

## مقایسه برآورد چگالی‌های پسین به کمک تکنیک‌های MCMC

مهرزاد علیجانی<sup>۱</sup>، سید کامران قریشی<sup>۲</sup>، حجت حاتمیان<sup>۳</sup>

چکیده:

تعیین چگالی‌های ناشناخته در مدل‌های بیزی آشیان گزیده در حالت‌های پیچیده تنها به کمک شبیه‌سازی ممکن بوده که از این میان روش‌های MCMC بیشترین سهم را دارند. حل مسائل کاربردی به کمک انواع مختلفی از این روش‌ها ایده‌ای نو در انتخاب بهترین روش را در اختیار آزمایشگر قرار می‌دهد. ما در این مقاله ضمن یادآوری این روش‌ها، تلاش کرده‌ایم از انواع مختلف آن‌ها استفاده کنیم و مسائل کاربردی متنوعی را به کمک نرم افزار Splus حل کنیم. نمودار بافت نگار نمونه‌های تولید شده از چگالی‌های پسین ارائه شده‌اند.

**واژه‌های کلیدی:** آمار بیز، الگوریتم متروپولیس هستینگس، نمونه‌گیری گیبس، نمونه‌گیری تکه‌ای، نمونه‌گیری گبرو بازگیر.

### ۱ مقدمه

روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکفی (MCMC) مناسب از زنجیر مذکور می‌تواند به نمونه‌ای تصادفی دست یابد. این روش‌ها توسط جمن و جمن [۶] و جلفند و اسمیت [۵] به‌عنوان ابزاری بسیار قوی در تحلیل مسائل بیزی، که اکثر آن‌ها از پیچیدگی محاسبات برخوردارند، به‌کار رفت. امروزه روش‌های MCMC طرفداران بسیاری در بین آماردانان بیزی و حتی آماردانان کلاسیک دارند. به‌طور مشخص MCMC شامل دو روش کلی نمونه‌گیری گیبس<sup>۵</sup> و الگوریتم روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکفی (MCMC) ابتدا در فیزیک آماری مورد استفاده قرار گرفتند [۱۲]. متروپولیس [۱۰] اولین کسی بود که تکنیک ساده‌ای از این روش‌ها را نشان داد. همراه با افزایش قدرت پردازش و سرعت محاسبات کامپیوترها این روش‌ها در حال تکمیل و گسترش می‌باشند. اگر محقق بخواهد از یک توزیع آماری مفروض  $f(\theta)$  نمونه‌گیری کند ابتدا از یک زنجیر مارکفی استفاده می‌کند که توزیع مذکور به عنوان توزیع تعادلی زنجیر باشد سپس با نمونه‌گیری

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه رازی کرمانشاه

<sup>۲</sup> استادیار دانشگاه رازی کرمانشاه

<sup>۳</sup> عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تنکابن

<sup>۴</sup> Monte Carlo Markov Chain

<sup>۵</sup> Gibbs Sampling

متروپولیس-هستینگس (M-H) <sup>۱</sup> است. در روش‌های شبیه‌سازی مستقیم به کمک قضیه تبدیل معکوس تابع توزیع، قادر به تولید نمونه‌ای تصادفی از تابع چگالی متناظر خواهیم بود [۵]. این در حالی است که در روش‌های MCMC دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی همبسته تولید خواهد شد که در آن نمونه تولید شده در گام  $j$ ام ( $\theta_j$ ) به مقدار متناظر آن در گام  $(j-1)$ ام ( $\theta_{j-1}$ ) بستگی دارد. توزیع دقیق دنباله  $\theta_j$  به طور کلی نامعلوم بوده و تنها تحت شرایط کلی که عموماً برقرار است توزیع  $\theta_j$  ( $j \rightarrow \infty$ ) به توزیع  $f(\theta)$  همگرا خواهد بود [۶ و ۷].

در این مقاله به حل بعضی مسائل خواهیم پرداخت که از روش‌های MCMC در حل آن‌ها استفاده شده است. در بخش دوم به اختصار در مورد آمار بیزی، روش‌های نمونه‌گیری گیبس و M-H خواهیم پرداخت. بخش سوم شامل حل شش مسأله واقعی است که برنامه‌های کاربردی آن به کمک نرم افزار Splus نوشته شده و در پیوست ۱ آمده است.

## ۲ آمار بیزی و روش‌های MCMC

تلفیق آمار کلاسیک به همراه اطلاعات گذشته نوعی استنباط را به همراه دارد که آمار بیزگفته می‌شود [۱ و ۱۳]. با فرض چگالی پیشین  $p(\theta)$  برای بردار پارامترهای

$$p(\theta|D) = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{p(D)} \propto p(D|\theta)p(\theta) \quad (۱)$$

که در آن  $p(D) = \int p(D|\theta)p(\theta)d\theta$  در بسیاری از موارد کاربردی به دست آوردن چگالی پسین به کمک روش‌های معمولی میسر نبوده و در نتیجه برای انجام استنباط بیزی نیاز به محاسبات عددی داریم. در روش شبیه‌سازی MCMC به طور کلی هدف یافتن نمونه‌ای از چگالی پسین است. فرض کنید  $X_t$  فرآیند مارکف با تابع انتقال  $q(\cdot|\cdot)$  باشد. با فرض  $X_{t+1}, X_t = x$  مقدار جدید  $y$ ، که از چگالی  $q(y|x)$  به دست آمده، را با احتمال  $\alpha(x, y)$  یعنی:

$$\alpha(x, y) = \min \left[ 1, \frac{f(y)q(x|y)}{f(x)q(y|x)} \right] \quad (۲)$$

