشد. بر

---

[۱] گروه آمار دانشگاه مازندران
[۲] گروه آمار دانشگاه مازندران
[۳] Bayes estimator
[۴] Classical estimator
[۵] Generalized exponential distribution
[۶] Distribution function
[۷] Shape
[۸] Density function
[۹] Maximum likelihood estimate

اساس یک نمونه n تایی $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ از چگالی (۱) تابع درستنمایی نمونه عبارت است از:

$$L(\alpha) = \alpha^n e^{-\sum_{i=1}^n x_i}[\prod_{i=1}^n (1 - e^{-x_i})]^{\alpha-1}$$

بنابراین لگاریتم تابع درستنمایی نمونه می‌شود:

$$l(\alpha) = n\ln(\alpha) + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-x_i}) - \sum_{i=1}^n x_i$$

از این‌رو معادله به‌صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-x_i}) = 0$$

بنابراین برآوردMLE پارامترα می‌شود:

$$\hat{\alpha}_{MLE} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-X_i})}$$

اینک برآوردگر نااریب با کمترین واریانس[10] (UMVUE) به طور یک نواخت پارامترα را به‌دست می آوریم. چون خانواده چگالی‌های (۱) به خانواده نمایی تعلق دارند، بنابراین آماره $T = -\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-X_i})$ یک آماره بسنده کامل برایα می‌باشد. به راحتی می‌توان نشان داد که آماره T دارای توزیع گامای$\Gamma(n, \frac{1}{\alpha})$ با چگالی $g(t) = \frac{\alpha^n}{\Gamma(\alpha)} t^{n-1} e^{-\alpha t}, t > 0, \alpha > 0$ می‌باشد. بنابراین

$$E_\alpha(\frac{1}{T}) = \frac{\alpha}{n-1}$$

از این‌رو برآوردگر

$$\hat{\alpha}_{UMVUE} = \frac{n-1}{T}$$

یک UMVUE برای α است.

در کلاس برآوردگرهایی به فرم $\frac{c}{T}$ می‌توان برآوردگر کمترین میانگین مربع خطا[11] (Min MSE) را پیدا کرد. برای این منظور داریم:

$$MSE_\alpha(\frac{c}{T}) = E[(\frac{c}{T} - \alpha)^2] = Var(\frac{c}{T}) - [E(\frac{c}{T}) - \alpha]^2$$

از آنجایی‌که $E(T^r) = \frac{\Gamma(n+r)}{\alpha^r \Gamma(n)}, n + r > 0$، لذا

$$E(\frac{c}{T}) = cE(T^{-1}) = c\alpha\frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{c\alpha}{n-1}$$

و

$$Var(\frac{c}{T}) = c^2 Var(t^{-1}) = c^2 \frac{\alpha^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} MSE_\alpha(\frac{c}{T}) &= \frac{c^2\alpha^2}{(n-1)^2(n-2)} + \alpha^2(\frac{c}{n-1} - 1)^2 \\ &= g(c). \end{aligned} \tag{۳}$$

با مشتق‌گیری از$g(c)$ داریم:

$$\begin{aligned} \acute{g}(c) &= \frac{2c\alpha^2}{(n-1)^2(n-2)} + 2\alpha^2(\frac{c}{n-1} - 1)(\frac{1}{n-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

که نتیجه می شود $c = n - 2$. بنابراین برآوردگر کمترین میانگین مربع خطا عبارت است از:

$$\hat{\alpha}_{MinMSE} = \frac{(n-2)}{T}$$

به کمک رابطه (۳)، میانگین مربع خطای برآوردگرهای کلاسیک به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$MSE_\alpha(\hat{\alpha}_{MLE}) = \frac{n+2}{(n-1)(n-2)}\alpha^2$$

$$MSE_\alpha(\hat{\alpha}_{UMVUE}) = \frac{\alpha^2}{n-2}$$

$$MSE_\alpha(\hat{\alpha}_{MinMSE}) = \frac{\alpha^2}{n-1}$$

[10] Uniformly minimum variance unbiased estimator
[11] Minimum mean squared error

به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$\begin{aligned} MSE_\alpha(\hat{\alpha}_{MinMSE}) &< MSE_\alpha(\hat{\alpha}_{UMVUE}) \\ &< MSE_\alpha(\hat{\alpha}_{MLE}) \end{aligned}$$

۳ برآوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای بیزی

در این بخش برآورد پارامتر α را با استفاده از روش بیز به‌دست می آوریم. برآوردگرهای بیزی که از یک توزیع پیشین [۱۲] به‌دست می آیند را می‌توان برای بدست آوردن برآوردگرهای کلاسیک استفاده کرد. روش بدست آوردن برآوردگرهای کلاسیک از برآوردگر بیز روشی جدید نیست. رسمن و همکاران [٦] و الفسی و راینک [۱] روابط بین برآوردگرهای بیز و برآوردگرهای کلاسیک را به‌ترتیب برای توزیع یکنواخت پیوسته و توزیع نمایی مورد مطالعه قرار دادند.

