مقایسه سیستم‌های صف بندی همگن و ناهمگن

روح اللّه قویدل خراسانی [۱] ، رضا سیگاری تبریزی [۲] ، غلامحسین شاهکار [۳]

چکیده:

همه ما ناراحتی ایستادن در صف را تجربه کرده‌ایم. در صف خرید نان، شیر و دیگر ارزاق روزانه ⋯ متأسفانه این پدیده با رشد جمعیت و شهری شدن روز افزون جامعه بیشتر و بیشتر می‌شود. در این مقاله ثابت می‌کنیم از نقطه نظر متوسط زمان انتظار متقاضی در سیستم، همیشه با ρ یکسان، یک مدل $M/M/۱$ از یک مدل $M/M/c$ (صف همگن) بهتر است؛ و همیشه یک مدل $M/M/c$ از c مدل $M/M/۱$ مستقل و با نرخ سرویس یکسان، یعنی وقتی که هر یک $\frac{1}{c}$ کل تعداد مراجعه کنندگان را می‌پذیرند، بهتر است. همچنین در این مقاله نشان داده می‌شود، بین میانگین زمان انتظار در صف و میانگین حضور در سیستم رابطه‌ای مستقیم وجود دارد، که صحت این موضوع توسط شبیه‌سازی برای هر دو مدل صف تک باجه‌ای و دو باجه‌ای ناهمگن با توجه به نمودارهای ترسیم شده، مورد تأیید قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: شبیه‌سازی، باجه‌های ناهمگن، متوسط زمان انتظاردر صف.

۱ مقدمه

غالباً گسترش مدل‌های تحلیلی برای سیستم‌های صف‌بندی ممکن نیست. این موضوع می‌تواند معلول مشخصه‌های ورودی یا مکانیسم‌های سرویس، پیچیدگی طرح سیستم، طبیعت نظم صف یا ترکیبی از این‌ها باشد که برای تحلیل، به شبیه‌سازی متوسل شویم. شبیه‌سازی کامپیوتری روش مناسب و در برخی موارد تنها روش ممکن برای شناخت طبیعت و بررسی ابعاد و مشخصه‌های برخی از مسائل پیچیده است که آن تنها از طریق روش‌های تحلیلی موجود امکان‌پذیر نیست و لذا ضروری است تا به کمک شبیه‌سازی عملکرد و رفتار آن مورد مطالعه قرار گیرد.

۲ مدل صف بندی $M/M/c$

در این‌جا یک مدل صف بندی با c $(۱ \leq c < \infty)$ سرویس دهنده یا باجه به صورت موازی را که توزیع‌های ورودی و زمان سرویس به صورت همان مدل $M/M/۱$ هستند، در نظر می گیریم. به عبارت دیگر در مدل حاضر $M/M/c$ فرآیند پواسن با پارامتر λ را به‌عنوان فرآیند ورودی در نظر

[۱] کارشناسی ارشد آمار دانشگاه آزاد اسلامی مشهد
[۲] کارشناسی ارشد مدیریت اجرایی، دانشگاه مولتی مدیا مالزی
[۳] استاد دانشگاه فردوسی مشهد

می‌گیریم و فرض می‌کنیم هر یک از c باجه دارای توزیع زمان سرویس مستقل نمایی با میانگین نرخ μ هستند. اگر $n(\le c)$ باجه مشغول باشند در این صورت کل تعداد سرویس های انجام شده در سیستم فرآیند پواسن با میانگین $n\mu$ است و بنابراین فاصله زمانی بین تکمیل دو سرویس متوالی با میانگین $\frac{1}{n\mu}$ است. داریم:

$$p_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!\ \mu^n} p_0 & (1 \le n \le c) \\ \frac{\lambda^n}{c^{n-c} c! \mu^n} p_0 & (c \le n) \end{cases} \tag{1}$$

از شرط $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ نتیجه می‌شود:

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!(1-\frac{\lambda}{c\mu})} \right]^{-1}.$$

تبصره توجه کنید که:

۱) در این مدل c باجه ای شدت ترافیک $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ است.

