کنکاش بیشتر در احتمال شرطی

علیرضا نعمت اللهی [۱] ، امین قلمفرسای مستوفی [۲]

چکیده:

پارادوکس‌هایی که در محاسبه احتمال شرطی رخ می‌دهند، معمولاً ناشی از انتخاب نامناسب فضای احتمال و عدم توجه به اطلاعات شرطی است. در مقاله حاضر طبیعت کلی این قبیل پارادوکس با ارائه چند مثال توصیف می‌شود.

واژه‌های کلیدی: احتمال شرطی، فضای احتمال، پارادوکس زندانبان، پارادوکس مسابقه.

۱ مقدمه

در بسیاری موارد، برداشت نادرست از یک آزمایش تصادفی و عدم توجه به فضای احتمال مناسب، مشکلاتی در تعبیر احتمال شرطی ایجاد می‌کند .ممکن است اطلاعات جانبی در مورد برخی از پیشامد ها از یک مکانیسم تصادفی به دست آمده باشد که بایستی آن را در تعیین فضای احتمال در نظر گرفت. در حالت کلی برای محاسبه احتمال شرطی بهتر است اطلاعات جانبی را در قالب یک میدان سیگما [۳] بیان کنیم.

در این مقاله خواهیم دید که چگونه با تعیین میدان سیگمایی و فضای احتمال مناسب، می‌توان برای پارادوکس‌های موجود در احتمال شرطی، که در آمار و احتمال پیشینه‌ای طولانی دارند [۱]، پاسخ‌های مناسب ارائه نمود. ابتدا در بخش دوم، شیوه ساختن فضای احتمال مناسب را برای بررسی مسایل مربوط به احتمال شرطی معرفی می‌کنیم. بخش سوم به ارائه چند مثال در احتمال شرطی و کاربرد مطالب بخش دوم اختصاص دارد. در بخش چهارم، مثال‌هایی از پارادوکس معروف بورل ارائه می‌دهیم و تلاش می‌کنیم با استفاده از تعبیر احتمال شرطی به شرط میدان سیگمایی، پاسخی مناسب برای این پارادوکس ها ارائه نمائیم.

۲ تعیین فضای احتمال مناسب

فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر بگیرید که در آن Ω فضای نمونه یک آزمایش تصادفی، $\mathcal{F}$ یک میدان سیگمایی در Ω و P یک اندازه احتمال با دامنه $\mathcal{F}$ باشد. اگر $A \in \mathcal{F}$، آن‌گاه $P(A)$ به‌عنوان احتمال رخ دادن پیشامد A تعبیر می‌شود. یعنی احتمال آنکه ω به‌عنوان نتیجه آزمایش تصادفی،

---

[۱] بخش آمار، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

[۲] بخش آمار، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

[۳] $\sigma - field$

در A قرار داشته باشد. اگر بدانیم که ω در مجموعه اندازه‌پذیر دیگری مانند B قرار دارد، احتمال شرطی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A|B) = \frac{P\left(A \bigcap B\right)}{P(B)}, \qquad P(B) > 0 \tag{1}$$

در متون کلاسیک اگر $P(B) = 0$ باشد، احتمال شرطی A را تعریف نمی‌کنند. بدیهی است که $P(B) = 0$ به معنای غیرممکن بودن پیشامد B نیست (هر چند واضح است که عکس این مطلب همواره درست است، یعنی اگر B محال باشد آن‌گاه $P(B) = 0$ است) و اطلاع جانبی در مورد نتیجه آزمایش ($\omega \in B$)، منجر به تغییر احتمال وقوع پیشامد A خواهد شد. رخ دادن پیشامد B به معنای عدم وقوع B^c است و در واقع از رخ دادن یا رخ ندادن پیشامدهای میدان سیگمایی $\sigma\left(\{B\}\right) = \{B, B^c, \Omega, \phi\}$ اطلاع خواهیم داشت.