می‌پذیرد یا همان مقدار قبلی  $x$  را اختیار می‌کند. متروپولیس [۱۰] از شرط تقارن  $q(y|x) = q(x|y)$  برای تابع انتقال استفاده کرد. تابع پیشنهادی او برای تابع انتقال به صورت زیر بود:

$$q(y|x) = \exp \left[ -(y-x)' \Sigma^{-1} (y-x) \right]$$

که در آن  $Y \sim N(x, \Sigma)$ . واضح است که  $\Sigma$  در تعیین فضای حالت نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کند. هستینگس [۸] با انتخاب مدل قدم زدن تصادفی و تابع انتقال  $q(y|x) = g(y-x)$  به این

اگر تابع  $q$  را به صورت  $q(y_i|x_i, x_{-i}) = f(y_i|x_i)$  انتخاب کنیم مقدار  $\alpha$  در رابطه فوق برابر یک خواهد شد که در این صورت نمونه‌گیری با الگوریتم M-H معادل نمونه‌گیری گیبس خواهد شد [۲ و ۱۵] سودمندی نمونه‌گیری گیبس در مقایسه با الگوریتم M-H در سادگی محاسبات و سرعت انجام آن است، اما در شرایطی کاربرد دارد که به دست آوردن تمامی چگالی‌های شرطی کناری ساده باشد [۵ و ۹].

## ۱.۲ نمونه‌گیرورقه‌ای

نیل [۱۱] روشی را ارائه نمود که در آن نمونه‌گیری از برخی چگالی‌های خاص که به صورت حاصلضرب چند تابع مثبت هستند به سادگی صورت می‌پذیرد. فرض کنید چگالی  $f(x)$  را بتوان به صورت  $\prod_{i=1}^k f_i(x)$  تجزیه کرد که در آن‌ها برای هر  $x > 0$   $f_i(x) > 0$  هستند. در این صورت مراحل این الگوریتم به صورت زیر است:

با داشتن نقطه آغاز  $x^t$  در زمان  $t$

$$w_1^{t+1} \sim \text{Uniform}[0, f_1(x^t)] \quad (۱)$$

$$w_2^{t+1} \sim \text{Uniform}[0, f_2(x^t)] \quad (۲)$$

⋮

و در گام  $k$ ام  $w_k^{t+1} \sim \text{Uniform}(A^{(t+1)})$  که در آن  $A^{(t+1)} = \{y : f(y) \geq w_k^{t+1}\}$  فرض کنیم  $W_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) متغیرهای تصادفی یکنواخت در بازه  $[0, f_i(x)]$  باشند. با استفاده از چگالی توأم  $(W_1, \dots, W_k, X)$  و تعمیم روش نمونه‌گیر گیبس

نوع شبیه‌سازی عمومیت بیشتری بخشید. توجه داریم که با انتخاب  $g$  به عنوان یک تابع زوج و متقارن همان حالت متروپولیس به دست می‌آید. الگوریتم M-H حالت کلی‌تری از نمونه‌گیری گیبس است که در آن هر مؤلفه از بردار  $x$  دائماً در حال نوشدن است. فرض کنید می‌خواهیم از چگالی  $f$  نمونه  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  را تولید کنیم. همچنین فرض کنیم برداری است که در آن  $i$ امین مؤلفه  $x$  حذف شده باشد. بردار  $(y_i, x_{-i})$  را برابر بردار اصلی  $x$  در نظر می‌گیریم با این تفاوت که  $i$ امین مؤلفه آن با  $y_i$  جایگزین شده باشد. به کمک الگوریتم M-H ابتدا نمونه  $y_i$  از چگالی پیشنهادی  $q(y_i|x_i, x_{-i})$  به دست می‌آید. نمونه مذکور با احتمال زیر به عنوان جایگزین برای مؤلفه  $x_i$  پذیرفته خواهد شد.

$$\alpha = \min \left[ 1, \frac{f(y_i, x_{-i})q(x_{-i}|y_i, x_{-i})}{f(x_i, x_{-i})q(y_i|x_i, x_{-i})} \right] \quad (۳)$$

با توجه به تساوی‌های

$$f(y_i, x_{-i}) = f(x_{-i})f(y_i|x_{-i})$$

و

$$f(x_i, x_{-i}) = f(x_{-i})f(x_i|x_{-i})$$

و جایگزینی آنها در رابطه (۳) داریم:

$$\alpha = \min \left[ 1, \frac{f(y_i|x_{-i})q(x_i|y_i, x_{-i})}{f(x_i|x_{-i})q(y_i|x_i, x_{-i})} \right]. \quad (۴)$$

$D = \{x : w_i \leq f_i(x) \quad \forall i, x \in \text{support}(f)\}$   
 اختیار می‌کنیم. در متون آماری این روش  
 نمونه‌گیری را روش نمونه‌گیری تکه‌ای<sup>۷</sup> می‌نامند  
 [۹ و ۱۴].

