مقایسه روش‌های آزمون کردن میانگین مشترک برای چند جامعه نرمال چند متغیره

علی اکبر جعفری [۱]

چکیده:

در این مقاله، برخی از روش‌های آزمون کردن بردار میانگین مشترک چند جامعه نرمال چند متغیره با ماتریس‌های کوواریانس مجهول و نابرابر را معرفی و توان این آزمون‌ها را با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. سپس در پایان با یک مثال شبیه‌سازی، توان آزمون‌ها را مقایسه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: توزیع نرمال چند متغیره، میانگین مشترک، ماتریس کوواریانس، شبیه‌سازی.

۱ مقدمه

یکی از مسائل قدیمی و مورد علاقه در آمار، استنباط درباره بردار میانگین مشترک چندین جامعه چند متغیره با ماتریس‌های کوواریانس مجهول و نابرابر می‌باشد. این مسأله زمانی که نمونه‌های مختلف، از مطالعات گوناگون و یا با استفاده از وسایل مختلف جمع آوری می‌شوند، حاصل می‌گردد. هنگامی که نمونه‌های جمع آوری شده از مطالعات مستقل، دارای توزیع نرمال چند متغیره با یک میانگین مشترک و ماتریس‌های کوواریانس مجهول باشند، مسأله مورد علاقه، ترکیب آمار توصیفی هر کدام از نمونه‌ها برای برآورد و آزمون بردار میانگین مشترک می‌باشد.

فرض کنید k جامعه نرمال p متغیره با میانگین مشترک μ و ماتریس‌های کوواریانس مجهول $\Sigma_1,...,\Sigma_k$ موجود باشند و توزیع i امین جامعه با $N_p(\mu,\Sigma_i),\ \ i=1,...,k$ نمایش داده شود. همچنین فرض کنید $X_{i1},...,X_{in_i}$ یک نمونه تصادفی از $N_p(\mu,\Sigma_i),\ \ i=1,...,k$ می‌باشد. بردار میانگین نمونه‌ای، $\bar{X}_i$، و ماتریس کوواریانس نمونه‌ای، S_i، برای i امین جامعه به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{X}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}$$

$$S_i=\frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)(X_{ij}-\bar{X}_i)'$$

و $\bar{X}_i$ و S_i از یکدیگر مستقل هستند و

$$\bar{X}_i\sim N_p(\mu,\frac{\Sigma_i}{n_i})$$

$$A_i=(n_i-1)S_i\sim W_p(n_i-1,\Sigma_i)$$

که در آن $\mathrm{W}_p(v,\Sigma)$ نمایشگر توزیع ویشارت p بعدی با v درجه آزادی و ماتریس Σ می‌باشد.

[۱] دانشگاه یزد، دانشکده علوم، بخش آمار و دانشجوی دکتری دانشگاه شیراز

متذکر می‌شویم که میانگین‌های نمونه‌ای و ماتریس‌های کوواریانس نمونه‌ای آماره‌های بسنده مینیمال هستند. مساله میانگین مشترک در بسیاری از مقاله‌های آماری مورد توجه قرار گرفته است .در حالت یک متغیره ($p = ۱$) مثال‌های عملی توسط [۲ و ۱۲] ارائه شده است. برای مطالعه بیشتر در این مورد می‌توان به [۳، ٦ و ۹] مراجعه کرد.

در حالت چند متغیره، [۱] خواص برآوردگر پیشنهادی خود

$$\hat{\mu}_{GD} = \left(\sum_{i=۱}^{k} n_i S_i^{-۱}\right)^{-۱} \sum_{j=۱}^{k} n_j S_j^{-۱} \bar{X}_j \quad (۱)$$

را مورد بررسی قرار داده است. برخی نتایج در مورد برآورد نقطه‌ای μ توسط [۸ و ۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. [۱۵] چندین آزمون ترکیبی برای آزمـــون کردن بردار میانگین مشترک ارائه کرده است. [۵] یک ناحیه اطمینان برای μ بدست آوردند. [۷] پنج آزمون را بر اساس توان‌های آنها، با شبیه سازی مونت کارلو با یکدیگر مقایسه کردند. [۱۰] با استفاده از مفاهیم مقدار احتمال تعمیم یافته و فاصله اطمینان تعمیم یافته یک کمیت محوری تعمیم یافته ارائه کردند و یک ناحیه اطمینان تعمیم‌یافته و مقدار احتمال تعمیم یافته برای μ را به دست آورده است.

در این مقاله برخی روش‌های آزمون کردن میانگین مشترک k جامعه مستقل را تحت نابرابری ماتریس کوواریانس مورد بحث قرار می‌دهیم.