در برخی از مثال‌ها به‌ویژه زمانی که $P(B) = 0$، رابطه (۱) برای محاسبه و تفسیر احتمال شرطی مناسب نیست. از این‌رو در احتمال پیشرفته، احتمال شرطی روی یک میدان سیگمایی مانند $\mathcal{G}$ $(\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F})$ تعریف می‌شود و آن را با $P(A \parallel \mathcal{G})_\omega$ نشان می‌دهند. $P(A \parallel \mathcal{G})_\omega$ بنا به تعریف یک متغیر تصادفی با ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱) $P(A \parallel \mathcal{G})_\omega$ نسبت به P انتگرال پذیر و نسبت به $\mathcal{G}$ اندازه پذیر است.

۲) برای هر $G \in \mathcal{G}$

$$\int_G P(A \parallel \mathcal{G})_\omega dP(\omega) = P(A \cap \mathcal{G})$$

در حالت خاص که $\mathcal{G} = \sigma(\{B_1, B_2, \dots\})$ به طوری‌که B_i ها تشکیل یک افراز اندازه پذیر برای Ω بدهند، می‌توان نشان داد که

$$P(A \parallel \mathcal{G})_\omega = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) I_{B_i}(\omega) \qquad w.p.1 \tag{2}$$

واضح است که اگر $\omega \in B_i$ (پیشامد B_i رخ دهد) احتمال شرطی A، برابر $P(A|B_i)$ خواهد بود. اگر $P(B_i) = 0$ باشد $P(A||\mathcal{G})$ را برای $\omega \in B_i$ برابر یک مقدار مثبت کوچکتر یا مساوی یک تعریف می‌کنند.

قدر یک فضای احتمال، با تعریف متغیرهای تصادفی و تعیین توزیع احتمال آنها، الگویی مناسب برای محاسبه احتمال پیشامدها بدست می آید. فرض کنید X یک متغیر تصادفی در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد و بخواهیم احتمال وقوع پیشامد A را به شرط دانستن مقدار X محاسبه کنیم. اگر پیشامد $X^{-1}(x_0) = \{X = x_0\}$ رخ دهد، آن‌گاه برای هر مجموعه بورل H، $X^{-1}(H)$، زمانی رخ می‌دهد که $x_0 \in H$. بنابراین از وقوع یا عدم وقوع پیشامدهای میدان سیگمایی تولید شده از X، یعنی $\sigma(X) = \{X^{-1}(H), H \in \mathbb{R}^1\}$ اطلاع خواهیم داشت و می‌توانیم به‌جای $P(A|X = x_0)$از $P(A|\sigma(X))_\omega$ استفاده کنیم.

۳ پارادوکس‌هایی در احتمال شرطی

در مثال‌های زیر می‌بینیم که با در نظر گرفتن تفاوت فضای احتمال واقعی با فضای احتمال متعارف و تعریف میدان سیگمایی مناسب پارادکس‌های موجود برطرف می‌شوند.

مثال ۱ از بین سه زندانی به نامهای a،b وc دو نفر به تصادف برای اعدام انتخاب می‌شوند[۱] .زندانی c از نگهبان زندان می‌پرسد که از بین a و bکدامیک اعدام خواهند شد؟ وی در توجیه سوال خود اضافه می کند که چون در مورد دو نفر دیگر صحبت می کند، در مورد اعدام خودش اطلاعی از نگهبان نخواسته است. نگهبان این استدلال را منطقی می‌یابد و اظهار می‌دارد که قرار است a اعدام شود. با شنیدن این پاسخ c متوجه می‌شود که نفر بعد یا خودش و یا b خواهد بود. پس شانس اعدام او از $\frac{۲}{۳}$ به $\frac{۱}{۲}$ کاهش می یابد. اکنون آزمایش تصادفی انتخاب دو نفر برای اعدام را در نظر بگیرید. فضای احتمال این آزمایش تصادفی به صورت زیر می‌باشد:

$$\Omega = \{ab, ac, bc\} \qquad \mathcal{F} = ۲^{\Omega}$$
$$P(\{ab\}) = P(\{ac\}) = P(\{bc\}) = \frac{۱}{۳}$$

احتمال اعدام c به شرط آنکه بدانیم a اعدام می‌شود، برابر است با:

$$P(\{ac, bc\} | \{ab, ac\}) = \frac{۱}{۲}$$

در واقع شخص c، احتمال شرطی اعدام خود را با این روش محاسبه نموده است. اما اطلاع از اعدامa ، از پاسخ نگهبان به دست آمده است که می تواند خود نتیجه یک مکانیسم تصادفی باشد.

