استنباط برای پارامترهای مکان و مقیاس توزیع رایلی براساس داده‌های سانسور شده دو طرفه نوع II

اکبر اصغرزاده[۱] ، موسیٰ عبدی [۲]

چکیده:

در این مقاله، مسئله برآورد پارامترهای مکان و مقیاس توزیع رایلی تحت داده‌های سانسور شده دو طرفه نوع II (r تا نمونه از سمت چپ و s تا نمونه از سمت راست) مورد بررسی قرار می‌گیرد. چون روش درستنمایی ماکزیمم برای پارامترهای توزیع رایلی براساس نمونه‌های سانسور شده دو طرفه نوع II برآوردگرهای صریحی ارائه نمی‌دهد، لذا برای محاسبه برآوردهای درستنمایی ماکزیمم (MLE) باید از روش‌های عددی استفاده شود. با استفاده از سری تیلور با تقریب تابع درستنمایی، برآوردهای تقریبی را برای پارامترها به دست می‌آوریم. احتمالات پوشش و فواصل اطمینان از روش کمیت محوری و با استفاده از خاصیت مجانبی MLE برای برآوردهای تقریبی و دقیق که از روش‌های عددی به دست آمده، محاسبه می‌شوند. با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو برای نمونه‌های با اندازه‌های $N = ۱۰, ۳۰$ و برای $r, s = ۰, ۱, ۲, ۳$، معدل مقادیر برآوردها و واریانس آنها و نیز احتمالات پوشش و فواصل اطمینان محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در انتها نتایج با یک مثال عددی تشریح خواهند شد.

واژه‌های کلیدی: احتمال‌های پوشش، اطلاع فیشر، برآورد درستنمایی ماکزیمم، توزیع رایلی، شبیه سازی مونت کارلو، نمونه سانسور شده دو طرفه نوع II.

۱ مقدمه

فرض کنید زمان خرابی قطعات در یک آزمایش طول عمر دارای توزیع رایلی[۳] با تابع توزیع تجمعی زیر باشد:

$$G(y;\mu,\sigma) = ۱ - e^{-\frac{(y-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}, \ \ y > \mu \ ,\sigma > ۰ \quad (۱)$$

که در آن $\mu \in R$ پارامتر مکان و $\sigma > ۰$ پارامتر مقیاس می‌باشد. تابع قابلیت اطمینان و تابع نرخ خرابی برای توزیع رایلی به ترتیب عبارتند از:

$$R(t) = e^{-\frac{(t-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}, \ \ t > \mu \ ,\sigma > ۰, \quad (۲)$$

$$H(t) = \frac{t-\mu}{\sigma^۲}, \quad t > \mu \ ,\sigma > ۰. \quad (۳)$$

---
[۱] عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه مازندران
[۲] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد آمار دانشگاه مازندران
[۳] Rayleigh distribution

توزیع رایلی در مهندسی مخابرات کاربرد فراوانی دارد. این توزیع دارای نرخ خرابی صعودی است، بر این اساس توزیع رایلی می‌تواند برای طول عمر یک قطعه در آزمایش‌های طول عمر که نقص تولیدی ندارد اما به سرعت کهنه می‌شود، مدلی مناسب باشد. برای مطالعه بیشتر درباره توزیع رایلی می‌توان به [۳، ۴ و ٦] مراجعه کرد.

N قطعه را به‌طور همزمان تحت آزمایش قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم طول عمر قطعات از توزیع رایلی با تابع توزیع (۱) پیروی کند. همچنین فرض کنید برخی از مشاهدات اولیه (شاید به‌خاطر خرابی‌ها در طول زمان وقتی که بررسی‌ها و تنظیمات روی دستگاه‌ها در حال انجام هستند) و همچنین بعضی از مشاهدات انتهایی (شاید به خاطر توقف آزمایش قبل از اینکه همه قطعات خراب شوند) سانسور شده‌اند. بنابراین

$$Y_{r+1:N} \leq Y_{r+2:N} \leq \cdots \leq Y_{N-s:N} \qquad (4)$$

یک نمونه سانسور شده دو طرفه نوع II از توزیع رایلی با تابع توزیع تجمعی (۱) باشد که در آن r مشاهده اولیه و s مشاهده انتهایی سانسور شده‌اند. برای اطلاعات بیشتر روی داده‌های سانسور شده می‌توان به [۵] مراجعه کرد. در [۱] و [۳] یک روش تقریبی برای برآورد درستنمایی ماکزیمم پارامتر مقیاس توزیع رایلی تک پارامتری با پارامتر مقیاس σ ارائه شده است. ما این روش را برای مدل دو پارامتری براساس تابع توزیع تجمعی مدل رایلی در (۱) تعمیم داده و به کمک آن براوردهای تقریبی پارامترهای μ و σ را به دست می‌آوریم.