در بخش دوم این مقاله، روش‌های موجود برای آزمون کردن بردار میانگین مشترک را معرفی می‌کنیم. در بخش سوم با یک مثال هر یک از این روش‌ها را مورد بررسی قرار داده و توان‌های هر یک از این آزمون‌ها را، در بخش چهارم با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

۲ آزمون‌هایی برای μ

آزمون فرض

$$H_۰ : \mu = \mu_۰ \quad \text{در مقابل} \quad H_۱ : \mu \neq \mu_۰ \quad (۲)$$

که در آن $\mu_۰$ یک بردار مشخص می‌باشد، را در نظر بگیرید. بسیاری از نویسندگان آزمون کردن این فرض را بر اساس $\bar{X}_i$ و S_i مورد توجه قرار داده‌اند. آنها با استفاده از روش‌های مختلف و ترکیب کردن مقادیر بردارهای میانگین و ماتریس‌های کوواریانس این فرض را مورد آزمون قرار داده‌اند .یکی از مشکلات موجود در انجام این آزمون، وجود پارامترهای مزاحم $\Sigma_۱, ..., \Sigma_k$ می‌باشد.

بر اساس i امین نمونه، آماره $T^۲$ هتلینگ به صورت زیر می‌باشد:

$$T_i^۲ = n_i(\bar{X}_i - \mu_۰)' S_i^{-۱} (\bar{X}_i - \mu_۰)$$
$$T_i^۲ \sim \frac{p(n_i - ۱)}{n_i - p} F_{p, n_i - p} \quad (۳)$$

که در آن $F_{m,n}$ نشان دهنده توزیع F با درجه آزادی m و n می‌باشد.

فرض کنید مقدار مشاهده شده آماره $T_i^۲$ برابر با $T_{i۰}^۲$ باشد اگر P_i، مقدار احتمال بر اساس $T_i^۲$

هتلینگ، $i = ۱, ..., k$ باشد یعنی

$$P_i = P\left(F_{p,n_i-p} > \frac{n_i - p}{p(n_i - ۱)} T^{۲}_{i\circ}\right), \quad i = ۱, ..., k. \qquad (۴)$$

روش معمول مبتنی بر در نظر گرفتن فرض تساوی ماتریس‌های کوواریانس است. آزمون فیشر و آزمون‌های زو و ماتیو [۱۵] با ترکیب کردن مقادیر احتمال در رابطه (۴)، فرض (۲) را آزمون می‌کنند. روش‌های گریبیل و دیل، و جردن و کریشنامورتی [۴ و ۵] مقادیر $T_i^{۲}$ هتلینگ را با یک متوسط میانگین ترکیب می‌کنند، روش لین و همکاران [۱۰] در آن کمیت‌های محوری تعمیم یافته بر اساس هر نمونه ترکیب شده را در نظر می‌گیرند. در ادامه روش‌های مذکور را توضیح می‌دهیم.

۱.۲ روش معمول

عموماً برای سادگی فرض می‌شود که ماتریس‌های کوواریانس همگن می‌باشند و آزمون $T^{۲}$ هتلینگ مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنید $\Sigma_۱ = ... = \Sigma_k = \Sigma$ آنگاه برآورد μ و ماتریس کوواریانس ادغام شده به‌صورت

$$\hat{\mu}_{cla} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} n_i \bar{X}_i}{N} \quad , \quad S = \frac{\sum_{i=۱}^{k}(n_i - ۱)S_i}{N - k}$$

می‌باشد که در آن $N = \sum_{i=۱}^{k} n_i$ بنابراین $T^{۲} = N(\hat{\mu}_{cla} - \mu_\circ)' S^{-۱}(\hat{\mu}_{cla} - \mu_\circ)$ که

$$T^{۲} \sim \frac{p(N-k)}{N-k-p+۱} F_{p,\, N-k-p+۱}.$$

فرض صفر در سطح α زمانی رد می‌شود اگر

$$T^{۲} > \frac{p(N-k)}{N-k-p+۱} F_{p,\, N-k-p+۱}(۱-\alpha)$$

که در آن $F_{p,q}(۱-\alpha)$ صدک ۱۰۰α ام برای توزیع F با درجات آزادی m و n است.

۲.۲ آزمون فیشر

آزمون ترکیبی بر اساس روش فیشر به صورت ترکیب کردن آزمون‌های مستقل انجام می‌شود و با توجه به اینکه مقدار احتمال تحت درست بودن $H_\circ$ دارای توریع یکنواخت است، بنابراین فرض صفر در سطح α زمانی رد می‌شود که

$$-۲\sum_{i=۱}^{k} \ln(P_i) > \chi^{۲}_{۲k}(۱-\alpha) \qquad (۵)$$

که در آن $\chi^{۲}_m(\alpha)$، صدک ۱۰۰α ام برای توزیع کای—دو با m درجه آزادی است.