فرض کنید که اگر a و b برای اعدام انتخاب شده باشند، پاسخ نگهبان با احتمال p فرد a و با احتمال $۱-p$ فرد b باشد. واضح است که اگر c برای اعدام انتخاب شوند، پاسخ نگهبان با احتمال یک فرد دیگر خواهد بود. بنابراین فضای نمونه و میدان سیگمایی زیر مناسب می‌باشد:

$$\Omega^* = \{aba, abb, aca, bcb\} \qquad , \mathcal{F}^* = ۲^{\Omega^*}$$

برای مثال aba به این معناست که a وb برای اعدام انتخاب شوند و جواب نگهبان فرد a باشد تابع احتمال P^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P^*(\{aba\}) = \frac{۱}{۳}p \quad P^*(\{abb\}) = \frac{۱}{۳}(۱-p)$$
$$P^*(\{aca\}) = \frac{۱}{۳} \qquad P^*(\{bcb\}) = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین P تحدیدP^* روی Ω می‌باشد. فرض کنید $E_۱$ و $E_۲$ به ترتیب پیشامد معرفی a و b توسط نگهبان و F پیشامد اعدام فرد c است .میدان سیگمایی مربوط به پاسخ نگهبان به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{G} = \{E_۱, E_۲, \Omega, \phi\}, \qquad E_۱ = \{aba, aca\},$$
$$E_۲ = \{abb, bcb\}$$

با استفاده از رابطه (۲) به آسانی می‌توان نشان داد که:

$$P(F||\mathcal{G})_\omega = \begin{cases} P(F|E_۱) & \omega \in E_۱ \\ P(F|E_۲) & \omega \in E_۲ \end{cases} = \begin{cases} \frac{۱}{۱+p} & \omega \in E_۱ \\ \frac{۱}{۲-p} & \omega \in E_۲ \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، محاسبه احتمال شرطی به p بستگی دارد. اگر نگهبان برای پاسخگویی تبعیضی قائل نشود (یعنی $p = \frac{۱}{۲}$)، احتمال مورد نظر $\frac{۲}{۳}$ خواهد بود. زیرا به هر حال از افراد a و b یک نفر اعدام خواهد شد و دانستن نام یکی از آنها در احتمال اعدام c که از ابتدا $\frac{۲}{۳}$ بوده است، تغییری ایجاد نمی‌کند. اما اگر $p = ۱$، این احتمال از $\frac{۲}{۳}$ به $\frac{۱}{۲}$ کاهش می‌یابد و با استدلال فرد c تناقضی ایجاد نمی‌شود.

مساله پارادوکس زندانبان به صورت‌های دیگر نیز مطرح شده است. هنگامی‌که وس ساوانت [۴] در شماره دسامبر سال ۱۹۹۰ مجله پرید[۵] جواب درست مسأله را بازگو نمود، مورد انتقاد سه ریاضیدان قرار گرفت. وی در شماره فوریه ۱۹۹۱ همان مجله می نویسد که نزدیک به ۲۰۰۰ نامه دریافت کرده است که ۹۲٪ کل خوانندگان و ۶۵٪ آن‌هایی که تحصیلات دانشگاهی داشته‌اند، نظری برخلاف او عنوان کرده‌اند. دوموآور عقیده دارد که طرح مسائلی از این قبیل که تفاوت بین واقعیات را از آنچه موجه به نظر می رسد، روشن می‌کنند، در ارائه استدلال خوب مفید می‌باشند [۳].