۲ براوردهای درستنمایی ماکزیمم

فرض کنید زمان خرابی قطعات (Y)، دارای توزیع رایلی با تابع توزیع تجمعی (۱) با پارامتر مکان $\mu \in R$ و پارامتر مقیاس $\sigma > 0$ باشد. در این صورت متغیر تصادفی $X = (Y-\mu)/\sigma$ دارای توزیع رایلی استاندارد به ترتیب با تابع توزیع و تابع چگالی زیر است:

$$F(x) = 1 - e^{\frac{-x^2}{2}}, \qquad x > 0,$$
$$f(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}, \qquad x > 0.$$

براساس نمونه سانسور شده دو طرفه نوع II در (۴) و با فرض اینکه $g(y)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y باشد، تابع درستنمایی نمونه عبارت است از:

$$L = \frac{N!}{r!s!}[G(Y_{r+1:N})]^r[\overline{G}(Y_{N-s:N})]^s \times \prod_{i=r+1}^{N-s} g(Y_{i:N})$$

که آن را می‌توان بر حسب مدل رایلی استاندارد به صورت زیر نوشت:

$$L = \frac{N!}{r!s!}\sigma^{-A}[F(X_{r+1:N})]^r[\overline{F}(X_{N-s:N})]^s \times \prod_{i=r+1}^{N-s} f(X_{i:N})$$

که در آن

$$A = N - r - s, \qquad \overline{F}(x) = 1 - F(x).$$

اگر فرض کنیم که:

$$h_1(X_{r+1:N}) = \frac{f(X_{r+1:N})}{F(X_{r+1:N})}, \quad h_2(X_{i:N}) = \frac{f'(X_{i:N})}{f(X_{i:N})}$$

با توجه به رابطه $f(x) = x\overline{F}(x)$، معادلات درستنمایی برای μ و σ به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L &= -\frac{1}{\sigma}\Big[rh_1(X_{r+1:N}) - sX_{N-s:N} \\ &\quad + \sum_{i=r+1}^{N-s} h_2(X_{i:N})\Big] = 0, \qquad (5)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L &= -\frac{1}{\sigma}\Big[A \\ &\quad + rX_{r+1:N}h_1(X_{r+1:N}) - sX_{N-s:N}^2 \\ &\quad + \sum_{i=r+1}^{N-s} X_{i:N}h_2(X_{i:N})\Big] = 0 \qquad (6)\end{aligned}$$

چون توابع $h_1(X_{r+1:N})$ و $h_2(X_{i:N})$ هر دو غیر خطی هستند، معادلات (۵) و (۶) جواب‌های صریحی برای برآوردهای μ و σ ارائه نمی‌دهند، بنابراین بایستی از روش‌های عددی برای به دست آوردن برآوردهای ML استفاده کرد. برای حالت تک پارامتری با پارامتر مقیاس σ وقتی $r = 0$ است یک جواب صریح می‌توان برای پارامتر σ به دست آورد [۷]

۳ برآوردهای درستنمایی ماکزیمم تقریبی

اگر توابع $h_1(X_{r+1:N})$ و $h_2(X_{i:N})$ را به کمک سری تیلور به ترتیب حول نقاط $F^{-1}(p_{r+1}) = [-2\ln(q_{r+1})]^{\frac{1}{2}}$ و $F^{-1}(p_i) = [-2\ln(q_i)]^{\frac{1}{2}}$ بسط دهیم که در آن $p_i \equiv \frac{i}{N+1}$ و $q_i \equiv 1 - p_i$ می باشند، در این صورت می‌توان آن‌ها را به صورت توابع خطی تقریبی به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}&h_1(X_{r+1:N}) \approx \gamma + \delta X_{r+1:N}, \\ &h_2(X_{i:N}) \approx \alpha_i + \beta_i X_{i:N} \qquad (7)\end{aligned}$$

که در آن‌ها

$$\begin{aligned}\gamma &\equiv \frac{q_{r+1}[-2\ln(q_{r+1})]^{\frac{3}{2}}}{p_{r+1}^2}, \\ \delta &\equiv \frac{q_{r+1}[1 + 2\ln(q_{r+1})/p_{r+1}]}{p_{r+1}}, \\ \alpha_i &\equiv \frac{2}{(-2\ln q_i)^{\frac{1}{2}}}, \\ \beta_i &\equiv \frac{-(2\ln q_i - 1)}{2\ln q_i}.\end{aligned}$$

اکنون معادلات (۵) و (۶) را می‌توان به صورت تقریبی به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L &\approx \frac{\partial}{\partial\mu}\ln L^* = \\ &- \frac{1}{\sigma}[r(\gamma + \delta X_{r+1:N}) - sX_{N-s:N} \\ &+ \sum_{i=r+1}^{N-s}(\alpha_i + \beta_i X_{i:N})] = 0, \quad (8)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L \approx \frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L^* = -\frac{1}{\sigma}[A + rX_{r+1:N}$$

$$(\gamma + \delta X_{r+1:N}) - sX^{2}_{N-s:N} + \sum_{i=r+1}^{N-s} X_{i:N}(\alpha_i + \beta_i X_{i:N})] = 0. \quad (9)$$

با حل معادله (۸) بر حسب پارامتر μ، برآورد درستنمایی ماکزیمم تقریبی (AMLE[4]) برای پارامتر μ عبارتست از:

$$\widetilde{\mu} = B + \sigma C. \quad (10)$$

که در آن

$$B = \frac{r\delta Y_{r+1:N} - sY_{N-s:N} + \sum_{i=r+1}^{N-s} \beta_i Y_{i:N}}{m},$$
$$C = \frac{r\gamma + \sum_{i=r+1}^{N-s} \alpha_i}{m},$$

به‌طوری که

$$m = \sum_{i=r+1}^{N-s} \beta_i + r\delta - s.$$

بنابراین با جایگذاری $\widetilde{\mu}$ در معادله (۹)، AMLE برای پارامتر σ را می‌توان به شکل زیر به دست آورد:

$$\widetilde{\sigma} = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4AE}}{2A}, \quad (11)$$

که در آن

$$D = r(\gamma - 2\delta C)(Y_{r+1:N} - B) + 2sC(Y_{N-s:N} - B) + \sum_{i=r+1}^{N-s} (Y_{i:N} - B)(\alpha_i - 2C\beta_i),$$

و

$$E = r\delta(Y_{r+1:N} - B)^2 - s(Y_{N-s:N} - B)^2 + \sum_{i=r+1}^{N-s} \beta_i (Y_{i:N} - B)^2.$$

توجه کنید که با جایگذاری $\widetilde{\mu}$ در معادله (۹) یک معادله درجه دوم از پارامتر σ با دو ریشه به دست می‌آید. اما چون $\delta < 0$ و $\beta_i < 0$، پس همواره $E < 0$ خواهد بود، بنابراین ریشه دوم قابل قبول نمی‌باشد.