۲) برای $c = 1$ نتایج متناظر برای مدل $M/M/1$ هستند.

با استفاده از فرمول‌های لیتل و رابطه کلی $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ می‌توان تمام عبارات دیگر را نظیر $M/M/1$ به دست آورد.

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{L_q}{\lambda} = \frac{p_c}{c\mu(1-\rho)^2}, \\ W &= \frac{1}{\mu} + \frac{p_c}{c\mu(1-\rho)^2}, \\ L &= \lambda W = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\rho p_c}{(1-\rho)^2}. \end{aligned}$$

۱.۲ توزیع‌های زمان انتظار

فرض کنید نظم صف $(FIFO)$ باشد. توزیع T_q را می‌توان مانند مدل $M/M/1$ به دست آورد.

$$\begin{aligned} Pr\{T_q = 0\} &= \sum_{n=0}^{c-1} p_n = 1 - \sum_{n=c}^{\infty} p_n \\ &= 1 - \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!(1-\rho)} p_0 = \frac{p_c}{1-\rho}. \end{aligned}$$

بنابراین:

$$W_q(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{(c-1)!(c-\frac{\lambda}{\mu})} p_0 & x > 0 \\ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{(c-1)!} \mu e^{-(c\mu-\lambda)x} p_0 & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

نکته ۱ می‌توان نشان داد که از نقطه نظر متوسط زمان انتظار متقاضی در سیستم و متوسط تعداد در سیستم، همیشه با ρ یکسان یک مدل $M/M/1$ از یک مدل $M/M/c$ بهتر است و همیشه یک مدل $M/M/c$ از c مدل $M/M/1$ مستقل و با نرخ سرویس یکسان، یعنی وقتی که هر یک $\frac{1}{c}$ کل تعداد مراجعه کنندگان را می پذیرند، بهتر است [۲]. ما این موضوع را برای $c = 2$ ثابت می کنیم. یک مدل $M/M/c$ با نرخ ورود λ و نرخ سرویس μ برای هر باجه را در نظر بگیرید. برای این مدل متوسط زمان انتظار در سیستم مثلاً W_2 عبارت است از:

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{\mu} + \frac{p_c}{c\mu(1-\rho)^2}, \\ p_c &= \frac{\rho^c}{c!} p_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_c &= \frac{\rho^c}{c!}[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^c}{c!}+\frac{\rho^c}{c!(1-p)^2}]^{-1} \\ &= \frac{\rho^2}{2}[1+\rho+\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}]^{-1}=\frac{\rho^2}{2}\frac{2-\rho}{2+\rho}. \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{\mu}+\frac{\rho^2}{2}.\frac{2-\rho}{2+\rho}.\frac{2}{\mu(2-r)^2} \\ &= \frac{1}{\mu}+\frac{\lambda^2}{\mu(4\mu^2-\lambda^2)}=\frac{4\mu}{4\mu^2-\lambda^2}. \end{aligned}$$

حال یک مدل تک سرویس دهنده $M/M/1$ را با نرخ ورود λ در نظر بگیرید که کارایی سرویس دهنده به اندازه کارایی هر دو سرویس دهنده مدل $M/M/2$ باشد. یعنی در اینجا نرخ سرویس دهی را 2μ فرض می‌کنیم. داریم:

$$W_1=\frac{1}{2\mu-\lambda}$$

شرط آنکه این سیستم‌ها به حالت پایا برسند آن است که $p=\frac{\lambda}{2\mu}<1$ و با قبول این فرض داریم:

$$\begin{aligned} W_2-W_1 &= \frac{4\mu}{4\mu^2-\lambda^2}-\frac{1}{2\mu-\lambda} \\ &= \frac{2\mu-\lambda}{4\mu^2-\lambda^2}=\frac{1}{2\mu+\lambda}>0. \end{aligned}$$

بنابراین $W_2>W_1$.