مثال ۲ در یک مسابقه شرکت کننده های a و b حضور دارند. دو پاکت سربسته شامل جوایز نقدی موجود است که مبلغ درون یکی از آنها دو برابر دیگری می‌باشد. اما از ظاهر پاکت‌ها مشخص نیست که کدامیک شامل جایزه بیشتر است. به هرکدام از شرکت کننده‌ها به تصادف یک پاکت تعلق می گیرد، قبل از باز شدن پاکت‌ها از a سوال می‌شود که آیا حاضر است پاکت خود را با شخص b معاوضه کند؟ او به این امر راضی است و پیش خود استدلال می کند که اگر مبلغ درون پاکت xباشد، پس از معاوضه پاکت‌ها جایزه یکی از مقادیر $\frac{x}{۲}$ یا $۲x$ با احتمال‌های $\frac{۱}{۲}$ خواهد بود .بنابراین به‌طور متوسط مبلغ جایزه برابر است با:

$$(\frac{x}{۲} \times \frac{۱}{۲}) + (۲x \times \frac{۱}{۲}) = \frac{۵}{۴}x$$

به بیان دیگر درآمد a به‌طور متوسط ۲۵ درصد افزایش می یابد. از طرفی شرکت کننده b نیز همین استدلال را در مورد جایزه خود دارد و به معاوضه راضی می شود. در مرحله بعد چون هنوز پاکت‌ها باز نشده اند، احتمال تعلق جایزه کوچکتر به a، همچنان $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین a و b با همان استدلال قبل می توانند معاوضه را تکرار کنند و هر بار جایزه را به طور متوسط ۲۵ درصد افزایش دهند. از طرفی اگر تعداد دفعات تعویض، عددی زوج باشد، جایزه شخص a همان مبلغ اولیه x

[۴] Vos Savant
[۵] (Parade Magazine)

خواهد بود. این تناقض را نیز می‌توانیم با تعیین فضای احتمال برطرف کنیم. فرض کنید برآمد ω_1 دریافت جایزه کوچکتر توسط a و ω_2 دریافت جایزه بزرگتر توسط وی باشد. این شرکت کننده فضای احتمال زیر را برای استدلال خود انتخاب کرده است:

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\} \quad , \quad \mathcal{F}=\{\{\omega_1\},\{\omega_2\},\Omega,\phi\}$$
$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\frac{1}{2}$$

و سپس در مورد مقدار جوایز اظهارنظر می کند. درحالی که مبلغ جایزه کوچکتر از دید شرکت کننده‌ها مجهول و خود نتیجه یک مکانیسم تصادفی، یا در واقع یک متغیر تصادفی می باشد .اما در پیشامدهای میدان سیگمایی اطلاعی در مورد مقدار جوایز وجود ندارد.

فضای نمونه مناسب برای این آزمایش تصادفی به صورت زیر می‌باشد:

$$\Omega^*=\{(y,2y),(2y,y)\,|y>0\}$$

که برای هر دوتایی موجود در Ω^* ، مولفه اول مقدار جایزه شخص a و مولفه دوم مقدار جایزه شخصb می‌باشد. فرض کنید متغیر تصادفی Y مبلغ جایزه کوچکتر و متغیر تصادفی X، مقدار جایزه ای باشد که a دریافت می کند. با استفاده از فرمول بیز داریم:

$$P(Y=x\,|X=x)=\frac{P(Y=x)}{P(Y=x)+P(Y=\frac{x}{2})}$$

که این مقدار برخلاف استدلال شرکت کننده‌ها، لزوما $\frac{1}{2}$ نیست و به توزیع احتمال Y بستگی دارد .اگر Z مبلغ جایزه a پس از معاوضه باشد، داریم:

$$E(Z\,|X=x)=(\frac{x}{2}\times\frac{P(Y=\frac{x}{2})}{P(Y=x)+P(Y=\frac{x}{2})})$$
$$+(2x\times\frac{P(Y=x)}{P(Y=x)+P(Y=\frac{x}{2})})$$

اگر برای هر x داشته باشیم> $P(Y=\frac{x}{2})$ $2P(Y=x)$پس از معاوضه پاکتها، جایزه شرکت کننده a به طور متوسط بیشتر خواهد شد.