۴ خواص مجانبی

در این بخش خواص مجانبی MLE و AMLE برای پارامتر مقیاس σ براساس توابع درستنمایی در (۶) و (۹) مورد بررسی قرار می‌گیرد. از معادله (۹) داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} \ln L^* = \frac{1}{\sigma^2}[A + 2r\gamma X_{r+1:N} + 3r\delta X^2_{r+1:N} - 3sX^2_{N-s:N} + 2\sum_{i=r+1}^{N-s} \alpha_i X_{i:N} + 3\sum_{i=r+1}^{N-s} \beta_i X^2_{i:N}].$$

اگر قرار دهیم $-\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} \ln L^* = \frac{V^*}{\sigma^2}$، در این صورت از عبارت فوق می‌توان برای محاسبه واریانس مجانبی برآوردگر AML برای پارامتر σ استفاده کرد. چون $\widetilde{\sigma}$ حل معادله درستنمایی در (۹) می‌باشد لذا برای مقادیر بزرگ N داریم:

$$\widetilde{\sigma} \simeq N(\sigma, \frac{\sigma^2}{V^*}), \quad (12)$$

[4] Approximate Maximum Likelihood Estimatior

که در آن

$$V^* = ۳(sX^۲_{N-s:N} - r\delta X^۲_{r+۱:N} - \sum_{i=r+۱}^{N-s} \beta_i X^۲_{i:N}) - ۲(r\gamma X_{r+۱:N} + \sum_{i=r+۱}^{N-s} \alpha_i X_{i:N}) - A.$$

به‌طور مشابه برای معادله درستنمایی در (۶) داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲}{\partial\sigma^۲}\ln L &= \frac{۱}{\sigma^۲}[A + ۲rX_{r+۱:N}h_۱(X_{r+۱:N}) \\ &+ rX^۲_{r+۱:N}h'_۱(X_{r+۱:N}) - ۳sX^۲_{N-s:N} \\ &+ ۲\sum_{i=r+۱}^{N-s} X_{i:N}h_۲(X_{i:N}) \\ &+ ۳\sum_{i=r+۱}^{N-s} X^۲_{i:N}h'_۲(X_{i:N})].\end{aligned}$$

با فرض $-\frac{\partial^۲}{\partial\sigma^۲}\ln L = \frac{V}{\sigma^۲}$، همانند قسمت قبل با مقادیر بزرگ N برای $\widehat{\sigma}$ داریم:

$$\widehat{\sigma} \simeq N(\sigma, \frac{\sigma^۲}{V}), \qquad (۱۳)$$

به‌طوری که

$$\begin{aligned}V &= ۳[sX^۲_{N-s:N} - \sum_{i=r+۱}^{N-s} X^۲_{i:N}h'_۲(X_{i:N})] \\ &- ۲[rX_{r+۱:N}h_۱(X_{r+۱:N}) \\ &+ \sum_{i=r+۱}^{N-s} X_{i:N}h_۲(X_{i:N})] \\ &- rX^۲_{r+۱:N}h'_۱(X_{r+۱:N}) - A.\end{aligned}$$

چون دامنه متغیر به پارامتر μ وابسته است لذا نمی‌توان توزیع مجانبی برآوردهای ML و AML را برای پارامتر μ بدست آورد (برای اطلاعات بیشتر می‌توان به [۲] مراجعه کرد).

۵ احتمالات پوشش و فواصل اطمینان

برای ساختن فاصله اطمینان یا انجام یک آزمون فرض برای پارامتر مقیاس σ ابتدا باید یک کمیت محوری مناسب تعیین کرد. چون $\widehat{\sigma}$ و $\widetilde{\sigma}$ دارای توزیع مجانبی نرمال هستند، بنابراین:

$$P_۱ = \frac{\widetilde{\sigma} - \sigma}{\widetilde{\sigma}/\sqrt{V^*}}, \quad P_۲ = \frac{\widehat{\sigma} - \sigma}{\widehat{\sigma}/\sqrt{V}} \qquad (۱۴)$$

دارای توزیع تقریبی نرمال استاندارد می‌باشند. از طرفی توزیع های $P_۱$ و $P_۲$ مستقل از پارامتر می‌باشند لذا کمیت‌های محوری هستند. با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو[۵]، احتمالات پوشش ۹۵٪ برای P_iها به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$P(-۱/۹۶ \le P_i \le ۱/۹۶), \quad i = ۱,۲.$$

در جدول (۳) این احتمالات پوشش برای $P_۱$ محاسبه شده‌اند. با توجه به جدول واضح است که احتمالات پوشش رضایت بخش نیستند، به‌خصوص وقتی که اندازه نمونه کوچک باشد. از این رو پیشنهاد می‌شود از صدک‌های نمونه‌ای که از کمیت‌های محوری براساس شبیه سازی مونت کارلو به دست می‌آیند، استفاده شود. این صدک‌ها برای ساختن فواصل اطمینان برای پارامتر σ مفید خواهد بود. برای مثال اگر $P_{۱,\alpha/۲}$ و $P_{۱,۱-\alpha/۲}$ به ترتیب صدک‌های نمونه‌ای $\frac{\alpha}{۲}$ پایینی و بالایی