### ۳ مسائل کاربردی

در این بخش به تحلیل شش مسأله کاربردی  
 خواهیم پرداخت که از روش‌های MCMC معرفی  
 شده در بخش دوم در حل آن‌ها استفاده شده است.  
 مسأله اول به تولید متغیر تصادفی از چگالی  
 بتا به روش قدم زدن تصادفی مربوط می‌باشد.  
 مسأله دوم مربوط به قابلیت اعتماد است که به  
 کمک الگوریتم M-H آن را حل کرده‌ایم. مسأله  
 سوم برآورد نرخ نقص مربوط به داده‌های پمپ  
 است که با استفاده از نمونه‌گیری گیبس حل  
 شده است [۱۴]. مسأله ۴ مربوط به کاربرد روش  
 نمونه‌گیری گیر و بازگیر<sup>۸</sup> است که با استفاده از  
 نمونه‌گیری گیبس بررسی شده است [۷]. مسأله  
 پنجم گامای دم بریده با استفاده از نمونه‌گیری  
 تکه‌ای است. مسأله ششم حل مجدد مسأله سوم با  
 استفاده از نمونه‌گیری تکه‌ای است.

#### مسأله یک

می‌خواهیم برای چگالی پسین

$$f(\theta|x) \propto \theta^{x+1} (1-\theta)^{n+1-x}$$

با شرط  $x = 4$  و  $n = 8$  و با مدل قدم زدن  
 تصادفی  $Y = x + W$  (که در آن  $W \sim N(0, 1)$ )

در نهایت به نمونه‌ای از چگالی مورد نظر خواهیم  
 رسید. چگالی توأم  $(W_1, \dots, W_k, X)$  را بر مجموعه  
 $S$

$$S = \{(w_1, \dots, w_k, x), 0 \leq w_i \leq f_i(x) \\ \forall i \quad x \in \text{Support}(f)\}$$

به صورت  $g(w_1, \dots, w_k, x) = B$  در نظر می‌گیریم.  
 با این فرض چگالی حاشیه‌ای  $X$  برابر خواهد بود  
 با:

$$g_X(x) = B \int_0^{f_k(x)} \dots \int_0^{f_1(x)} dw_1 \dots dw_k \\ = B f_1(x) \dots f_k(x).$$

آن‌گاه  $g_X(x) = f(x)$ . حال برای تولید نمونه‌های  
 تصادفی به روش گیبس از چگالی حاشیه‌ای  
 $X$ ، به توزیع‌های شرطی کامل  $(W_1, \dots, W_k, X)$   
 نیازمندیم. توزیع‌های شرطی برای  $W_i$ ‌ها و  $X$   
 به صورت زیر داده می‌شوند:

$$g_{W_i| \cdot}(w_i | w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_k, x) \propto B \\ \text{و } w_i \in [0, f_i(x)]$$

$$g_X| \cdot(x | w_1, \dots, w_k) \propto B.$$

انتخاب نمونه برای  $W_i$  با توجه به چگالی‌های  
 شرطی فوق به آسانی صورت می‌گیرد. اگر  
 فرض کنیم  $w_i$  ( $i = 1, \dots, k$ )‌ها نمونه‌های  
 به دست آمده باشند، نمونه  $x$  را از چگالی  
 شرطی متناظر آن و بر تکیه‌گاه مشترک

است. با اندکی دقت در چگالی فوق می‌بینیم که یافتن رابطه صریح برای آن امکان پذیر نیست بنابراین با استفاده از الگوریتم M-H و با فرض اینکه  $(\alpha, \beta)$  نمونه تکرار زام و  $(\alpha_c, \beta_c)$  مقادیر جدید می‌باشند، با احتمال

$$\frac{\alpha_c^n \beta_c^{-n\alpha_c} \exp[-\sum_{i=1}^n (\frac{x_i}{\beta_c})^{\alpha_c}] (x_1 \cdots x_n)^{\alpha_c-1}}{\alpha^n \beta^{-n\alpha} \exp[-\sum_{i=1}^n (\frac{x_i}{\beta})^{\alpha}] (x_1 \cdots x_n)^{\alpha-1}}$$

نمونه جدید  $(\alpha_c, \beta_c)$  را که از  $g(\alpha, \beta)$  انتخاب شده است به‌عنوان نمونه جدید اختیار می‌کنیم یا مجدداً همان  $(\alpha, \beta)$  را در نظر می‌گیریم. با داشتن داده‌های مربوط به  $X$ ، برنامه کامپوتری این مسأله همراه با نمودار بافت‌نگار توزیع‌های حاشیه‌ای  $\alpha$  و  $\beta$  در پیوست آمده است.

### مسأله سوم

در سال ۱۹۸۷ داده‌هایی برای یک سری پمپ [۴] که در زمان  $t$  دارای نقص شده‌اند ارائه شد. می‌خواهیم به روش بی‌زی این مسأله را در دو حالت نمونه‌گیری گیبس و نمونه‌گیری تکه‌ای تحلیل کنیم.