۳.۲ روش گریبیل و دیل

گریبیل و دیل یک برآوردگر ترکیبی به صورت

$$\hat{\mu}_{GD} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} n_i \bar{x}_i / s_i^{۲}}{\sum_{i=۱}^{k} n_i / s_i^{۲}}$$

برای میانگین مشترک در حالت یک متغیره ارائه کردند. با تعمیم دادن این ایده می‌توان یک برآورگر به صورت

$$\hat{\mu}_{GD} = \left(\sum_{i=۱}^{k} n_i S_i^{-۱}\right)^{-۱} \sum_{i=۱}^{k} n_i \bar{X}_i S_i^{-۱}$$

معرفی کرد که در آزمون فرض (۲) مورد استفاده قرار گیرد. این روش یک حالت خاص از روش

جردن و کریشنامورتی [۵] می‌باشد. این روش در بخش ۵.۲ توضیح داده شده است.

۴.۲ آزمون‌های زو و ماتیو

فرض کنید

$$W = -\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \ln(P_i)$$
$$\hat{\Sigma}_i = \frac{(A_i + n_i \bar{X}_i \bar{X}_i')}{n_i} \quad , \quad Q_i = n_i \hat{\Sigma}_i^{-1}$$

که در آن وزن‌ها γ_i، مقادیری مثبت و به صورت تابعی از Q_i انتخاب می‌شوند به طوری که $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i = 1$ و $A_i = (n_i - 1)S_i$ می‌باشند. این روش، فرض H_0 را زمانی رد می‌کند که

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i^{k-1} e^{w/\gamma_i}}{\prod_{j=1, j\neq k}^{k} (\gamma_i - \gamma_j)} \leq \alpha(1+\eta) \qquad (6)$$

که در آن

$$\eta = \frac{\sum_{i<j} \eta_{ij}}{k(k-1)/2} \quad , \quad \eta_{ij} = \frac{\bar{X}_i' \bar{X}_j}{||\bar{X}_i|| \, ||\bar{X}_j||}$$

در این مقاله وزن‌هایی به صورت‌های زیر در نظر گرفته می‌شوند:

۱) وزن‌ها بر اساس دترمینان

$$\gamma_i = \frac{|Q_i|}{\sum_{j=1}^{k} |Q_j|}, \quad i = 1, ..., k.$$

۲) وزن‌ها بر اساس اثر ماتریس

$$\gamma_i = \frac{tr(Q_i(\sum_{j=1}^{k} Q_j)^{-1})}{\sum_{i=1}^{k} tr(Q_i(\sum_{j=1}^{k} Q_j)^{-1})} = \frac{tr(Q_i(\sum_{j=1}^{k} Q_j)^{-1})}{p}, \quad i = 1, ..., k.$$

۳) وزن‌ها بر اساس مقادیر ویژه

$$\gamma_i = \frac{\lambda(Q_i(\sum_{j=1}^{k} Q_j)^{-1})}{\sum_{i=1}^{k} \lambda(Q_i(\sum_{j=1}^{k} Q_j)^{-1})}, \quad i = 1, ..., k.$$

که در آن $\lambda(A)$ و $tr(A)$ به ترتیب نشان دهنده بزرگترین مقدار ویژه A و اثر ماتریس A می‌باشد.

۵.۲ روش جردن و کریشنامورتی

در این روش آماره آزمون به صورت متوسط وزن دار شده T_i^2 ها، $\sum_{i=1}^{k} c_i T_i^2$، ارائه می‌شود که در آن

$$c_i = \frac{\{Var(T_i^2)\}^{-1}}{\sum_{j=1}^{k} \{Var(T_j^2)\}^{-1}}$$
$$Var(T_i^2) = \frac{2p(n_i-1)^2(n_i-2)}{(n_i-p-2)^2(n_i-p-4)}.$$

اگر مقادیر c_i با هم برابر باشند (به‌خصوص اگر اندازه نمونه‌ها با هم برابر باشند) روش جردن و کریشنامورتی همان روش گریبیل و دیل می‌باشد.

برای مواردی که $k = 2$ و $p = 2, 3$ مقادیر بحرانی دقیق ارائه شده‌اند و برای $k \geq 3$ یک روش تقریبی بدین صورت است که به‌طور تقریبی $\sum_{i=1}^{k} c_i T_i^2 \sim dF_{kp,v}$ که در آن

$$v = \frac{4M_2 kp - 2M_1^2(kp+2)}{M_2 kp - M_1^2(kp+2)}$$
$$d = M_1 \frac{v-2}{v} \qquad M_1 = p\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i(n_i-1)}{n_i-p-2}$$
$$M_2 = p(p+2)\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i^2(n_i-1)^2}{(n_i-p-2)(n_i-p-4)} + 2p^2 \sum_{i>j} \frac{c_i c_j (n_i-1)(n_j-1)}{(n_i-p-2)(n_j-p-2)}$$

بنابراین فرض صفر در سطح α زمانی رد می‌شود که $\sum_{i=1}^{k} c_i T_i^2 > dF_{kp,v}(1-\alpha)$. در

این‌جا $F_{p,q}(1-\alpha)$ صدک 100α ام برای توزیع F با درجات آزادی m و n است.