[۵] Monte Carlo simulation

برای کمیت محوری P_1 و $P_{2,\alpha/2}$ و $P_{2,1-\alpha/2}$ به ترتیب صدک‌های نمونه‌ای $\frac{\alpha}{2}$ پایینی و بالایی برای کمیت محوری P_2 باشند، در این صورت فواصل

$$\left(\widetilde{\sigma}-\widetilde{\sigma}\frac{P_{1,1-\alpha/2}}{\sqrt{V^*}},\widetilde{\sigma}+\widetilde{\sigma}\frac{P_{1,\alpha/2}}{\sqrt{V^*}}\right)$$
$$\left(\widehat{\sigma}-\widehat{\sigma}\frac{P_{2,1-\alpha/2}}{\sqrt{V}},\widehat{\sigma}+\widehat{\sigma}\frac{P_{2,\alpha/2}}{\sqrt{V}}\right)$$

فواصل اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای پارامتر σ به ترتیب بر پایه کمیت‌های محوری P_1 و P_2 خواهند بود.

۶ محاسبات عددی

در این بخش یک مثال عددی و یک مطالعه شبیه سازی برای بررسی روش‌های ارائه شده در بخش‌های قبل ارائه می‌شود.

۱.۶ مثال عددی

با استفاده از یک مثال عددی که به کمک نرم افزار $SPLUS$ شبیه سازی می‌شود، به تشریح نتایج بدست آمده می‌پردازیم. ابتدا یک نمونه سانسور شده دو طرفه نوع II از توزیع رایلی استاندارد با پارامترهای $\mu=0$ و $\sigma=1$ تولید می کنیم، مراحل زیر برای شبیه سازی یک نمونه سانسور شده دو طرفه نوع II مورد استفاده قرار می‌گیرد:

۱) ابتدا یک نمونه تصادفی N تایی از توزیع یکنواخت در بازه $(0,1)$ تولید کرده و آن‌ها را با $U_1,U_2,\cdots,U_N$ نمایش می‌دهیم.

۲) با استفاده از قضیه تبدیل انتگرال احتمال قرار می‌دهیم:

$$X_i=G^{-1}(U_i)=\mu+\sigma[-2\ln(1-U_i)]^{\frac{1}{2}},\qquad (i=1,2,\cdots,N)$$

که در آن $G(.)$ تابع توزیع رایلی در رابطه (۱) می‌باشد. در این حالت $X_1,X_2,\cdots,X_N$ یک نمونه تصادفی N تایی از توزیع رایلی با پارامتر مکان μ و پارامتر مقیاس σ می‌باشد.

۳) نمونه تصادفی به دست آمده از قسمت قبل را مرتب می‌کنیم.

۴) حال اگر r تا نمونه از چپ و s تا نمونه از راست حذف شوند، نمونه باقیمانده یک نمونه سانسور شده دو طرفه نوع II از توزیع رایلی با پارامترهای μ و σ می‌باشد.

فرض کنید نمونه تصادفی با حجم ۲۰ از توزیع رایلی با پارامترهای $\mu=0$ و $\sigma=1$ تولید شود. اگر $r=4$ تا نمونه از چپ و $s=3$ تا نمونه از راست سانسور شوند، آنگاه نمونه زیر یک نمونه سانسور شده دو طرفه نوع II از توزیع رایلی با پارامترهای $\mu=0$ و $\sigma=1$ می‌باشد:

۰٫۹۸۶۳　۰٫۹۹۲۳　۱٫۰۶۳۱　۱٫۰۷۴۳
۱٫۰۹۵۴　۱٫۲۷۱۵　۱٫۲۷۹۰　۱٫۳۱۸۴
۱٫۵۵۳۹　۱٫۷۳۰۶　۱٫۷۷۹۵　۱٫۷۹۷۸
۲٫۲۰۳۹

برای این نمونه نتایج زیر به دست می‌آیند:

$$N = 20, \quad A = N - r - s = 13$$
$$p_i = \frac{i}{N+1} = \frac{i}{21} \Rightarrow p_{r+1} = p_5 = \frac{5}{21}$$
$$\gamma = 5/3906, \quad \delta = -4/1096,$$
$$\alpha_i = \frac{2}{(-2\ln q_i)^{1/2}}, \quad \beta_i = \frac{-(2\ln q_i - 1)}{2\ln q_i}$$
$$B = 1/2534, \quad C = -1/0266,$$
$$D = -12/2516, \quad E = -6/888,$$
$$V^* = 0/1845, \quad V = 0/0435.$$

بنابراین برآوردهای AML برای پارامترها از روابط (۱۰) و (۱۱) عبارتند از:

$$\widetilde{\sigma}_{AMLE} = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4AE}}{2A} = 1/3384,$$
$$\widetilde{\mu}_{AMLE} = B + C\widetilde{\sigma}_{AMLE}, = -0/1205.$$

همچنین MLE برای پارامترها از روش‌های عددی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\widehat{\mu}_{MLE} = 0/1525, \quad \widehat{\sigma}_{MLE} = 0/9626.$$