۴ پارادوکس بورل

فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی پیوسته در فضای احتمال (Ω,F,P) باشند. در متون کلاسیک احتمال، برای محاسبه احتمال پیشامد$X_2\in A$ به شرط دانستن مقدار X_1، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$P(X_2\in A|X_1=x_1)=\int_A f(x_2\,|x_1)dx_2 \quad (3)$$

که $f(.|x_1)$ چگالی X_2 به شرط $X_1=x_1$ می‌باشد. اما با توجه رابطه $P(X_1=x_1)=0$ نمی‌توان از رابطه (۱) استفاده نمود. استفاده از رابطه (۳) در حالتی که $P(X_1=x_1)=0$ باشد منجر به بروز پارادوکسی بنام پارادوکس بورل می‌گردد. برای توجیه این می‌توان میدان سیگمایی تولید شده از X_1 را در نظر گرفت و $P(X_2\in A|\sigma(X_1))_\omega$ را به دست آورد. در مثال‌های زیر که مواردی از پارادوکس بورل می‌باشند، این مطلب را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳ فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 مستقل از یکدیگر و دارای توزیع نمایی با

میانگین یک باشند. پیشامد $A=\{X_1=X_2\}$ را در نظر گرفته و متغیرهای تصادفی Z_2, Z_1 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Z_1=\frac{X_1}{X_2} \qquad , \qquad Z_2=X_1-X_2$$

آنگاه $A=\{Z_1=1\}=\{Z_2=0\}$، اما می توان نشان داد:

$$\begin{cases} X_1+X_2\,|Z_1=1 \sim Gamma(2,1) \\ X_1+X_2\,|Z_2=0 \sim Exp(1) \end{cases} \tag{4}$$

که تناقضی در تعبیر چگالی شرطی با استفاده از رابطه (۳) می‌باشد. همان طور که قبلا نیز اشاره کردیم، دانستن مقدار Z_1 معادل با اطلاع از وقوع یا عدم وقوع پیشامدهای $\sigma(Z_1)$ و دانستن مقدار Z_2 ، معادل با اطلاع از وقوع یا عدم وقوع پیشامدهای $\sigma(Z_1)$ می‌باشد. از آن‌جایی که نمی‌توانیم Z_2 را به صورت تابعی از Z_1 بیان کنیم، Z_2 نسبت به $\sigma(Z_1)$ اندازه پذیر نیست [۱]. بنابراین یک مجموعه بورل H می‌توان پیدا کرد که $Z_2^{-1}H \notin \sigma Z_1$ ، در نتیجه $\sigma(Z_1)\neq\sigma(Z_2)$ و اطلاعات موجود در Z_1, Z_2 متفاوت است و نباید انتظار داشت که محاسبه احتمال شرطی روی هر کدام به نتایج یکسانی منجر شود. به این ترتیب تناقض موجود برطرف می‌شود.

مثال ۴ نقطه‌ای به تصادف درون نیمدایره شکل ۱ به شعاع یک و مرکز مبدا مختصات انتخاب میکنیم. فرض کنید متغیرهای تصادفی R,Θ,Y,X به ترتیب طول، عرض، زاویه با محور افقی و فاصله تا مرکز نیمدایره باشند. آنگاه می‌توان نشان داد:

$$f(r\,|\theta)=2r\ \ I_{[0,1]}(r)$$
$$f(y|x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,I_{[0,1]}(y)\,I_{[0,1]}(x^2+y^2) \tag{5}$$

که در آن $I_{[x,y]}(z)=1$ اگر $z\in[x,y]$ و در غیر این صورت صفر خواهد بود. بنابراین با استفاده از رابطه (۳) داریم:

$$P(Y>\frac{1}{2}|\Theta=\frac{\pi}{2})=P(R\sin\Theta>\frac{1}{2}|\Theta=\frac{\pi}{2})$$
$$=P(R>\frac{1}{2})=\frac{3}{4} \tag{6}$$
$$P(Y>\frac{1}{2}|X=0)=\frac{1}{2} \tag{7}$$

از طرفی $\{\Theta=\frac{\pi}{2}\}=\{X=0\}$ ، پس چرا محاسبه احتمال پیشامد $\{Y>\frac{1}{2}\}$ به شرط رخ دادن هر کدام، به نتایج متفاوتی منجر می‌شود؟