توجه کنید که این روش تقریبی زمانی کارایی دارد که $n_i > p+4$ $(i = 1, \ldots, k)$.

۶.۲ روش تعمیم یافته

مفاهیم مقدار احتمال تعمیم یافته و فاصله اطمینان تعمیم یافته به ترتیب توسط [۱۳ و ۱۴] معرفی شدند. این مفاهیم زمانی که پارامتر مزاحم وجود داشته باشد، کاربرد دارند. در مسأله میانگین مشترک نیز ماتریس‌های کوواریانس $\sum_i, \ i = 1, \ldots, k$، نقش پارامتر مزاحم را دارند. [۱۰] با استفاده از این مفاهیم، برای هریک از نمونه‌ها یک کمیت محوری تعمیم یافته را معرفی کرده‌اند. سپس با ترکیب کردن آنها یک کمیت محوری تعمیم‌یافته برای پارامتر میانگین مشترک ارائه کردند و با استفاده از آن یک ناحیه اطمینان تعمیم یافته و مقدار احتمال تعمیم یافته به دست آوردند.

می‌دانیم که

$$Z_i = \left(\frac{\Sigma_i}{n_i}\right)^{-\frac{1}{2}} (\bar{X}_i - \mu) \sim N_p(0, I_p)$$

و $U_i = \frac{A_i}{n_i} \sim W_p(n_i - 1, \frac{\Sigma_i}{n_i})$. بنابراین یک کمیت محوری بر اساس i امین نمونه به صورت زیر است:

$$T_i^* = \bar{x}_i - (u_i^{\frac{1}{2}} R_i^{-1} u_i^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} Z_i \qquad (7)$$

که در آن

$$R_i = [u_i^{-\frac{1}{2}} \frac{\Sigma_i}{n_i} u_i^{-\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}} (u_i^{-\frac{1}{2}} U_i u_i^{-\frac{1}{2}}) [u_i^{-\frac{1}{2}} \frac{\Sigma_i}{n_i} u_i^{-\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}}$$

و $\bar{x}_i$ و u_i به ترتیب مقادیر مشاهده شده $\bar{X}_i$ و U_i می‌باشند.

آن‌ها با ترکیب کردن کمیت‌های محوری در (۷) با هریک از وزن‌های تصادفی $W^{-1}W_i$ که در آن $W_i = (u_i^{\frac{1}{2}} \tilde{R}_i^{-1} u_i^{\frac{1}{2}})^{-1}$ و $W = \sum_{i=1}^k W_i$ و $\tilde{R}_i$ ماتریس‌های تصادفی با توزیع ویشارت می‌باشند $\tilde{R}_i \sim \mathrm{W}_p(n_i - 1, I_p)$، یک کمیت محوری تعمیم یافته بر اساس k نمونه به صورت زیر خواهد بود:

$$T(\bar{X}, U; \bar{x}, u) = W^{-1} \sum_{i=1}^k W_i T_i^*, \qquad (8)$$

که در آن $\bar{X} = (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_k)$ و $U = (U_1, \ldots, U_k)$ بوده و $\bar{x}$ و u مقادیر مشاهده شده مربوط به آن‌ها می‌باشند.

فرض کنید $\tilde{T} = \sum_T^{-\frac{1}{2}} (T - \mu_T)$ که در آن μ_T و Σ_T به ترتیب نشان دهنده میانگین و ماتریس کوواریانس T باشند. با تعریف $\tilde{\mu} = \sum_T^{-\frac{1}{2}} (\mu_0 - \mu_T)$ آن‌گاه مقدار احتمال تعمیم یافته برای آزمون کردن فرض (۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$p = P(\ ||\tilde{T}|| \ > \ ||\tilde{\mu}_0|| \ \ |x, u\ ) \qquad (9)$$

و H_0 زمانی رد می‌شود که p کمتر از α است [۱۰]. توجه کنید که مقدار احتمال تعمیم یافته در (۹) را می‌توان با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو

محاسبه کرد. برای جزئیات بیشتر به [۱۰] مراجعه شود.