فواصل اطمینان ۹۰٪ و ۹۵٪ برای σ که با استفاده از کمیت‌های محوری در (۱۴) و استفاده از (۱۲) محاسبه می‌شوند، به ترتیب عبارتند از:

$$(\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}\frac{1/65}{\sqrt{V^*}}, \widetilde{\sigma} + \widetilde{\sigma}\frac{1/65}{\sqrt{V^*}}) = (0/3898, 2/2869)$$
$$(\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}\frac{1/96}{\sqrt{V^*}}, \widetilde{\sigma} + \widetilde{\sigma}\frac{1/96}{\sqrt{V^*}}) = (0/2116, 2/4651)$$

همچنین فواصل اطمینان ۹۰٪ و ۹۵٪ برای σ که با استفاده از کمیت‌های محوری در (۱۴) و استفاده از (۱۳) محاسبه می‌شوند، به ترتیب عبارتند از:

$$(\widehat{\sigma} - \widehat{\sigma}\frac{1/65}{\sqrt{V}}, \widehat{\sigma} + \widehat{\sigma}\frac{1/65}{\sqrt{V}}) = (0/6312, 1/2940)$$
$$(\widehat{\sigma} - \widehat{\sigma}\frac{1/96}{\sqrt{V}}, \widehat{\sigma} + \widehat{\sigma}\frac{1/96}{\sqrt{V}}) = (0/5689, 1/3562)$$

برآوردهای MLE و AMLE برای توابع $R(t)$ و $H(t)$ برای $t = 1$ عبارتند از:

$$\begin{cases} \widetilde{R}_{AMLE} = exp\left[-\frac{(t-\widetilde{\mu}_{AMLE})^2}{2(\widetilde{\sigma}_{AMLE})^2}\right]\Big|_{t=1} = 0/7044, \\ \widetilde{H}_{AMLE} = \frac{t-\widetilde{\mu}_{AMLE}}{(\widetilde{\sigma}_{AMLE})^2}\Big|_{t=1} = 0/6256, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{R}_{MLE} = exp\left[-\frac{(t-\widehat{\mu}_{MLE})^2}{2(\widehat{\sigma}_{MLE})^2}\right]\Big|_{t=1} = 0/6786, \\ \widehat{H}_{MLE} = \frac{t-\widehat{\mu}_{MLE}}{(\widehat{\sigma}_{MLE})^2}\Big|_{t=1} = 0/9147. \end{cases}$$

۲.۶ شبیه سازی

در این قسمت شبیه سازی مونت کارلو با تعداد تکرار ۲۰۰۰ بار، به منظور مقایسه برآوردهای ML و AML با استفاده از نرم افزار $SPLUS$ انجام می‌شود.

با استفاده از الگوریتم بیان شده در بخش قبل، نمونه‌های سانسور شده دو طرفه از توزیع رایلی با پارامترهای $\mu = 1$ و $\sigma = 1$ تولید می‌شوند. برآوردهای AML پارامترها از روابط (۱۰) و

(۱۱) به دست می آیند. همچنین برآوردهای ML پارامترها از توابع درستنمایی در (۵) و (۶) که دو معادله غیر خطی بر حسب μ و σ هستند، با استفاده از تابع $optim$ در نرم افزار $SPLUS$ محاسبه می‌شوند. جداول (۱) و (۲)، معدل مقادیر برآوردها و واریانس آنها را نشان می دهند.

از این جداول مشاهده می‌شود که با افزایش حجم نمونه (N) اریبی و واریانس برآوردگرهای ML و AML کاهش می‌یابند. با افزایش $r+s$ اریبی و واریانس برآوردگرها افزایش می‌یابند و از دقت آن‌ها کاسته می‌شود. به طور کلی برآوردهای ML و AML برای پارامتر μ دارای بیش برآوردی و برای پارامتر σ دارای کم برآوردی است.

از جدول (۳) نیز مشاهده می‌شود که احتمالات پوشش که از خاصیت مجانبی برآوردگرها، با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو به‌دست می آیند خیلی رضایت بخش نیستند و با افزایش $r+s$ نتایج بدتر نیز می‌شوند. بدین دلیل از صدک‌های شبیه سازی شده به جای صدک های نرمال برای تعیین فواصل اطمینان استفاده می شود. در جدول (۳) صدک‌های شبیه سازی شده برای AMLE ارائه شده‌اند.

با جایگذاری MLE و AMLE در روابط (۲) و (۳) برآوردهای $R(t)$ و $H(t)$ محاسبه می‌شوند. جدول (۴) معدل مقادیر این برآوردها را برای یک نمونه ۳۰ تایی با $t=۱$ و ۲۰۰۰ بار شبیه سازی مونت کارلو نشان می‌دهد. از این جدول مشاهده می‌شود که این مقادیر به مقادیر واقعی $R(۱)=۰/۶۰۶۵۳$ و $H(۱)=۱$ نزدیک می‌باشند.

جدول ۱. میانگین و واریانس برآوردهای AMLE و MLE وقتی $N=۱۰$.