در اینجا نیز چون Θ, X تابعی از یکدیگر نمی‌باشند، میدان سیگمایی تولید شده از آنها یکسان نیست. بنابراین هر چند به ظاهر دو پیشامد $\{X=0\}$, $\{\Theta=\frac{\pi}{2}\}$ معادل هستند، اما چون احتمال هر کدام برابر صفر است، برای تعبیر احتمال شرطی نباید از رابطه (۳) استفاده کرد. در واقع اطلاعات موجود در X و Θ متفاوت است و اگر احتمال شرطی $\{Y>\frac{1}{2}\}$ را روی $\sigma(\Theta),\sigma(X)$ محاسبه کنیم، نتایج زیر به دست می آیند:

$$P(Y>\frac{1}{2}||\sigma\,(\Theta))=(1-\frac{1}{4\sin^2\Theta})$$
$$\times I_{[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]}\,(\Theta) \tag{8}$$
$$P(Y>\frac{1}{2}||\sigma(X))=\frac{\frac{1}{2}-X^2}{\sqrt{1-X^2}}\,I_{[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]}(X) \tag{9}$$

مثال ۵ (بیلینگسلی [۱]) نقطه‌ای به تصادف روی سطح یک کره انتخاب می‌شود. برای تعیین موقعیت این نقطه ، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

ابتدا نیمدایره $(\pi, \circ)$ را روی خط استوا در نظر می‌گیریم. محل برخورد این نیمدایره را با دایره عظیمه‌ای که از قطبین کره عبور می‌کند و شامل نقطه انتخابی است، مشخص می‌کنیم. کمان به دست آمده روی نیمدایره را طول جغرافیای نقطه انتخاب شده نامیده و با Θ نشان می‌دهیم . بنابراین طول جغرافیایی در فاصله $(\circ, \pi)$ قرار دارد. از طرفی تمام نقاطی که روی یک دایره عظیمه گذرنده از قطبین کره قرار دارند، دارای طول جغرافیایی یکسان می‌باشند.

حال اگر نقطه انتخاب شده را به مرکز کره وصل کنیم، زاویه‌ای را که با صفحه گذرنده از خط استوا می‌سازد، عرض جغرافیایی می‌نامیم و با Φ نشان می‌دهیم. عرض جغرافیایی در فاصله $[-\pi, \pi]$ قرار دارد. می توان نشان داد که Φ وΘ متغیرهای تصادفی مستقل با توابع چگالی زیر می‌باشند:

$$f_\Phi(\phi) = \frac{|\cos\,\phi|}{۴} \quad ; \ -\pi < \phi < \pi \qquad (۱۰)$$

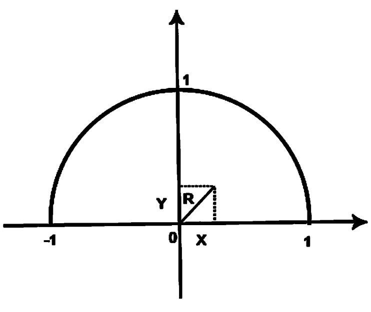
$$f_\Theta(\theta) = \frac{۱}{\pi} \quad ; \ \circ < \theta < \pi \qquad (۱۱)$$

بنابراین

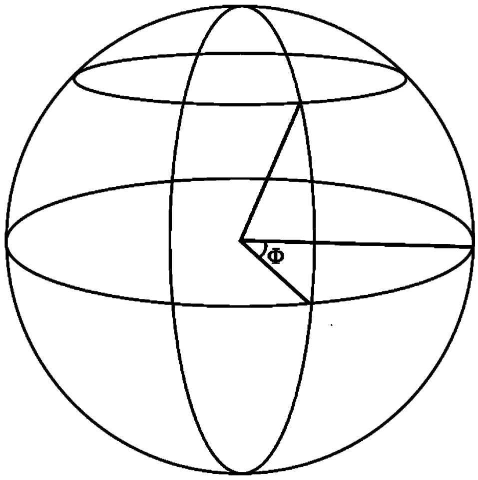
$$P(\Phi \le \phi | \Theta = \theta_\circ) = \int_{-\pi}^{\phi} \frac{|\cos t|}{۴} dt \qquad (۱۲)$$

$$P(\Theta \le \theta | \Phi = \circ) = \int_{\circ}^{\theta} \frac{۱}{\pi} dt \qquad (۱۳)$$