فرض کنیم  $t_{(i)}$  ( $i = 1, \dots, 10$ ) زمان نقص پمپ  $i$ ام باشد.  $X_{(i)}$  را تعداد نقص‌های مشاهده شده در بازه زمانی  $[0, t_i]$  در نظر می‌گیریم. علاوه بر این فرض می‌کنیم که  $X_{(i)}$  دارای توزیع پواسن با پارامتر  $\lambda_i t_i$  است، یعنی:

$$X_i \sim poisson(\lambda_i t_i).$$

نمونه تصادفی تولید کنیم. برای حل این مسأله مانند حالت متروپلیس ساده قرار می‌دهیم  $\alpha(\theta, \theta') = \min \left[ 1, \frac{f(\theta'|x)}{f(\theta|x)} \times \frac{\theta(1-\theta)}{\theta'(1-\theta')} \right]$  برنامه کامپوتری این مسأله همراه با بافت‌نگار به دست آمده از نرم افزار Splus در پیوست آورده شده است. به‌وضوح کارایی بالا و صحت نمونه‌های به دست آمده قابل مشاهده است.

### مسأله دوم

فرض کنید  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) متغیر تصادفی زمان نقص با تابع چگالی وایبل

$$f(x_i) = \alpha \beta^\alpha x_i^{\alpha-1} \exp \left[ -\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha \right]$$

و تابع بقا

$$\bar{F}(x_i) = p(X_i > x_i) = \exp \left[ -\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha \right]$$

باشد [۱۳]. نرخ خطر برای این متغیر برابر است با

$$r(x_i) = \frac{f(x_i)}{\bar{F}(x_i)} = \alpha \beta^\alpha x_i^{\alpha-1}.$$

به‌صورت تجربی چگالی پیشین برای دو پارامتر  $(\alpha, \beta)$  را برابر

$$g(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{4}{10000} (\alpha - 1) \Gamma(\frac{1}{\alpha} - 1), & 1 < \alpha < 1/5 \\ \frac{4}{10000} (2 - \alpha) \Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1), & 1/5 < \alpha < 2. \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم که در آن

$$\frac{2000}{\Gamma(\frac{1}{\alpha} - 1)} < \beta < \frac{3000}{\Gamma(\frac{1}{\alpha} - 1)}.$$

با این فرضیات، چگالی پسین برای  $(\alpha, \beta)$  به‌صورت

$$\pi(\alpha, \beta|x) \propto \alpha^n \beta^{-n\alpha} \exp \left[ \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha \right] (x_1 \cdots x_n)^{\alpha-1} g(\alpha, \beta)$$

و چگالی پیشین برای پارامتر  $\lambda_i$  را گامای  $(\alpha, \beta)$  در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم  $\beta$  دارای چگالی گامای  $(\delta, \gamma)$  است. در این جا  $\alpha, \delta, \gamma$  و پارامترهای معلوم فرض شده‌اند. داده‌های زیر نمونه به دست آمده برای این مدل سلسله‌مراتبی است:

$$X_i : 5, 1, 5, 14, 3, 19, 1, 1, 4, 22$$

$$t_i * 10^{-2} (\text{hours}) : 94/32, 15/72, 62/88, 125/76$$

$$5/24, 31/44, 1/048, 1/048, 2/096, 10/48$$

با توجه به این فرضیات چگالی پیشین توام  $\lambda_i, \beta$  برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} g(\{\lambda_i\}, \beta) &= g_\beta(\beta) \prod_{i=1}^{10} g(\lambda_i | \beta) \\ &= \frac{e^{-\delta\beta} \beta^{\gamma-1} \delta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \prod_{i=1}^{10} \frac{e^{-\beta\lambda_i} \beta^\alpha \lambda_i^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &\propto e^{-\delta\beta} \beta^{\gamma-1} \prod_{i=1}^{10} e^{-\beta\lambda_i} \beta^\alpha \lambda_i^{\alpha-1} \end{aligned}$$

در نتیجه چگالی پسین  $(\lambda_i, \beta)$  عبارت است از:

$$\pi(\{\lambda_i\}, \beta) \propto L(\lambda_i) g(\{\lambda_i\}, \beta).$$

در این جا هدف تولید نمونه‌ای تصادفی از چگالی پسین فوق است. بنا بر این به چگالی‌های شرطی کامل نیازمندیم که با روابط زیر داده می‌شوند.

$$\begin{aligned} \pi(\beta | \{\lambda_i\}) &\propto e^{-\delta\beta} \beta^{\gamma-1} \prod_{i=1}^{10} e^{-\beta\lambda_i} \beta^\alpha \\ &= \beta^{10\alpha+\gamma-1} e^{-\beta(\delta+\sum_{i=1}^{10} \lambda_i)} \end{aligned}$$

$$\pi(\lambda_j | \lambda_i, i \neq j, \beta) \propto e^{-\beta\lambda_j} \lambda_j^{\alpha-1} e^{-\lambda_i t_i} \lambda_j^{x_i}$$

برنامه کامپوتری این مسأله همراه با نمودار بافت‌نگار توزیع‌های حاشیه‌ای در پیوست آمده است.