(r,s)	$\widetilde{\mu}$	$\widetilde{\sigma}$	$var(\widetilde{\mu})$	$var(\widetilde{\sigma})$	$\widehat{\mu}$	$\widehat{\sigma}$	$var(\widehat{\mu})$	$var(\widehat{\sigma})$
(۰,۰)	۱/۰۱۲۰	۰/۸۶۲۳	۰/۰۵۶۴	۰/۰۴۱۹	۱/۰۱۲۰	۰/۸۸۶۰	۰/۰۶۱۲	۰/۰۴۴۰
(۰,۱)	۱/۰۱۰۵	۰/۸۴۲۸	۰/۰۵۲۴	۰/۰۴۴۳	۱/۰۱۰۵	۰/۸۷۱۸	۰/۰۵۷۷	۰/۰۴۷۴
(۰,۲)	۱/۰۱۳۸	۰/۸۲۶۹	۰/۰۵۸۸	۰/۰۵۴۳	۱/۰۱۳۸	۰/۸۵۷۹	۰/۰۶۷۶	۰/۰۶۰۲
(۰,۳)	۱/۰۰۵۵	۰/۸۰۴۱	۰/۰۵۶۴	۰/۰۶۱۸	۱/۰۰۵۵	۰/۸۳۷۴	۰/۰۶۶۱	۰/۰۷۰۶
(۱,۰)	۱/۰۹۳۵	۰/۸۹۵۹	۰/۰۸۱۲	۰/۰۵۵۵	۱/۰۹۳۵	۰/۹۰۲۰	۰/۰۸۳۱	۰/۰۵۶۰
(۱,۱)	۱/۰۴۲۵	۰/۸۸۱۸	۰/۰۸۲۹	۰/۰۵۹۶	۱/۰۴۲۵	۰/۸۸۹۳	۰/۰۸۷۳	۰/۰۶۱۴
(۱,۲)	۱/۰۶۵۴	۰/۸۴۷۳	۰/۰۹۴۴	۰/۰۷۲۰	۱/۰۹۵۴	۰/۸۵۵۲	۰/۱۰۳۳	۰/۰۷۵۸
(۱,۳)	۱/۰۹۷۵	۰/۸۳۳۱	۰/۰۹۱۶	۰/۰۸۴۳	۱/۰۹۷۵	۰/۸۴۰۷	۰/۱۰۲۱	۰/۰۹۰۲
(۲,۰)	۱/۱۵۷۱	۰/۸۹۰۹	۰/۱۱۳۷	۰/۰۶۸۵	۱/۱۴۶۱	۰/۸۹۲۱	۰/۱۱۷۶	۰/۰۶۹۳
(۲,۱)	۱/۲۰۰۸	۰/۸۵۹۲	۰/۱۲۷۸	۰/۰۷۹۱	۱/۱۸۹۵	۰/۸۶۱۷	۰/۱۳۱۵	۰/۰۸۰۱
(۲,۲)	۱/۱۷۸۱	۰/۸۳۰۳	۰/۱۳۰۴	۰/۰۹۰۵	۱/۱۷۸۱	۰/۸۳۲۷	۰/۱۳۶۴	۰/۰۹۳۳
(۲,۳)	۱/۱۹۷۰	۰/۸۰۹۳	۰/۱۴۷۹	۰/۱۱۹۶	۱/۱۹۷۰	۰/۸۱۱۱	۰/۱۵۹۱	۰/۱۲۴۵
(۳,۰)	۱/۱۸۰۹	۰/۸۸۸۶	۰/۱۷۱۲	۰/۰۸۵۸	۱/۱۷۵۲	۰/۸۸۷۸	۰/۱۷۴۷	۰/۰۸۶۳
(۳,۱)	۱/۲۵۰۴	۰/۸۲۳۲	۰/۱۶۴۱	۰/۰۸۹۶	۱/۲۴۴۱	۰/۸۲۳۷	۰/۱۶۸۱	۰/۰۹۰۸
(۳,۲)	۱/۲۴۹۶	۰/۸۰۷۱	۰/۱۹۵۱	۰/۱۱۵۱	۱/۲۴۴۳	۰/۸۰۷۸	۰/۲۰۱۸	۰/۱۱۷۴
(۳,۳)	۱/۲۶۸۸	۰/۷۴۳۳	۰/۱۹۵۹	۰/۱۲۸۵	۱/۲۶۸۸	۰/۷۴۰۹	۰/۲۰۷۶	۰/۱۳۵۶

جدول ۲. میانگین و واریانس برآوردهای AMLE و MLE وقتی $N = ۳۰$.