حال دو مدل مستقل $M/M/1$ هر یک با نرخ ورود $\frac{\lambda}{2}$ و نرخ سرویس μ را با یک مدل $M/M/2$ با نرخ ورود λ و نرخ سرویس μ برای هر باجه مقایسه می‌کنیم. متوسط زمان انتظار برای هر یک از مدل‌های $M/M/1$ مثلاً W برابر است با:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\mu-\frac{\lambda}{2}}=\frac{2}{2\mu-\lambda}W-W_2 \\ &= \frac{2}{2\mu-\lambda}-\frac{4\mu}{4\mu^2-\lambda^2}=\frac{2\lambda}{4\mu^2-\lambda^2}. \end{aligned}$$

پس $W>W_2>W_1$.

استیدهام [۴] نشان داده است که حتی با سست شدن شرط پذیره‌های نمایی فواصل زمانی بین مراجعات و زمانی سرویس، عموماً بهین هستند.

۳ صف‌های ناهمگن

فرض کنید به عوض داشتن سرویس دهندگان همگن (یعنی مستقل و هم‌توزیع نمایی با میانگین نرخ) سرویس دهندگان ناهمگنی داشته باشیم که برای آنها زمان سرویس مستقل نمایی و نرخ‌ها μ_i ،$i=1,2,\cdots,c$ هستند. برای صف مارکوفی و ناهمگن $M/M/c^*$ وقتی نرخ سرویس باجه‌های مختلف متفاوت است. می‌توان احتمال اندازه سیستم در حالت پایا را با توجه به مدل کلی زاد و مرگ، یعنی:

$$p_n=p_0\prod_{i=1}^{n}(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i})$$

را به صورت زیر به دست آورد.

$$p_n=p_0\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}(\frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{i}\mu_k}) & (1\le n\le c)\\ p^{n-c}\prod_{i=1}^{c}(\frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{i}\lambda_k}) & (n\ge c)\end{cases} \tag{3}$$

که در آن λ نرخ ورود، μ_i نرخ سرویس i امین باجه، ρ عامل بهره‌دهی سیستم و p_0 برابر است با

$$\begin{aligned} p_0 &= \Big[1+\sum_{n=1}^{c-1}(\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{i}\mu_k}) \\ &+\frac{1}{1-\rho}\prod_{i=1}^{c}\frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{i}\mu_k}\Big]^{-1} \end{aligned}$$

از این جا تابع چگالی زمان انتظار در صف به صورت زیر تعریف می‌شود [۳]:

$$W_q(t) = p_0 \begin{cases} 1 - \frac{\sum_{i=1}^{c} \mu_i}{1-(\sum_{i=1}^{c} \mu_i - \lambda)} \prod_{i=1}^{c} \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{i} \mu_k}, & t = 0 \\ (\sum_{k=1}^{c} \mu_k) \exp[-(\sum_{k=1}^{c} \mu_k - \lambda)t] \times \prod_{i=1}^{c} (\frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{i} \mu_k}), & t \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

و متوسط زمان انتظار در صف مطابق زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{\sum_{k=1}^{c} \mu_k}{(\sum_{k=1}^{c} \mu_k - \lambda)^2} \prod_{i=1}^{c} (\frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{i}} \mu_k) p_0 \\ &= \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)^2} \prod_{i=1}^{c} (\frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{i} \mu_k}) p_0 \end{aligned}$$

که در آن $\rho = \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^{c} \mu_k}$ عامل بهره‌دهی سیستم است.