در این بخش توزیع پسین [۱۳] را با استفاده از توزیع پیشین ناسره [۱۴] برای پارامتر α به‌دست می آوریم. فرض کنید توزیع پیشین ناسره ($\int_0^\infty \pi(\alpha)d\alpha = \infty$) برای α به‌صورت زیر باشد:

$$\pi(\alpha) = \alpha^{\gamma-1}exp(-\beta\alpha); \alpha > 0, -\infty < \gamma < \infty, \beta > 0$$

توجه داشته باشید که این توزیع پیشین هنگامی‌که $\gamma > 0$ باشد، هسته توزیع گاما می‌باشد. هر چند چنین محدودیتی روی γ لازم نیست زیرا این محدودیت انعطاف پذیری برآوردگر حاصل را کاهش می‌دهد. با توجه به این‌که

$$\pi(\alpha|\underline{x}) \propto L(\alpha)\pi(\alpha) \qquad (۴)$$

توزیع پسین α به‌صورت زیر به‌دست می آید:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha|\underline{x}) &\propto \alpha^{\gamma-1}exp(-\beta\alpha)\alpha^n[\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-x_i})]^{\alpha-1} \\ &\propto \alpha^{n+\gamma-1}exp(-\beta\alpha)exp[\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln(1-e^{-x_i})] \\ &\propto \alpha^{n+\gamma-1}exp[-\alpha(\beta+t)]. \end{aligned}$$

که $t = -\sum_{i=1}^{n}\ln(1-e^{-x_i})$. اگر $n+\gamma > 0$ باشد در آن‌صورت توزیع پسین یک توزیع واقعی گاما خواهد بود یعنی $\alpha|\underline{x} \sim \Gamma(n+\gamma, \frac{1}{\beta+t})$. در این حالت برآوردگر بیز α تحت تابع زیان درجه دو می‌شود میانگین توزیع پسین یعنی:

$$\hat{\alpha}_{BYS} = \frac{n+\gamma}{\beta+T}.$$

برآوردگرهای کلاسیکی که در بخش قبل به‌دست آوردیم را می توان از برآوردگر بیز به‌دست آورد. برای این کار کافی است که مقادیر مختلفی را برای γ و β قرار دهیم. به‌طور مثال اگر $\gamma = 0$ و $\beta = 0$ باشد برآوردگر MLE به‌دست می آید در این حالت چگالی پیشین می شود $\pi(\alpha) \propto \frac{1}{\alpha}$ که به چگالی پیشین جفریز [۱۵] معروف می‌باشد. برای اطلاعات بیشتر در مورد توزیع پیشین جفریز می توان به لهمن و کاسلا [۵] مراجعه کرد.

[۱۲] Prior Distribution
[۱۳] Posterior distribution
[۱۴] Improper prior distribution
[۱۵] Jeffreys Prior

اگر $\gamma = -1$ و $\beta = 0$ باشد برآوردگر UMVUE به‌دست می‌آید و اگر $\gamma = -2$ و $\beta = 0$ باشد برآوردگر کمترین مربعات یعنی به‌دست می‌آید. اگر $\gamma = 1$ و $\beta = 0$ باشد تابع چگالی، پیشین ناسره تخت[16] یعنی $\pi(\alpha) \propto 1$ به‌دست می‌آید. در این حالت برآوردگر $\frac{n+1}{T}$ حاصل می‌شود.

همچنین یک فاصله اطمینان [17] $100(1-\tau)\%$ برای پارامتر α را می توان با به‌دست آوردن L و U به‌طوری که $p(L < \alpha < U) = 1 - \tau$ پیدا کرد. بر اساس یک نمونه n تایی از توزیع $GE(\alpha)$ چون $T \sim \Gamma(n, \frac{1}{\alpha})$ لذا $2\alpha T \sim \chi^2(2n)$ بنابراین:

$$P[\chi^2_{2n}(1 - \frac{\tau}{2}) < 2\alpha T < \chi^2_{2n}(\frac{\tau}{2})] = 1 - \tau$$

یا

$$P[\frac{\chi^2_{2n}(1 - \frac{\tau}{2})}{2T} < \alpha < \frac{\chi^2_{2n}(\frac{\tau}{2})}{2T}] = 1 - \tau$$

بنابراین فاصله اطمینان کلاسیک $100(1-\tau)\%$ برای α به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$[\frac{\chi^2_{2n}(1 - \frac{\tau}{2})}{-2\sum_{i=1}^{n}\ln(1 - e^{-X_i})}, \frac{\chi^2_{2n}(\frac{\tau}{2})}{-2\sum_{i=1}^{n}\ln(1 - e^{-X_i})}]$$