(r, s)	$\widetilde{\mu}$	$\widetilde{\sigma}$	$var(\widetilde{\mu})$	$var(\widetilde{\sigma})$	$\widehat{\mu}$	$\widehat{\sigma}$	$var(\widehat{\mu})$	$var(\widehat{\sigma})$
(۰,۰)	۱٫۰۱۰۵	۰٫۹۳۸۶	۰٫۰۱۶۴	۰٫۰۱۳۳	۱٫۰۱۰۵	۰٫۹۵۴۳	۰٫۰۱۶۳	۰٫۰۱۳۷
(۰,۱)	۱٫۰۰۵۵	۰٫۹۴۵۱	۰٫۰۱۵۴	۰٫۰۱۳۹	۱٫۰۰۵۵	۰٫۹۶۰۹	۰٫۰۱۵۷	۰٫۰۱۴۲
(۰,۲)	۱٫۰۰۱۳	۰٫۹۴۰۷	۰٫۰۱۶۰	۰٫۰۱۶۰	۱٫۰۰۱۳	۰٫۹۵۷۷	۰٫۰۱۶۳	۰٫۰۱۶۶
(۰,۳)	۱٫۰۰۸۰	۰٫۹۳۴۶	۰٫۰۱۵۸	۰٫۰۱۶۳	۱٫۰۰۸۰	۰٫۹۵۱۵	۰٫۰۱۵۸	۰٫۰۱۶۵
(۱,۰)	۱٫۰۳۹۳	۰٫۹۶۴۴	۰٫۰۱۸۴	۰٫۰۱۴۵	۱٫۰۳۹۳	۰٫۹۷۰۲	۰٫۰۱۸۶	۰٫۰۱۴۷
(۱,۱)	۱٫۰۶۲۴	۰٫۹۵۵۱	۰٫۰۱۸۸	۰٫۰۱۶۳	۱٫۰۴۹۵	۰٫۹۶۱۳	۰٫۰۱۸۹	۰٫۰۱۶۴
(۱,۲)	۱٫۰۵۵۳	۰٫۹۵۵۶	۰٫۰۱۹۶	۰٫۰۱۷۳	۱٫۰۵۲۴	۰٫۹۶۲۳	۰٫۰۱۹۹	۰٫۰۱۷۵
(۱,۳)	۱٫۰۷۵۰	۰٫۹۵۰۸	۰٫۰۲۱۲	۰٫۰۱۷۸	۱٫۰۵۸۷	۰٫۹۵۷۶	۰٫۰۲۱۳	۰٫۰۱۷۹
(۲,۰)	۱٫۰۵۹۱	۰٫۹۵۷۲	۰٫۰۲۲۵	۰٫۰۱۵۶	۱٫۰۴۹۲	۰٫۹۶۰۰	۰٫۰۲۲۷	۰٫۰۱۵۶
(۲,۱)	۱٫۰۵۷۷	۰٫۹۵۷۴	۰٫۰۲۳۳	۰٫۰۱۷۶	۱٫۰۴۷۷	۰٫۹۶۰۶	۰٫۰۲۳۶	۰٫۰۱۷۶
(۲,۲)	۱٫۰۶۲۸	۰٫۹۵۴۵	۰٫۰۲۴۱	۰٫۰۱۸۰	۱٫۰۵۲۶	۰٫۹۵۷۹	۰٫۰۲۴۲	۰٫۰۱۸۱
(۲,۳)	۱٫۰۶۳۰	۰٫۹۴۹۸	۰٫۰۲۲۹	۰٫۰۱۹۴	۱٫۰۵۳۱	۰٫۹۵۳۳	۰٫۰۲۳۲	۰٫۰۱۹۶
(۳,۰)	۱٫۰۵۷۷	۰٫۹۶۱۲	۰٫۰۲۷۹	۰٫۰۱۸۸	۱٫۰۵۱۰	۰٫۹۶۲۶	۰٫۰۲۸۲	۰٫۰۱۸۸
(۳,۱)	۱٫۰۶۶۶	۰٫۹۵۷۴	۰٫۰۲۸۰	۰٫۰۱۹۶	۱٫۰۵۹۴	۰٫۹۵۹۴	۰٫۰۲۸۲	۰٫۰۱۹۷
(۳,۲)	۱٫۰۵۸۹	۰٫۹۶۳۷	۰٫۰۳۰۱	۰٫۰۲۱۴	۱٫۰۵۲۰	۰٫۹۶۵۷	۰٫۰۳۰۴	۰٫۰۲۱۵
(۳,۳)	۱٫۰۵۴۲	۰٫۹۶۰۳	۰٫۰۲۷۹	۰٫۰۲۱۳	۱٫۰۴۷۲	۰٫۹۶۲۴	۰٫۰۲۸۲	۰٫۰۲۱۴

جدول ۳. احتمال‌های پوشش ۹۵٪ و صدک‌های شبیه سازی شده (۲٫۵,۹۷٫۵) برای کمیت محوری $P_۱$ براساس AMLE وقتی $N = ۱۰$ و $N = ۳۰$.

	$(N = ۱۰)$		$(N = ۳۰)$	
(r, s)	احتمالات پوشش	صدک‌های شبیه سازی شده	احتمالات پوشش	صدک‌های شبیه سازی شده
(۰,۰)	۰٫۶۷۵	(−۶٫۴۷۲۶ , ۱٫۴۰۴۴)	۰٫۷۷۵	(−۴٫۳۳۹۰ , ۱٫۵۰۴۱)
(۰,۱)	۰٫۷۰۴	(−۶٫۶۶۱۷ , ۱٫۱۴۱۶)	۰٫۸۱۸	(−۴٫۱۰۰۱ , ۱٫۴۹۳۸)
(۰,۲)	۰٫۶۹۴	(−۶٫۸۱۱۶ , ۱٫۱۳۵۹)	۰٫۷۹۰	(−۴٫۰۲۸۱ , ۱٫۵۳۷۱)
(۰,۳)	۰٫۶۵۰	(−۸٫۲۴۸۴ , ۱٫۰۰۵۴)	۰٫۸۰۲	(−۴٫۲۴۰۸ , ۱٫۳۹۲۲)
(۱,۰)	۰٫۶۸۷	(−۶٫۳۷۱۱ , ۱٫۷۳۲۹)	۰٫۸۱۸	(−۴٫۰۱۵۸ , ۴٫۸۰۴۸)
(۱,۱)	۰٫۷۱۴	(−۶٫۹۷۵۹ , ۱٫۵۴۷۹)	۰٫۷۹۳	(−۴٫۰۴۲۰ , ۱٫۸۰۹۵)
(۱,۲)	۰٫۶۸۴	(−۸٫۰۸۱۲ , ۱٫۳۶۸۳)	۰٫۸۲۰	(−۳٫۹۷۰۸ , ۱٫۸۰۲۴)
(۱,۳)	۰٫۶۵۶	(−۸٫۵۴۱۷ , ۱٫۴۱۷۳)	۰٫۸۱۰	(−۴٫۱۹۹۶ , ۱٫۶۰۵۷)
(۲,۰)	۰٫۶۵۲	(−۸٫۰۸۸۰ , ۱٫۸۲۸۲)	۰٫۷۸۴	(−۴٫۴۶۹۷ , ۱٫۸۸۲۷)
(۲,۱)	۰٫۶۴۳	(−۸٫۹۷۱۲ , ۱٫۵۹۴۵)	۰٫۷۹۹	(−۴٫۱۰۲۱ , ۱٫۹۸۹۹)
(۲,۲)	۰٫۶۰۷	(−۹٫۷۴۵۹ , ۱٫۵۹۴۹)	۰٫۸۱۰	(−۴٫۰۵۱۷ , ۱٫۸۳۱۹)
(۲,۳)	۰٫۵۹۴	(−۱۲٫۵۱۱۱ , ۱٫۵۹۱۵)	۰٫۸۱۸	(−۴٫۲۸۷۲ , ۱٫۶۵۴۲)
(۳,۰)	۰٫۶۲۱	(−۹٫۵۹۵۰, ۲٫۰۵۴۸)	۰٫۷۴۳	(−۴٫۴۷۸۲ , ۲٫۱۶۹۱)
(۳,۱)	۰٫۵۷۵	(−۱۱٫۳۳۸۳ , ۱٫۶۴۴۵)	۰٫۷۸۰	(−۴٫۷۰۴۹ , ۱٫۸۵۰۲)
(۳,۲)	۰٫۵۸۴	(−۱۵٫۷۰۰۳ , ۱٫۵۸۸۷)	۰٫۷۸۷	(−۴٫۳۳۱۷ , ۲٫۰۱۰۳)
(۳,۳)	۰٫۵۱۷	(−۲۱٫۴۳۴۷ , ۱٫۵۰۱۴)	۰٫۸۰۳	(−۴٫۴۹۴۵ , ۲٫۰۳۲۱)