### مسأله چهارم

در این مسأله از نمونه‌گیری گیر و بازگیر برای تعیین اندازه یک جامعه آماری استفاده می‌کنیم. فرض کنیم  $N$  معرف اندازه جامعه مورد نظر باشد.  $n_{11}, n_{01}, n_{10}$  را به ترتیب تعداد نمونه‌های به دست آمده در بار اول، دوم و هر دو بار تعریف می‌کنیم. گیریم:  $n' = n_{11} + n_{01} + n_{10}$  (تعداد کل حیوانات نشان گذاری شده)  $\tilde{n} = 2n_{11} + n_{01} + n_{10}$  (تعداد کل حیوانات گرفته شده در هر دو بار نمونه‌گیری) و  $p$  (احتمال انتخاب یک نمونه تصادفی از این جامعه). توزیع پیشین  $N$  و  $p$  را به ترتیب پواسن با پارامتر  $\lambda = 250$  و یکنواخت در بازه  $(0, 1)$  در نظر می‌گیریم. با توجه به تابع درست‌نمایی:

$$\begin{aligned} L(N, P) &= \frac{N!}{n_{11}! n_{01}! n_{10}! (N-n')!} \\ &\times (p(1-p))^{n_{10}} ((1-p)p)^{n_{01}} (p^2)^{n_{11}} \\ &\times ((1-p)^2)^{N-n'} \\ &= \binom{N}{n_{11} \ n_{01} \ n_{10}} p^n (1-p)^{2N-2n'+n_{10}+n_{01}} \\ &= \binom{N}{n_{11} \ n_{01} \ n_{10}} p^n (1-p)^{2N-n} \end{aligned}$$

چگالی پسین توام برای  $N$  و  $P$  برابر است با:

$$\pi(N, P) \propto \frac{p^n (1-p)^{N-n} \lambda^N}{(N-n)!}, \quad N' = N - n'$$

$$\pi(N', P) \propto \frac{p^{n'} (1-p)^{N'+n'-n} \lambda^{N'+n'}}{N'!}.$$

برای استفاده از نمونه‌گیری گیبس از توزیع‌های پسین حاشیه‌ای، نیاز به چگالی‌های شرطی کامل است که به صورت زیر داده می‌شوند:

$$P|N' \sim \text{beta}(n+1, 2N'+n_{10}+n_{01}+1)$$

$$N'|P \sim \text{poisson}(\lambda[1-p]^2)$$

بر اساس نمونه‌های تولید شده از روش نمونه‌گیری گیبس نمودار بافت‌نگار مربوط به  $N'$  و  $p$  در پیوست آمده است.

### مسئله پنجم

در این مسئله می‌خواهیم از چگالی گامای بریده شده با چگالی  $f(x) \propto x^{\alpha-1} e^{-x}$  در بازه  $x > a$  نمونه تولید کنیم. نمونه‌گیری به کمک روش حذف<sup>۹</sup> برای مقادیر بزرگتر از  $a$  کارا نیست [۳]. در این مسئله به صورت شهودی خواهیم دید که دقت نمونه‌گیری به روش تکه‌ای نسبت به روش نمونه‌گیری مستقیم بیشتر است. داریم:

$$f(x) \propto f_1(x) \cdot f_2(x),$$

$$f_1(x) = x^{\alpha-1}, \quad f_2(x) = e^{-x}$$

حال با نمونه‌گیری از توزیع فوق روی  $D = \{x : u_1 \leq x^{\alpha-1}, u_2 \leq e^{-x}, x > a\}$  به نمونه مطلوب از چگالی گامای بریده شده خواهیم

رسید. خروجی این مسئله در پیوست آمده است.

### مسئله ششم

ما در این مسئله مجدداً داده‌های مربوط به پمپ را که در مسئله سوم به آن پرداختیم در نظر می‌گیریم.

توزیع پسین عبارت خواهد بود از:

$$\pi(\{\lambda_i\}, \beta) \propto \frac{\delta^\gamma \beta^{\gamma-1} e^{-\delta\beta}}{\Gamma(\gamma)} \times \prod_{i=1}^{\gamma} \frac{e^{-\lambda_i \theta_i} (\lambda_i \theta_i)^{x_i}}{x_i!} \frac{e^{-\beta \lambda_i} \lambda_i^{\alpha-1} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.$$

نمودار بافت‌نگار نمونه‌های تولید شده از این چگالی که به روش نمونه‌گیری تکه‌ای به دست آمده‌اند در پیوست آورده شده است. برتری این روش در سرعت اجرا و سادگی الگوریتم آن است.

## ۴ بحث

به‌طور کلی در روش‌های شبیه‌سازی ابزارهای مختلفی در دست می‌باشد که مطابق با مسئله مورد نظر باید از روش مخصوص به آن استفاده نمود. اگرچه نتایج حاصل از روش‌های متفاوت MCMC تقریباً یکسان است لیکن بر اساس تجربه و شرایط مسئله باید از روش‌های مناسب‌تر که دارای الگوریتم ساده‌تر و سرعت اجرا بالاتر هستند استفاده نمود. باید توجه داشت که درک شهودی و منطقی از مسئله مورد نظر و استفاده از الگوریتم‌های مناسب در تحلیل آن محقق را از هرگونه انحراف، که جزء لاینفک روش‌های MCMC است، مصون می‌دارد.

```
c[i,j]_exp(-(y[j]/b1[i])^a1[i])}
```

```
c[,4]_a1; c[,5]_b1
```