۳ مثال تشریحی

کریشنامورتی و لو [۷] از چهار جامعه نرمال دو متغیره با میانگین مشترک $\mu = (۰/٦, ۰/۲)'$ و ماتریس‌های کوواریانس

$$\Sigma_۱ = \begin{bmatrix} ۲ & ۱/۵ \\ ۱/۵ & ۴ \end{bmatrix}, \quad \Sigma_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix}$$
$$\Sigma_۳ = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۲ & ۱۲ \end{bmatrix}, \quad \Sigma_۴ = \begin{bmatrix} ۴ & ۲/۵ \\ ۲/۵ & ۱۸ \end{bmatrix}$$

داده‌هایی تصادفی با اندازه نمونه‌های برابر ۱۵ تولید کردند. آمار توصیفی، مقدار آماره $T^۲$ هتلینگ و مقدار احتمال مربوط به هریک از جامعه ها در جدول ۱ آورده شده‌اند.

با استفاده از این داده‌ها می‌خواهیم فرض

$$H_۰ : \mu = (۰\,,\ ۰) \quad \text{در مقابل} \quad H_۱ : \mu \neq (۰\,,\ ۰)$$

را در سطح ۰/۰۵ آزمون کنیم. مقدار احتمال‌های مربوط به هر یک از روش‌های معرفی شده در بخش ۲، در جدول ۲ آورده شده‌اند. چون اندازه نمونه‌ها با هم برابرند بنابراین نتایج روش گریبیل و دیل با جردن و کریشنامورتی یکسان است. همچنین در سه روش زو و موتیو مقادیر مقدار احتمال باید با مقدار $\alpha(۱+\eta) = ۰/۰٦۴$ مقایسه و سایر مقادیر مقدار احتمال با $\alpha = ۰/۰۵$ مقایسه شوند.

با توجه به جدول ۲ مشاهده می‌شود که همه روش‌ها بجز روش زو و ماتیو با وزن‌های دترمینان، فرض $H_۰$ را رد می‌کنند و از آنجا که میانگین داده‌های تولید شده $\mu = (۰/٦, ۰/۲)'$ می‌باشد بنابراین آزمون مناسب باید فرض $H_۰$ را رد کند.

۴ شبیه‌سازی و نتیجه‌گیری

توان‌ها و اندازه آزمون‌های معرفی شده در بخش ۲ با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو با ۱۰۰۰۰ بار تکرار محاسبه شده‌اند. این شبیه‌سازی تنها برای حالت $k = ۴$ و $p = ۲$ آورده شده‌اند و نتایج دیگر شبیه سازی‌ها به دلیل وجود نتایج مشابه، در این‌جا آورده نشده‌اند. توان آزمون‌ها، مطابق روش‌های زیر است:

۱) روش معمول

۲) آزمون فیشر

۳) روش گریبیل و دیل

۴) روش زو و ماتیو با وزن‌های دترمینان

۵) روش زو و ماتیو با وزن‌های اثر ماتریس

٦) روش زو و ماتیو با وزن‌های مقادیر ویژه

۷) روش جردن و کریشنامورتی

۸) روش تعمیم یافته

در جداول (۳) تا (۵) برای الگوهای مختلف ارائه شده‌اند. در جدول (۳)، اندازه نمونه‌ها را به صورت $n = (۵, ۵, ۵, ۵)$، در جدول (۴)، به صورت $n = (۵, ۱۰, ۱۰, ۲۰)$ و در جدول ۵، به

صورت $n = (۲۰, ۲۰, ۱۵, ۱۵)$ در نظر گرفته شده‌اند.

مقایسه توان‌ها نشان می‌دهد که

۱- خطای نوع اول تمام روش‌ها برابر ۰/۰۵ است.

۲- وقتی که ماتریس‌های کوواریانس جامعه‌ها با هم برابر هستند آزمون معمول (F) نسبت به بقیه آزمون‌ها دارای بیشترین توان است.

۳- وقتی که ماتریس‌های کوواریانس جامعه‌ها باهم برابر نیستند آزمون فیشر و روش زو و ماتیو با وزن‌های اثر ماتریس دارای بیشترین توان می‌باشند.

جدول ۱. آمار توصیفی مربوط به داده‌ها.

نمونه	۱	۲	۳	۴
$\bar{X}_i$	$\begin{bmatrix} ۰/۷۸۷۹ \\ ۰/۲۳۲۴ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰/۴۷۸۱ \\ ۱/۱۳۴ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱/۱۲۵ \\ -۲/۵۱۵ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۲/۰۱۳ \\ -۰/۶۱۵۹ \end{bmatrix}$
S_i	$\begin{bmatrix} ۱/۰۶۳ & ۱/۷۷۰ \\ ۵/۶۱۵ & ۱/۰۶۳ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱/۸۵۰ & ۱/۲۰۵ \\ ۷/۲۶۴ & ۱/۸۵۰ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۲/۶۲۲ & ۴/۹۴۱ \\ ۱۲/۰۳۶ & ۲/۶۲۲ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۸/۲۰۴ & ۵/۸۶۳ \\ ۲۵/۴۶۷ & ۸/۲۰۴ \end{bmatrix}$
$T_i^۲$	۵/۴۳۵۷	۳/۳۸۸۸	۱۷/۴۸۸۸	۲۳/۰۰۳۴
مقدار احتمال	۰/۱۱۸۶	۰/۲۴۴۵	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۱۸

جدول ۲. p-value های به دست آمده برای آزمون‌ها.