فاصله $(L(\underline{x}), U(\underline{x}))$ یک فاصله اطمینان بیزی [18] $100(1-\tau)\%$ برای پارامتر α می باشد اگر

$$P(L(\underline{x}) < \alpha < U(\underline{x})) = \int_{L(\underline{x})}^{U(\underline{x})} \pi(\alpha|\underline{x}) d\alpha = 1 - \tau.$$

با توجه به این‌که $\alpha|\underline{x} \sim \Gamma(n + \gamma, \frac{1}{\beta + T})$ بنابر این $2\alpha(\beta + T)$ دارای توزیع کای دو با $2(\gamma + n)$ درجه آزادی است بنابراین:

$$P[\frac{\chi^2_{2(\gamma+n)}(1 - \frac{\tau}{2})}{2(\beta + T)} < \alpha < \frac{\chi^2_{2(\gamma+n)}(\frac{\tau}{2})}{2(\beta + T)}] = 1 - \tau$$

بنابراین فاصله اطمینان بیزی $100(1-\tau)\%$ برای پارامتر α عبارت است از (L, U) که

$$L = \frac{\chi^2_{2(\gamma+n)}(1 - \frac{\tau}{2})}{2(\beta - \sum_{i=1}^{n}\ln(1 - e^{-X_i}))}$$

و

$$U = \frac{\chi^2_{2(\gamma+n)}(\frac{\tau}{2})}{2(\beta - \sum_{i=1}^{n}\ln(1 - e^{-X_i}))}]$$

می‌باشد. اگر $\gamma = 0$ و $\beta = 0$ باشد آن‌گاه فاصله اطمینان بیزی و فاصله اطمینان کلاسیک برابر می‌شوند.

۴ محاسبات عددی

به کمک نرم افزار SPLUS یک نمونه $n = 20$ تایی از توزیع نمایی تعمیم یافته با پارامتر $\alpha = 2$ تولید شده و برای مقادیر مختلف γ و β، برآورد و فاصله اطمینان بیزی ۹۵٪ برای این نمونه محاسبه شده‌اند. نمونه $n = 20$ تایی به‌صورت زیر می‌باشد:

۱/۸٦٦، ۴/۰۹۴، ۰/۸٦۷، ۲/۹۲٦، ۲/۱۴۷، ۰/۴۰۹، ۰/۵۸۷، ۰/۲٦۳، ۲/۰۳۱، ۳/۱٦۹، ۰/۱۱۱، ۳/۰۷۷، ۳/۳۱۳، ۱/۲۱۴، ۱/۱۸۳، ۰/۲۹۱، ۰/۱۵۹، ۳/۷٦٦، ۱/۲۷۸، ۱/٦۸٦.

برای این داده‌ها نتایج در جدول زیر آمده است.

[16] Flate improper prior
[17] Confidence interval
[18] Credibility interval

جدول ۱. برآورد و فاصله اطمینان بیزی برای مقادیر داده شده (γ و β).

γ	β	برآورد بیز	برآورد نظیر کلاسیک	فاصله اطمینان بیز ۹۵٪
$-$۲	۰	۱/۵۸۴	$MinMSE$	(۰/۹۳۹،۲/۳۹۵)
$-$۱	۰	۱/۶۷۲	$UMVUE$	(۱/۰۰۷،۲/۵۰۳)
$-$۱	۱	۱/۵۳۷		(۰/۹۲۵،۲/۳۰۱)
$-$۱	۲	۱/۴۲۲		(۰/۸۵۶،۲/۱۲۹)
$-$۱	۳	۱/۳۲۳		(۰/۷۹۶،۱/۹۸۰)
۰	۰	۱/۷۶۰	MLE	(۱/۰۷۵،۲/۶۱۱)
۱	۱	۱/۶۹۸		(۱/۰۵۱،۲/۴۹۸)
۱	۰	۱/۸۴۸		(۱/۱۴۴،۲/۷۱۸)

۱.۴ شبیه سازی عددی

همان‌طوری‌که اشاره شد، تحت توزیع پیشین واقعی

$$\pi(\alpha)=\frac{\beta^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)}\alpha^{\gamma-1}e^{-\beta\alpha};\alpha>0,\gamma>0,\beta>0$$

برآوردگر بیز تحت تابع زیان درجه دو می‌شود $\hat{\alpha}_{BYS}=\frac{n+\gamma}{\beta+T}$.