۴ مقایسه و ارزیابی صف ناهمگن

$M/M/2^*$ با صف تک باجه‌ای

یکی از مهمترین موارد استفاده از شبیه‌سازی در این تحقیق، مقایسه طرح‌های مختلف از سیستم است. چون مشاهده‌های مربوط به متغیر پاسخ تغییرپذیری تصادفی دارد. ناچار از انجام تجزیه و تحلیل آماری هستیم تا روشن شود هر گونه تغییرات مشاهده شده ناشی از تفاوت طرح‌هاست یا اینکه صرفاً نوسانات تصادفی ذاتی مدل‌ها را منعکس می‌کند؟ دلیل دیگر آن، این است که مقایسه کردن صفوف ناهمگن با صفوف همگن بوسیله دانش ریاضی، کاری بس مشکل و طاقت فرسا است.

ما در این تحقیق، برای این مقاله تصمیم گرفتیم شبیه سازی یک خط تولید در شرکت رینگ‌سازی مشهد وابسته به ایران خودرو (کمپانی MWM) را به انجام برسانیم [۱].

گام‌های شبیه‌سازی به ترتیب مراحل زیر می‌باشند:

۱) الگوریتم شبیه‌سازی صف $M/M/2^*$

۲) الگوریتم شبیه‌سازی صف تک باجه‌ای .

۳) برنامه مربوط به صف $M/M/2^*$

۴) برنامه مربوط به صف تک باجه‌ای

۵) برنامه تکرار شبیه‌سازی صف $M/M/2^*$

۶) برنامه تکرار شبیه‌سازی صف تک باجه‌ای

توضیح این‌که به دلیل حجم زیاد برنامه‌های مربوط به گام‌های شبیه‌سازی فوق که با استفاده از نرم‌افزار S-Plus بیان گردیده، از ذکر آن در این مقاله پرهیز نموده‌ایم.

قسمت خروجی حاصل از ۵۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی برای هر دو صف تک باجه‌ای و دو باجه‌ای ناهمگن در بردارهای outmtw (متوسط زمان انتظار در صف)، outms (متوسط زمان سرویس)، outmsys (متوسط مدت حضور در سیستم)، ذخیره شده‌اند برای تحلیل و مقایسه به کار می‌گیریم. همان‌گونه که در بخش‌های قبل نیز

گفته شد فرمول زیر برای تمامی صفوف برقرار است.

متوسط مدت حضور در سیستم = متوسط زمان انتظار درصف + متوسط زمان سرویس

بنابراین بین متوسط مدت زمان حضور در سیستم و متوسط مدت انتظار در صف رابطه‌ای مستقیم برقرار است. ما این موضوع را برای صف ناهمگن دوباجه‌ای و صف تک باجه‌ای با توسل به داده‌های شبیه‌سازی شده در جدول ۱ نشان داده‌ایم.

برای مقایسه این دو مدل صف باید شدت ترافیک ρ در هر دو صف یکسان در نظر گرفته شود. با توجه به پارامترهای موثر و نرخ‌های سرویس موجود برای شبیه‌سازی خط تولید از طریق بهینه‌سازی در کمپانی MWM بر اساس سفارشات قطعات، [۱]، ما مقادیر $\rho = ۰/۹۵$ و $\lambda = ۱$ (نرخ ورود) را برای خود در نظر گرفتیم.

۱.۴ مقایسه میانگین مدت انتظار در سیستم

بین دو مدل A و D

$$\begin{cases} H_0 : MSYS_A = MSYS_D \\ H_1 : MSYS_A \neq MSYS_D \end{cases} \quad (۵)$$

```
Standard Two-sample t-Test
data: x: MSYS1.2 in DSco,
and y:MSYS in DSco
t = 1.3229, df = 998,
p-value=0.1862
alternative hypothesis:
 true differences
 in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.3626824   1.8633644
sample estimates:
mean of x mean of y
17.64064   16.89012
```

با توجه به این آزمون دلیل آماری محکمی برای رد فرض صفر نداریم. به عبارتی بر اساس شواهد، میانگین انتظار در سیستم، این دو مدل با هم برابر می‌باشند.