روش	p-value
روش معمول	۰/۰۰۰۰۱
آزمون فیشر	۰/۰۰۰۱۹
روش زو و ماتیو با وزن‌های دترمینان	۰/۱۰۷۷۵
روش زو و ماتیو با وزن‌های اثر	۰/۰۲۴۲۸
روش زو و ماتیو با وزن‌های مقادیر ویژه	۰/۰۲۴۱۷
جردن و کریشنامورتی	۰/۰۰۰۵۴
روش تعمیم‌یافته	۰/۰۲۰۱۳

جدول ۳. درصد توان‌های شبیه‌سازی شده آزمون‌ها برای $k = ۴$، $p = ۲$، $n = (۵, ۵, ۵, ۵)$ و $\Sigma_i = \begin{bmatrix} ۱ & \rho_i \\ \rho_i & ۱ \end{bmatrix}$.

		μ						
$(\rho_۱, ..., \rho_۲)$	روش	$\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰/۱ \\ ۰/۲ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰/۳ \\ ۰/۱ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰/۳ \\ ۰/۲ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰/۵ \\ ۰/۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰/۲ \\ ۰/۲ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰/۵ \\ ۰/۵ \end{pmatrix}$
$(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)$	۱	۵	۱۲	۱۴	۲۶	۲۷	۲۲	۴۷
	۲	۵	۱۱	۱۵	۱۶	۲۵	۱۸	۴۵
	۳	.	.	.	.	.	.	.
	۴	۵	۱۵	۱۵	۱۷	۲۷	۱۷	۴۰
	۵	۵	۱۳	۱۵	۱۸	۲۸	۱۸	۴۱
	۶	۵	۱۲	۱۵	۱۶	۲۳	۱۷	۴۲
	۷	.	.	.	.	.	.	.
	۸	۵	۹	۹	۱۴	۱۸	۱۲	۱۵
$(۰/۱, ۰/۲, ۰/۳, ۰/۴)$	۱	۵	۹	۱۰	۱۲	۱۶	۱۱	۱۸
	۲	۵	۱۵	۱۵	۱۶	۱۴	۲۳	۴۹
	۳	.	.	.	.	.	.	.
	۴	۵	۱۷	۱۶	۱۵	۲۳	۲۲	۴۵
	۵	۵	۱۶	۱۷	۱۵	۲۷	۲۳	۴۷
	۶	۵	۱۶	۱۶	۱۶	۱۷	۲۰	۴۸
	۷	.	.	.	.	.	.	.
	۸	۵	۱۳	۱۴	۱۶	۱۴	۱۵	۲۲
$(۰/۱, ۰/۵, ۰/۷, ۰/۹)$	۱	۵	۷	۱۱	۱۲	۱۵	۱۰	۲۰
	۲	۵	۱۶	۲۰	۲۶	۳۰	۲۵	۴۸
	۳	.	.	.	.	.	.	.
	۴	۵	۱۹	۲۰	۲۴	۲۹	۲۶	۴۵
	۵	۵	۱۹	۲۸	۲۷	۳۰	۲۵	۴۷
	۶	۵	۱۷	۲۸	۲۷	۳۰	۲۵	۴۵
	۷	.	.	.	.	.	.	.
	۸	۵	۱۱	۱۲	۱۵	۱۹	۱۳	۲۱
$(-۰/۹, -۰/۲, ۰, ۰/۲)$	۱	۵	۶	۷	۹	۱۲	۱۰	۱۸
	۲	۵	۱۴	۱۷	۲۱	۳۴	۲۴	۴۵
	۳	.	.	.	.	.	.	.
	۴	۵	۱۳	۱۶	۲۲	۳۱	۲۳	۴۲
	۵	۵	۱۴	۱۶	۲۳	۳۳	۲۴	۴۴
	۶	۵	۱۳	۱۵	۲۴	۳۳	۲۳	۴۱
	۷	.	.	.	.	.	.	.
	۸	۵	۱۱	۱۳	۱۴	۱۶	۱۲	۲۱

جدول ۴. درصد توان‌های شبیه‌سازی شده آزمون‌ها برای $k = 4$، $p = 2$، $n = (10, 10, 10, 20)$ و $\Sigma_i = \begin{bmatrix} 1 & \rho_i \\ \rho_i & 1 \end{bmatrix}$.