محاسبه میانگین مربع خطا این برآوردگر ساده نمی‌باشد، بدین علت به منظور مقایسه برآوردگر بیز با برآوردگرهای کلاسیک MLE، UMVUE و Min MSE یک مطالعه شبیه سازی به صورت زیر انجام می‌شود:

۱) برای مقادیر داده شده γ و β، پارامتر α از توزیع پیشین فوق تولید شده و بر اساس آن، نمونه‌های n تایی از توزیع نمایی تعمیم یافته با پارامتر α تولید می شوند.

۲) با توجه به نمونه‌های تولید شده، برآورد بیز و برآوردهای کلاسیک پارامتر α محاسبه می‌شوند.

۳) برای نمونه‌های n تایی مختلف توان‌های دوم خطای $(\hat{\alpha}-\alpha)^2$ که $\hat{\alpha}$ یک برآورد (BYS، MLE، UMVUE و Min MSE) پارامتر α است محاسبه می‌شوند.

۴)مراحل بالا را ۱۰۰۰۰ مرتبه تکرار کرده و معدل مقادیر برآوردها و نیز MSE ها را محاسبه می‌کنیم. نتایج شبیه سازی در جداول ۲ و ۳ خلاصه شده‌اند.

جدول ۲. معدل مقادیر برآوردها و MSE برای مقادیر مختلف n (وقتی‌که $\gamma=1$ و $\beta=1$).

n	$criteria$	$\hat{\alpha}_{MLE}$	$\hat{\alpha}_{UMVUE}$	$\hat{\alpha}_{MinMSE}$	$\hat{\alpha}_{BYS}$
۵	Estimated Value	۱/۲۵۸۰	۱/۰۰۶۴	۰/۷۵۴۸	۱/۰۰۴۱
	MSE	۱/۱۳۳۳	۰/۶۴۳۲	۰/۴۸۲۸	۰/۲۷۰۷
۱۰	Estimated Value	۱/۰۹۲۴	۰/۹۸۳۱	۰/۸۷۳۹	۰/۹۸۳۸
	MSE	۰/۳۰۶۷	۰/۲۳۲۹	۰/۲۱۳۵	۰/۱۶۹۰
۱۵	Estimated Value	۱/۰۶۹۷	۰/۹۹۸۴	۰/۹۲۷۰	۰/۹۹۳۷
	MSE	۰/۱۸۶۱	۰/۱۵۱۶	۰/۱۳۹۱	۰/۱۱۳۳

همان‌طوری‌که مشاهده می‌شود با افزایش n، مقدار MSE برآوردها کاهش پیدا می‌کند. در جداول ۲ و ۳ برآوردگر بیز دارای کمترین MSE می‌باشند. همچنین مشاهده می‌شود که برای مقادیر پارامترهای توزیع پیشین، برآوردگر بیز بهتر از برآوردگرهای کلاسیک می‌باشد.

جدول ۳. معدل مقادیر برآوردها و MSE برای مقادیر مختلف n (وقتی‌که ۲ = γ و ۳ = β).

n	*criteria*	$\hat{\alpha}_{MLE}$	$\hat{\alpha}_{UMVUE}$	$\hat{\alpha}_{MinMSE}$	$\hat{\alpha}_{BYS}$
۵	Estimated Value	۰/۸۵۳۰	۰/٦۸۲۴	۰/۵۱۱۸	۰/٦۷۲۹
	MSE	۰/۴۲۴۴	۰/۲۳۹۵	۰/۱۷۳۳	۰/۰۸۵۷
۱۰	Estimated Value	۰/۷۳۸٦	۰/٦٦۴۷	۰/۵۹۰۹	۰/٦٦۵۷
	MSE	۰/۱۱۳۸	۰/۰۸٦۸	۰/۰۷۸۲	۰/۰۵۲۲
۱۵	Estimated Value	۰/۷۱۵۲	۰/٦٦۷۵	۰/٦۱۹۸	۰/٦٦۷۳
	MSE	۰/۰٦۳۲	۰/۰۵۲۸	۰/۰۴۹۷	۰/۰۳۹۷

مراجع

[1] Elfessi, A. and Reineke, D. M. (2001), A Bayesian Look at Classical Estimation: The Exponential Distribution, *Journal of Statistics Education*, 9(1), 1-7.

[2] Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999a), Generalized Exponential Distribution, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 41(2), 173-188.

[3] Gupta, R. D. and Kundu, D. (2000), Generalized Exponential Distribution: Different Method of Estimator, *J. Statist. Comput. Simul.*, Vol.00, 1-22.

[4] Gupta, R. D. and Kundu, D. (2008), Generalized Exponential Distribution: Bayesian estimations, *Comput Stat and Data Analys*, 4, 1873-1883.

[5] Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998),*Theory of Point Estimation.*

[6] Rossman, A. J., Short, T. H. and Parks, M. T. (1998), Bayes Estimators for the Continuous Uniform Distribution, *Journal of Statistics Education*, 6(3), 1-7.