برنامه مربوط به مسأله سوم

داده‌های پمپ با استفاده از نمونه گیری گیس

```
alpha_0.54; delta_1.11; gam_2.20
beta0_0.25; replic_2000; burn_200
n_10; beta_beta0
tot_burn+replic; a1_n*alpha+gam
x_c(5,1,5,14,3,19,1,1,4,22)
t_c(94.32,15.72,62.88,125.76,5.24,
31.44,1.048,1.048,2.096,10.48)
poslanda_rep(0,10);
poslanda1_matrix(0,10,201)
posbeta_rep(0,200);f1_function(beta){
poslanda_rep(0,10)
for(i in 1:10){
poslanda[i]_rgamma(1,alpha+x[i]
,beta+t[i]);poslanda}
poslanda1[,1]_poslanda
posbeta[1]_beta0;l_rep(0,10)
landa1_matrix(0,10,2000)
bet_rep(0,2000)
for(k in 1:2000){for(j in 1:200){
poslanda1[,j]_f1(posbeta[j])
posbeta[j+1]_rgamma(1,10*alpha+gam
,delta+sum(poslanda1[,j+1]))
l_poslanda1[,200]; b_posbeta[200]}
```

## پیوست

برنامه مربوط به مسأله اول

```
xnew_rep(0,10000);th_.5;x_4;n_8
f1_function(y){(y^(x+1))*((1-y)^(
(n+1-x))}for(i in 1:10000){u_rnorm(1)
th1_(th*exp(u))/(1-th+th*exp(u))
alpha_min(1,(f1(th1)/f1(th))*th*
(1-th)/(th1*(1-th1)))
if(alpha>runif(1)) xnew[i]_th1
else xnew[i]_th ; th_xnew[i] }
hist(xnew)
```

برنامه مربوط به مسأله دوم

```
#program for reliability
n_43; ao_1.5; bo_2500/gamma(1/a+1)
k_5000; q_3; y_c(1000,2000,3000)
f1_function(a,b){a^n*b^(-n*a)
*exp(-sum((x/b)^a))*prod(x^(a-1))}
ai_b1_rep(0,k); c_matrix(0,k,q+2)
for (i in 1:k){
an_1+.5*(runif(1)+runif(1))
bn_(1000*runif(1)+2000)/gamma(1+1/an)
alpha_min(1,f1(an,bn)/f1(ao,bo))
if(runif(1)<alpha) a1[i]_an
b1[i]_bn else a1[i]_ao;b1[i]_bo
ao_an; bo_bn}
a1_matrix(a1,k,1);b1_matrix(b1,k,1)
for(i in 1:k){ for(j in 1:q){
```

برنامه مربوط به مسأله ششم

bet[k]\_b;landa1[,k]\_1}

```
#Gibbs sampler for pomp data
x_c(5,1,5,14,3,19,1,1,4,22)
t_c(94.32,15.72,62.86,125.76,5.24
,31.44,
1.048,1.048,2.096,10.48)
alpha=0.54 delta_1.11 gam_2.20
beta_u11_u12_blower_bupper_a_rep(0,100)
beta[1]_0.25 u1_u2_rep(0,10)
bb_rep(0,2000) for(c in 1:2000){
for(i in 1:100){ u_runif(12)
for(k in 1:10){
u1[k]_u[k]*(beta[i]+t[k])^(-(x[k]
+alpha))}
u11[i]_u[11]*beta[i]^(10*alpha+gam-1)
u12[i]_u[12]*exp(-delta*beta[i])
blower[i]_beta[i]*((u[11]^(1/(10*alpha
+gam-1))))
for(j in 1:10){u2[j]_beta[i]+t[j]*
((u[j])^(-1/x[j]-1))-t[j];a[i]_min(u2)
bupper[i]_min(a[i],beta[i]
-log(u[12])/delta)
beta[i+1]_(bupper[i]-blower[i])
*runif(1)+blower[i]
a_beta[100]};bb[c]_a}
lambda1_lambda2_lambda3_
lambda4_lambda5_
```

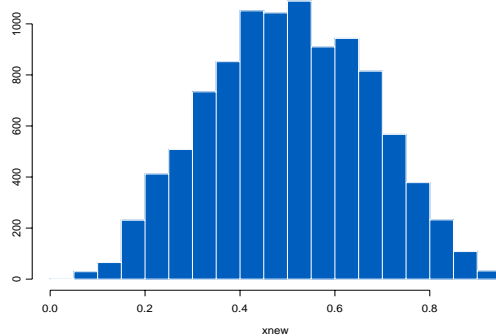
برنامه مربوط به مسأله چهارم

```
#capture recapture
lambda_250; p0_.3
ncap_160; nprime_130
p_notcap_rep(0,200)
p1_notcap1_rep(0,2000)
notcap[1]_120 p[1]_.3
for(k in 1:2000){for(i in 1:200){
p[i+1]_rbeta(1,ncap+1,
2*notcap[i]-ncap+2*nprime+1)
notcap[i+1]_rpois(1,lambda*(1-p[i+1])^2)
a_p[200]; b_notcap[200]}
p1[k]_a;notcap1[k]_b}
```