۲.۴ مقایسه میانگین مدت انتظار در سیستم

بین دو مدل B و D

$$\begin{cases} H_0 : MSYS_B = MSYS_D \\ H_1 : MSYS_B \neq MSYS_D \end{cases} \quad (٦)$$

```
Standard Two-sample t-Test
data: x: MSYS2.2 in DSco,
 and y:MSYS in DSco
t = 0.8936, df = 998,
 p-value=0.3717
alternative hypothesis:
 true differences
```

```
 in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.5737205   1.5866089
sample estimates:
mean of x mean of y
17.38656   16.89012
```

با توجه به این آزمون دلیل آماری محکمی برای رد فرض صفر نداریم. به عبارتی بر اساس این شواهد، میانگین مدت انتظار در سیستم، این دو مدل نیز با هم برابر می‌باشند.

۳.۴ مقایسه میانگین مدت انتظار در سیستم

بین دو مدل C و D

$$\begin{cases} H_0 : MSYS_C = MSYS_D \\ H_1 : MSYS_C \neq MSYS_D \end{cases} \tag{۷}$$

```
      Standard Two-sample t-Test
data: x: MSYS3.2 in DSco,
 and y:MSYS in DSco
t = 1.5692, df = 998,
 p-value=0.1169
alternative hypothesis:
 true differences
in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.2292969   2.0599208
sample estimates:
mean of x mean of y
17.80543   16.89012
```

با توجه به این آزمون دلیل آماری محکمی برای رد فرض صفر نداریم. به عبارتی بر اساس شواهد، میانگین مدت انتظار در سیستم، این دو مدل نیز با هم برابر می‌باشند.

۴.۴ مقایسه میانگین مدت زمان سرویس‌دهی بین دو مدل A و D

$$\begin{cases} H_0 : MS_A = MS_D \\ H_1 : MS_A \neq MS_D \end{cases} \tag{۸}$$

```
     Standard Two-sample t-Test
data: x: MS1.2 in DSco,
 and y:MS in DSco
t = 522.9623, df = 998,
 p-value=0
alternative hypothesis:
 true differences
 in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
0.9458741   0.9529994
sample estimates:
mean of x mean of y
1.900533   0.9510959
```

با توجه به این آزمون مدت زمان سرویس دهی

مدل D کمتر از مدت زمان سرویس دهی مدل A است.

۵.۴ مقایسه میانگین مدت زمان سرویس‌دهی بین دو مدل B و D

$$\begin{cases} H_0 : MS_B = MS_D \\ H_1 : MS_B \neq MS_D \end{cases} \qquad (۹)$$

```
     Standard Two-sample t-Test
data: x: MS2.2 in DSco,
 and y:MS in DSco
t = 535.3053, df = 998,
 p-value=0
alternative hypothesis:
 true differences
in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
0.9425943   0.9495305
sample estimates:
mean of x mean of y
1.897158   0.9510959
```

با توجه به این آزمون مدت زمان سرویس دهی مدل D کمتر از مدت زمان سرویس دهی مدل B است.

۶.۴ مقایسه میانگین مدت زمان سرویس‌دهی بین دو مدل C و D

$$\begin{cases} H_0 : MS_C = MS_D \\ H_1 : MS_C \neq MS_D \end{cases} \qquad (۱۰)$$

```
     Standard Two-sample t-Test
data: x: MS3.2 in DSco,
 and y:MS in DSco
t = 579.729, df = 998,
 p-value=0
alternative hypothesis:
 true differences
 in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
0.9564637   0.9629608
sample estimates:
mean of x mean of y
1.910808   0.9510959
```

با توجه به این آزمون مدت زمان سرویس دهی مدل D کمتر از مدت زمان سرویس دهی مدل C است.

۵ ملاحظات:

۱) البته برای اینکه بتوان نتایج حاصل از شبیه‌سازی استناد بیشتری داشته باشیم، باید برای نرخ‌های گوناگون، تعداد تکرار شبیه‌سازی را از مقدار ۵۰۰ به بیش از

۳۰۰۰ بار افزایش دهیم که البته این امر مستلزم داشتن رایانه‌هایی به مراتب سریع می باشد.