		μ						
$(\rho_1, \dots, \rho_4)$	روش	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0/1 \\ 0/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0/3 \\ 0/1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0/3 \\ 0/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0/5 \\ 0/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0/2 \\ 0/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0/5 \\ 0/5 \end{pmatrix}$
$(0/1, 0/1, 0/1, 0/1)$	۱	۵	۲۴	۱۶	۲۷	۳۰	۲۵	۵۲
	۲	۵	۲۱	۲۶	۲۵	۲۸	۲۱	۵۱
	۳	۵	۱۹	۲۲	۲۳	۲۶	۲۸	۴۴
	۴	۵	۲۰	۲۴	۲۴	۲۸	۲۰	۴۴
	۵	۵	۲۱	۲۴	۲۵	۲۹	۲۱	۴۸
	۶	۵	۱۸	۲۳	۲۴	۲۹	۲۰	۴۵
	۷	۵	۲۰	۲۳	۲۵	۲۸	۲۱	۴۶
	۸	۵	۱۴	۱۵	۱۷	۲۰	۱۵	۱۹
$(0/1, 0/2, 0/3, 0/4)$	۱	۵	۱۹	۲۱	۲۳	۲۶	۲۱	۲۹
	۲	۵	۲۵	۲۶	۲۷	۳۵	۳۲	۵۹
	۳	۵	۲۴	۲۵	۲۶	۳۴	۲۹	۵۰
	۴	۵	۲۴	۲۵	۲۷	۳۲	۲۸	۵۳
	۵	۵	۲۵	۲۶	۲۹	۳۳	۲۸	۵۵
	۶	۵	۲۵	۲۶	۲۸	۳۳	۲۷	۵۳
	۷	۵	۲۵	۲۶	۲۷	۳۱	۲۵	۵۱
	۸	۵	۱۸	۱۹	۲۱	۲۶	۲۳	۲۸
$(0/1, 0/5, 0/7, 0/9)$	۱	۵	۱۹	۲۲	۲۴	۲۹	۲۲	۳۰
	۲	۵	۲۹	۳۱	۳۵	۴۱	۳۶	۵۹
	۳	۵	۲۶	۲۹	۳۰	۳۹	۳۲	۵۱
	۴	۵	۲۸	۳۰	۳۲	۴۰	۳۱	۵۳
	۵	۵	۲۸	۳۰	۳۳	۴۱	۳۲	۵۴
	۶	۵	۲۸	۳۱	۳۲	۴۰	۳۲	۵۲
	۷	۵	۲۷	۳۰	۳۱	۳۹	۳۴	۵۲
	۸	۵	۱۷	۱۹	۲۰	۲۵	۲۰	۲۶
$(-0/9, -0/2, 0, 0/2)$	۱	۵	۱۸	۲۰	۲۴	۲۷	۲۱	۳۰
	۲	۵	۲۵	۲۷	۲۹	۳۵	۳۱	۶۲
	۳	۵	۲۲	۲۵	۲۷	۳۱	۳۲	۵۱
	۴	۵	۲۴	۲۶	۲۹	۳۳	۳۰	۵۵
	۵	۵	۲۴	۲۷	۳۰	۳۳	۳۱	۵۷
	۶	۵	۲۴	۲۵	۲۹	۳۲	۳۰	۵۳
	۷	۵	۲۲	۲۳	۲۶	۳۱	۳۰	۴۹
	۸	۵	۱۹	۲۰	۲۰	۲۳	۳۰	۳۰

جدول ۵. درصد توان‌های شبیه‌سازی شده آزمون‌ها برای $k = ۴$، $p = ۲$، $n = (۲۰, ۲۰, ۱۵, ۱۵)$ و $\Sigma_i = \begin{bmatrix} ۱ & \rho_i \\ \rho_i & ۱ \end{bmatrix}$.