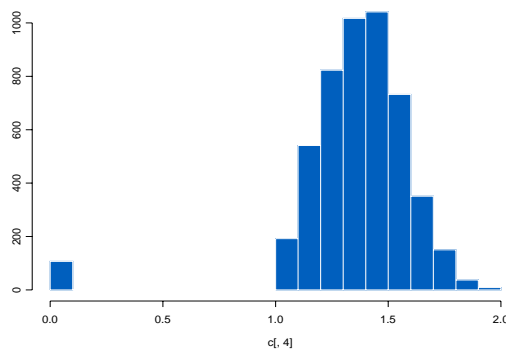
برنامه مربوط به مسأله پنجم

گامای بریده شده با استفاده از نمونه گیری گیبس

```
alpha_3;a_9 x[1]_10
a1_b1_x_u1_u2_rep(0,200)
xn_rep(0,2000)
for(k in 1:2000){for(i in 1:200){
u1[i]_(runif(1)*x[i])^(a-1)
u2[i]_runif(1)*exp(-x[i])
a1[i]_max((u1[i]^(1/(a-1))),a)
b1[i]_-log(u2[i])
x[i+1]_(b1[i]-a1[i])*runif(1)+a1[i]
x1_x[200]};xn[k]_x1}
```



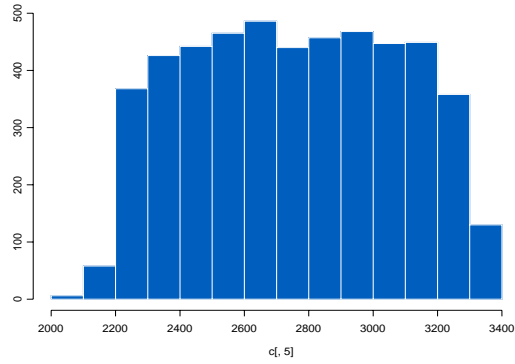
شکل ۱: بافت نگار مسأله اول.

شکل ۲: بافت نگار چگالی پسین مربوط به پارامتر  $\alpha$  - مسأله دوم .

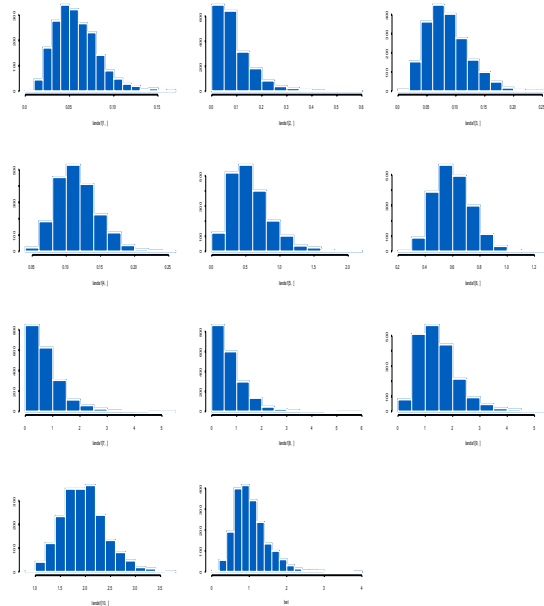
```

(1,alpha+x[5],bb[i]+t[5])}          lambda6_lambda7_lambda8_
for(i in 1:2000){lambda6[i]_rgamma  lambda9_lambda10_rep(0,2000)
(1,alpha+x[6],bb[i]+t[6])}          for(i in 1:2000){lambda1[i]_rgamma
for(i in 1:2000){lambda7[i]_rgamma  (1,alpha+x[1],bb[i]+t[1])}
(1,alpha+x[7],bb[i]+t[7])}          for(i in 1:2000){lambda2[i]_rgamma
for(i in 1:2000){lambda8[i]_rgamma  (1,alpha+x[2],bb[i]+t[2])}
(1,alpha+x[8],bb[i]+t[8])}          for(i in 1:2000){lambda3[i]_rgamma
for(i in 1:2000){lambda9[i]_rgamma  (1,alpha+x[3],bb[i]+t[3])}
(1,alpha+x[9],bb[i]+t[9])}          for(i in 1:2000){lambda4[i]_rgamma
for(i in 1:2000){lambda10[i]_rgamma (1,alpha+x[4],bb[i]+t[4])}
(1,alpha+x[10],bb[i]+t[10])}        for(i in 1:2000){lambda5[i]_rgamma

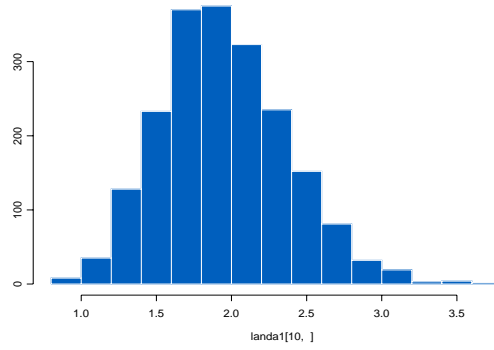
```



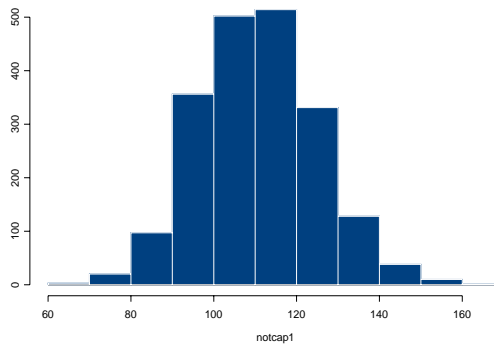
شکل ۳: بافت نگار چگالی پسین پارامتر  $\beta$  - مسأله دوم .