۲) برای شبیه‌سازی صف سه باجه‌ای و چهار باجه‌ای باید مقادیر پارامترهای ورودی تابع نوشته شده را به ۴ و ۵ برای این دو صف ارتقا دهید. البته با کمی تأمل در برنامه نوشته شده برای صف دو باجه‌ای ناهمگن، می‌توان دستورهای شرطی متناسب با این دو مدل را جایگزین نمود.

۳) علاقمندان می توانند با نوشتن برنامه‌های فوق در نرم افزار S-Plus و اجرای آن‌ها برای پارامترهای گوناگون فرضیات فوق را مورد آزمون قرار دهند.

٦ نتایج

همانگونه که ملاحظه نمودید بین صف تک باجه‌ای و صف دو باجه‌ای ناهمگن از لحاظ میانگین مدت انتظار در سیستم، بر اساس شبیه‌سازی انجام گرفته، اختلافی وجود ندارد ولی میانگین مدت سرویس دهی صف تک باجه‌ای کمتر از صف دو باجه‌ای ناهمگن می‌باشد. البته با توجه نمودن به مقایسه دو مدل C و D میانگین مدت انتظار در سیستم در دو مدل اختلاف بیشتری یافته‌اند که با توجه به همین موضوع می‌توان گفت که چنانچه شبیه‌سازی را با تعداد بیشتر مثلاً ۳۰۰۰ بار و با تنوع بیشتر در مقادیر پارامتر، انجام دهیم ممکن است به نتایجی متفاوت برسیم.

همچنان که در مقاله نیز اثبات شد، از نقطه نظر متوسط زمان انتظار متقاضی در سیستم و متوسط تعداد در سیستم، همیشه با ρ یکسان، یک مدل $M/M/1$ از یک مدل $M/M/c$ (صف همگن) بهتر است؛ و همیشه یک مدل $M/M/c$ از c مدل $M/M/1$ مستقل و با نرخ سرویس یکسان، یعنی وقتی که هر یک $\frac{1}{c}$ کل تعداد مراجعه کنندگان را می‌پذیرند، بهتر است.

همان‌گونه که در فرمول لیتل نیز مطرح شد، بین میانگین زمان انتظار در صف و میانگین حضور در سیستم رابطه‌ای مستقیم وجود دارد، که صحت این موضوع توسط شبیه‌سازی برای هر دو مدل صف تک باجه‌ای و دو باجه‌ای با توجه به نمودارهای ترسیم شده، مورد تأیید قرار گرفته است.

جدول ۱. مقایسه صف ناهمگن دوباجه‌ای و صف تک باجه‌ای‌برای داده‌های شبیه‌سازی شده

		صف تک باجه‌ای	صف دو باجه‌ای ناهمگن	
نوع مدل	نرخ ورود λ	نرخ سرویس μ	نرخ سرویس سرویس‌دهنده ۲ μ_1	نرخ سرویس سرویس‌دهنده ۱ μ_2
A	۱		۰/۲۱۱	۰/۸۴۰۳
B	۱		۰/۴۷۳۹	۰/۵۷۸
C	۱		۰/۳٦۹	۰/٦۸۵
D	۱	۱/۵۲٦		

مراجع

[۱] شاهکار، غ.ح. و قویدل، ر. (۱۳۸۴)، طراحی یک خط تولید از طریق بهینه‌سازی پارامترهای سیستم $M/G/C^*$، پایان‌نامه کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد.

[2] Gross, D and Harris, C.M. (1985), *Fundamental of Queuring Theory*, Wiley, Newyork.

[3] Mehdi, G. (1982), *Stochastic Processes*, Wiley(Eastern).

[4] Stidham, S.J. (1970), *On the Optimality of single-server queueing systems*, Oper.res 18, 708 - 732.