		μ						
$(\rho_۱, ..., \rho_۲)$	روش	$\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰/۱ \\ ۰/۲ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰/۳ \\ ۰/۱ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰/۳ \\ ۰/۲ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰/۵ \\ ۰/۳ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰/۲ \\ ۰/۲ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰/۵ \\ ۰/۵ \end{pmatrix}$
$(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)$	۱	۵	۲۹	۳۳	۳۷	۵۱	۴۰	۶۷
	۲	۵	۳۱	۳۰	۳۰	۵۰	۳۹	۶۰
	۳	۵	۲۴	۲۴	۳۰	۴۹	۳۴	۵۳
	۴	۵	۲۳	۲۵	۲۹	۴۶	۳۵	۵۸
	۵	۵	۲۵	۲۶	۳۰	۵۱	۳۸	۵۹
	۶	۵	۲۵	۲۵	۲۹	۵۰	۳۷	۵۴
	۷	۵	۲۲	۲۳	۲۹	۴۸	۳۵	۵۵
	۸	۵	۲۰	۲۱	۲۲	۲۵	۲۰	۳۰
$(۰/۱, ۰/۲, ۰/۳, ۰/۴)$	۱	۵	۲۱	۲۲	۲۴	۲۹	۲۵	۳۷
	۲	۵	۲۸	۲۹	۳۵	۴۲	۳۶	۶۴
	۳	۵	۲۴	۲۷	۳۰	۴۰	۳۵	۶۰
	۴	۵	۲۷	۲۸	۳۲	۴۰	۳۶	۶۰
	۵	۵	۲۸	۲۹	۳۴	۴۱	۳۷	۶۲
	۶	۵	۲۷	۲۸	۳۱	۴۰	۳۶	۶۰
	۷	۵	۲۵	۲۸	۲۹	۴۱	۳۷	۵۶
	۸	۵	۱۹	۲۲	۲۸	۲۶	۲۵	۶۱
$(۰/۱, ۰/۵, ۰/۷, ۰/۹)$	۱	۵	۲۲	۲۴	۲۵	۲۸	۲۵	۶۷
	۲	۵	۳۰	۳۴	۳۷	۴۵	۴۱	۶۷
	۳	۵	۲۹	۳۰	۳۵	۴۴	۳۹	۶۱
	۴	۵	۲۸	۳۰	۳۴	۴۳	۴۰	۶۵
	۵	۵	۲۹	۳۴	۳۶	۴۴	۴۰	۶۸
	۶	۵	۲۸	۳۲	۳۳	۴۲	۴۱	۶۲
	۷	۵	۲۹	۳۰	۳۵	۴۰	۳۸	۶۱
	۸	۵	۱۷	۱۸	۱۹	۲۴	۱۹	۲۷
$(-۰/۹, -۰/۲, ۰, ۰/۲)$	۱	۵	۲۰	۲۳	۲۴	۲۹	۲۳	۳۳
	۲	۵	۲۸	۳۱	۳۵	۴۲	۳۵	۵۹
	۳	۵	۲۷	۳۰	۳۲	۴۰	۳۲	۵۳
	۴	۵	۲۸	۳۰	۳۴	۴۰	۳۴	۵۶
	۵	۵	۲۸	۳۱	۳۵	۴۱	۳۵	۵۷
	۶	۵	۲۸	۳۰	۳۵	۴۲	۳۵	۵۶
	۷	۵	۲۷	۳۱	۳۴	۴۰	۳۲	۵۲
	۸	۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷	۲۰	۳۲

مراجع

[1] Chiou, W. and Cohen, A., (1985), On estimating a common multivariate normal mean vector, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 37, 499-506.

[2] Eberhardt, K.R., Reeve, C.P. and Spiegelman, C.H. (1989), A Minimax approach to combine means, with practical examples, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 5, 129-148.

[3] Fairweather, W.R. (1972), A method of obtaining an exact confidence interval for the common mean of several normal populations, *Journal of Applied Statistics*, 21, 229-233.

[4] Graybill, F.A. and Deal, R.B. (1959), Combining unbiased estimators , *Biometrics*, 15, 543-550.

[5] Jordan, S.J. and Krishnamoorthy, K. (1995), Confidence regions for the common mean vector of several multivariate normal populations, *The Canadian Journal of Statistics*, 23, 283-297.

[6] Krishnamoorthy, K. and Lu, Y. (2003), Inferences on the common mean of several normal populations based on the generalized variable method, *Biometrics*, 59, 237-247.

[7] Krishnamoorthy, K. and Lu, Y. (2005), Comparison of five tests for the common mean of several multivariate normal populations, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 33, 431-446.

[8] Krishnamoorthy, K. and Rohatgi, V.K. (1990), Unbiased estimation of the common mean of a multivariate normal distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 19, 1803-1812.

[9] Lin, S.H. and Lee, J.C. (2005), Generalized confidence interval for the common mean of several normal populations, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 134, 568-582.

[10] Lin, S.H., Lee, C. and Wang, R.S. (2007), Generalized inferences on the common mean vector of several multivariate normal populations, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 2240 - 2249.

[11] Loh, W.L. (1991), Estimating common mean of two multivariate normal distributions, *Annals of Statistics*, 19, 283-296.

[12] Meier, P. (1953) Variance of a weighted mean, *Biometrics*, 9, 59-73.

[13] Tsui, K. and Weerahandi, S. (1989) Generalized p-values in significance testing of hypotheses in the presence of nuisance parameters, *Journal of the American Statistical Association* , 84, 602-607.

[14] Weerahandi, S. (1993), Generalized confidence intervals, *Journal of the American Statistical Association*, 88, 899-905.

[15] Zhou, L. and Mathew, T. (1994) Combining independent tests in multivariate linear models, *Journal of Multivariate Analysis*, 51, 265-276.