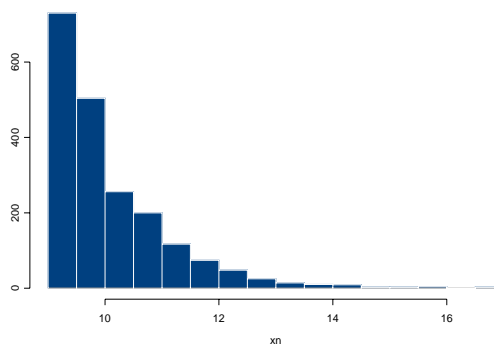
شکل ۴: بافت نگار چگالی‌های پسین  $10$  ایمپ به همراه پارامتر  $\beta$  - مسأله سوم.



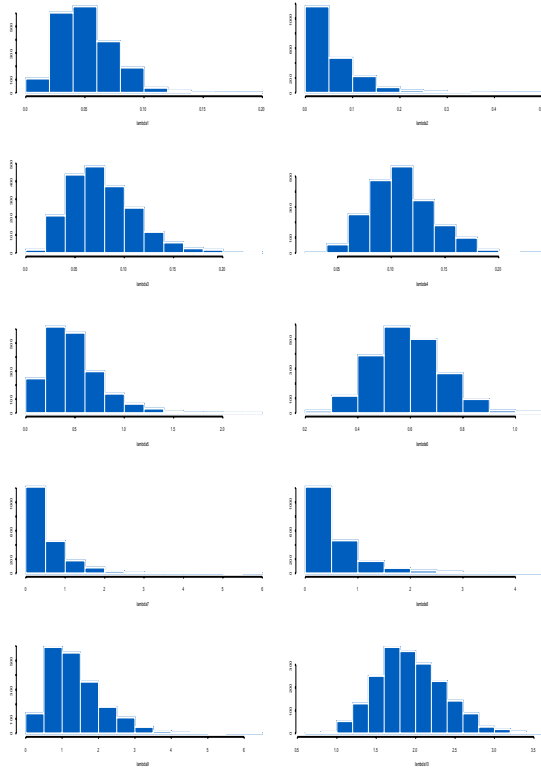
شکل ۵: بافت نگار چگالی پسین پارامتر  $P$  - مسأله چهارم .



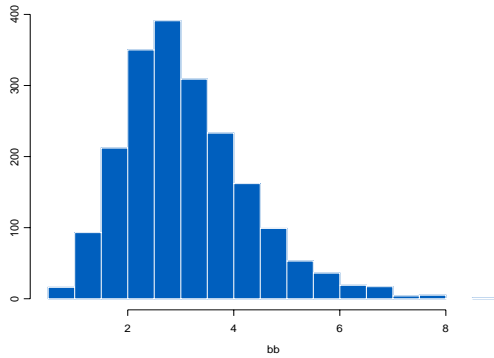
شکل ۶: بافت نگار چگالی پسین پارامتر  $N'$  - مسأله چهارم .



شکل ۷: بافت نگار چگالی پسین گامای دم بریده - مسأله پنجم .



شکل ۸: بافت نگار چگالی های پسین مسأله ششم .



شکل ۹: بافت نگار چگالی پسین پارامتر  $\beta$  مسأله ششم .

## مراجع

- [1] Bradley, P.C. and Thomas, A.L. (2000), *Bayesian and Emperical Bayes Methods*, 2nd ED., Chapman and Hall.
- [2] Casella, G. and George, E.I. (1992), Explaining the Gibbs sampler, *American Statistician*, 46, 167-174.
- [3] Dagpunar, J.S. (1978), Sampling of variates from a truncated gamma distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 8, 59-64.
- [4] Gaver, D.P. and O'Muircheartaigh, I.G. (1987), Robust empirical bayes analyses of eventrates, *Technometrics*, 29, 1-15.
- [5] Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M. (1990), Sampling-Based approaches to calculating marginal densities, *Journal of the American Statistical Association*, 85, 398-409.
- [6] Geman, S. and Geman, D. (1984), Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *Institute of electrical and electronics engineers, Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6, 721-741.
- [7] George, E.I. and Robert C.P. (1992), Capture-recapture estimation via Gibbs sampling, *Biometrika*, 79, 677-683.
- [8] Hastings, D. (1970), Monte Carlo methods using Markov chains and thier application, *Biometrika*, 57, 97-109.
- [9] Marin, J.M. and Robert, C.P. (2007), *Bayesian Core*, Springer, New York/
- [10] Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H. and Teller, E. (1953), Equations of state calculations by fast computing machines, *Journal of Chemical Physics*, 21, 1087-1092.
- [11] Neal, R.M. (2003), Slice sampling (with discussion), *Annals of Statistics*, 31, 705-767.
- [12] Newman, M.E.J. and Barkema, G.T. (1999), *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*, Clarendon Press, Oxford.

- 
- [13] Percy, D.F. (2002), Bayesian enhanced strategic decision making for reliability, *European Journal of Operational Research*, 139, 133-145.
- [14] Robert, C.P. and Casella, G. (2005), *Monte Carlo Statistical Methods*, 2nd ed, Springer, New York.
- [15] Smith, A.F.M. and Robert, G.O. (1993), Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods (with discussion), *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, 55, 3-23.