اگر پیشامد $\Theta = \theta_\circ$ رخ دهد، نقطه روی یکی از دوایر عظیمه کره که از قطبین می گذرد، قرار دارد. از طرفی پیشامد $\Phi = \circ$ به معنای آنست که نقطه روی خط استوا می‌باشد. از آنجایی که دوایر عظیمه کره غیر قابل تشخیص هستند و خط استوا نیز یکی از این دوایر محسوب می‌شود، اطلاع از وقوع هر کدام از این دو پیشامد، معادل است با اینکه نقطه روی کدام دایره قرار دارد. بنابراین انتظار داریم که توزیع احتمال روی هر کدام از این دوایر یکسان باشد. اما روابط (۱۲) و (۱۳) با این تعبیر در تضاد می‌باشند. در اینجا نیز مانند مثال قبل رابطه (۳) برای تعبیر احتمال شرطی مناسب نمی‌باشد. زیرا احتمال پیشامدهای $\Theta = \theta_\circ$ و $\Phi = \circ$ برابر صفر است. بنابراین برای استفاده از اطلاعات موجود در Θ و Φ باید از میدان سیگمایی تولید شده توسط آنها برای محاسبه و تعبیر احتمال شرطی استفاده کنیم. اگر پیشامد $\Theta = \theta_\circ$ رخ دهد، نقطه روی یک دایره گذرنده از قطبین کره قرار دارد. اما نقاط موجود روی این دایره دارای عرض جغرافیایی متفاوت هستند، بنابراین Φ تابعی از Θ نیست و نسبت به $\sigma(\Theta)$ اندازه پذیر نمی‌باشد. در نتیجه $\sigma(\Phi) \neq \sigma(\Theta)$ و اطلاعات موجود در Φ, Θ یکسان نیست. از این رو تفاوت میان روابط (۱۲) و



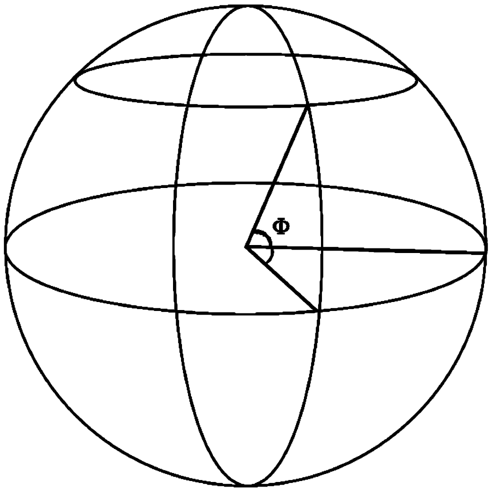
شکل ۱.



شکل ۲. طول جغرافیایی

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله با تعیین میدان سیگمایی و فضای احتمال مناسب، پاسخ‌های مناسب برای چند پارادوکس مهم در احتمال شرطی نظیر پارادوکس‌های زندانبان، مسابقه، بورل و... ارائه شد. در این راستا از تعبیر احتمال شرطی به شرط میدان سیگمایی استفاده گردید.



شکل ۳. عرض جغرافیایی

۶ قدردانی

از سردبیر و داور محترم مقاله به‌خاطر نقطه نظرات ارزشمند در بهبود ساختار مقاله تشکر و قدردانی می‌شود.

مراجع

[1] Billingsley, P. (1995), *Probability and Measure*, 3rd edition, Wiley, New York.

[2] Brams, S.J. and Kilgour, D.M. (1995), The box problem; To switch or not to switch, *Mathematics Magazine*, 68(1), 24-29.

[3] Ghahramani, S. (1996), *Fundamentals of Probability*, Prentice Hall.

[4] Rao, M.M. (1988), *Paradoxes in conditional probability*, Journal of Multivariate Analysis, 27, 424-446.

[5] Snell, J.L. and Vanderbei, R. (1995), *Three Bewitching Paradoxes, Topics in Contemporary Probability and Its Applications*, CRC Press, Boca Raton.