جدول ۴. میانگین برآورد توابع نرخ خرابی و قابلیت اطمینان برای نمونه ۳۰ تایی وقتی $t = ۱$.

(r, s)	$\widetilde{R}_{AMLE}(t)$	$\widetilde{H}_{AMLE}(t)$	$\widehat{R}_{MLE}(t)$	$\widehat{H}_{MLE}(t)$
(۰,۰)	۰٫۶۲۵۶	۱٫۰۵۰۵	۰٫۶۱۱۸	۱٫۰۲۴۹
(۰,۱)	۰٫۶۲۵۸	۱٫۰۴۸۴	۰٫۶۱۲۲	۱٫۰۲۲۷
(۰,۲)	۰٫۶۲۰۵	۱٫۰۷۶۹	۰٫۶۰۹۲	۱٫۰۳۵۹
(۰,۳)	۰٫۶۲۷۷	۱٫۰۵۲۶	۰٫۶۱۳۰	۱٫۰۲۳۸
(۱,۰)	۰٫۶۱۷۷	۱٫۰۴۵۱	۰٫۶۰۹۳	۱٫۰۲۲۳
(۱,۱)	۰٫۶۱۸۴	۱٫۰۴۵۱	۰٫۶۰۹۸	۱٫۰۲۰۷
(۱,۲)	۰٫۶۱۲۹	۱٫۰۷۲۵	۰٫۶۰۷۱	۱٫۰۳۳۲
(۱,۳)	۰٫۶۱۹۸	۱٫۰۴۷۸	۰٫۶۱۰۶	۱٫۰۲۱۰
(۲,۰)	۰٫۶۱۸۰	۱٫۰۳۱۰	۰٫۶۱۰۲	۱٫۰۱۵۱
(۲,۱)	۰٫۶۱۸۶	۱٫۰۳۹۲	۰٫۶۱۰۷	۱٫۰۱۸۱
(۲,۲)	۰٫۶۱۴۸	۱٫۰۵۴۰	۰٫۶۰۸۸	۱٫۰۲۵۰
(۲,۳)	۰٫۶۱۶۷	۱٫۰۵۹۲	۰٫۶۰۹۷	۱٫۰۲۷۰
(۳,۰)	۰٫۶۱۴۴	۱٫۰۵۱۴	۰٫۶۰۹۰	۱٫۰۲۳۵
(۳,۱)	۰٫۶۱۳۹	۱٫۰۵۱۸	۰٫۶۰۸۹	۱٫۰۲۳۲
(۳,۲)	۰٫۶۱۶۳	۱٫۰۴۹۳	۰٫۶۱۰۱	۱٫۰۲۱۸
(۳,۳)	۰٫۶۱۵۹	۱٫۰۵۶۸	۰٫۶۰۹۹	۱٫۰۲۵۶

مراجع

[۱] عبدی، م. (۱۳۸۶)، روش تقریبی MLE برای توزیع رایلی با داده‌های سانسور شده نوع II، پروژه کارشناسی آمار، دانشگاه مازندران.

[2] Bain, L. and Engelhardt, M. (1992), *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, PWS-KENT, Boston.

[3] Balakrishnan, N. (1989), Approximate MLE of the scale parameter of the Rayleigh Ddistribution with Ccensoring, *IEEE Trans. On Reliability*, 38, 354-357.

[4] Balakrishnan, N. and Nevzerov, V.B. (1993), *A Primer on Statistical Distributions*, Wiley, New York.

[5] Cohen, A.C. (1991), *Truncated and Censored Samples: Theory and Application*, Marcel Dekker, New York.

[6] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (2003), *Continuous Univariate Distributions*, Wiley, New York.

[7] Lee, K.R., Kapadia, C.H. and Dwight, B.B. (1980), On estimating the scale parameter of the Rayleigh distribution from doubly censored samples, *Statist. Hefte*, 14-29.