# تحلیل فرایندهای تصادفی با مشاهدات فازی، به روش گسسته‌سازی

سعیده کامگار[۱]، سید محمود طاهری[۲] و افشین پرورده[۳]

چکیده

با استفاده از متغیرهای تصادفی فازی و توابع تصادفی فازی، می‌توان عدم قطعیت ناشی از وجود دو منبع عدم اطمینان یعنی تصادف و ابهام را توصیف و مدل‌سازی کرد. در عمل با این نوع عدم قطعیت، زمانی روبرو می‌شویم که نتوانیم مقادیر متغیرهای تصادفی را با قطعیت و دقت مشاهده کنیم. در این مقاله، فرایندهای تصادفی با مشاهدات فازی بر اساس مفهوم متغیر تصادفی فازی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا، برای انجام محاسبات لازم، از روش گسسته‌سازی مبتنی بر $\alpha-$برش‌ها استفاده می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** تابع تصادفی فازی، متغیر تصادفی فازی، تابع توزیع احتمال فازی، فرایند تصادفی فازی، گسسته‌سازی.

**رده‌بندی موضوعی** (MSC2000): 60G07, 94D05

## ۱ مقدمه

در آزمایش‌های تصادفی که در آن‌ها نتایج به‌صورت کیفی (واژه‌های زبانی) بیان می‌شوند، با دو نوع ابهام روبرو هستیم: فازی بودن (ابهام) و تصادفی بودن. متغیر تصادفی فازی مفهومی است که در این موارد کاربرد دارد. از سوی دیگر، برای پدیده‌های تصادفی فازی که در دفعات مختلف تکرار می‌شوند، مفهوم فرایند تصادفی فازی به‌کار می‌رود.

مفهوم متغیر تصادفی فازی برای اولین بار توسط واکرناک معرفی شد [۴]و [۵]. پوری و رالسکو مفهوم متغیر تصادفی فازی را با صورت‌بندی جدیدی ارایه دادند که مبنای بیشتر مطالعات بعدی قرار گرفت [۱۱]. ژانگ و وانگ با ارایه صورت‌بندی دیگری از متغیر تصادفی فازی و با استفاده از آن، مفهوم فرایندهای تصادفی فازی و سیستم‌های دینامیکی تصادفی فازی را معرفی کردند [۱۵]و [۱۴]. لیانگجیان و همکاران به‌عنوان کاربردی از فرایندهای تصادفی فازی، سیستم‌های دینامیکی‌ای را مورد بررسی قرار دادند که ورودی آن‌ها فرایند تصادفی فازی است [٦].

مفاهیم مربوط به متغیرهای تصادفی فازی و فرایندهای تصادفی فازی ارایه شده توسط نویسندگان فوق، برای صورت‌بندی عدم قطعیت موجود در سیستم‌های غیر خطی مناسب نیست. مولر و بییر روش $\alpha-$گسسته‌سازی را برای مدل‌سازی فرایندهای تصادفی فازی ارایه کردند که در تحلیل سیستم‌های غیر خطی که دارای عدم قطعیت هستند کاربرد دارد [۷]. علاقه‌مندان می‌توانند برای جدیدترین مطالعات در مورد متغیرهای تصادفی فازی به [۱۳] مراجعه کنند.

یک فرایند تصادفی فازی (در این مقاله، فرایند تصادفی با مشاهدات فازی)، خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی فازی $\tilde{X}(w,t)$ است که $w$ به فضای نمونه و $t$ متعلق به یک مجموعه

[۱] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان *saeedeh.kamgar@gmail.com*
[۲] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، و گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد *taheri@cc.iut.ac.ir*
[۳] گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان *a.parvardeh@sci.ui.ac.ir*

اندیس‌گذار می‌باشد. برای هر مقدار ثابت $t$، $\tilde{X}(w,t)$ یک متغیر تصادفی فازی است، و برای هر $w$ معلوم، $\tilde{X}(w,t)$ به‌عنوان تابعی از $t$، یک مقدار تحقق یافته، نامیده می‌شود. برای مثال، فرایند تصادفی میزان تغییرات گاز ازن کره زمین در یک دوره سی ساله را در نظر بگیرید. این فرایند تصادفی به‌دلیل عدم دقت در اندازه‌گیری، دارای ابهام است و مشاهدات آن به‌صورت مقادیر زبانی بیان می‌شود. در این مثال، مجموعه اندیس‌گذار، دوره زمانی مورد نظر و $\tilde{X}(w,t)$ میزان تغییرات گاز ازن در سال $t$ است، که با یک عدد فازی بیان می‌شود.

بنابراین متغیرهای تصادفی فازی در واقع متغیرهای تصادفی هستند که مقادیر آن‌ها به جای آن‌که اعداد دقیق باشند، کمیت‌های نادقیق هستند. این کمیت‌های نادقیق، عمدتاً به‌صورت اعداد فازی (یعنی توابعی خاص از $R$ به $[۰,۱]$) مدل‌سازی می‌شوند. برای آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی به [۲] و برای مرور کلی متغیرهای تصادفی فازی به [۱] و [۳] مراجعه کنید.

در این مقاله، نخست به معرفی بردارهای تصادفی فازی و توابع تصادفی فازی می‌پردازیم. سپس فرایندهای تصادفی فازی را به‌عنوان حالت خاصی از توابع تصادفی فازی بررسی می‌کنیم. برای انجام محاسبات مربوط به فرایندهای تصادفی فازی، از روش گسسته‌سازی استفاده می‌شود که این روش را نیز تشریح می‌کنیم. خاطر نشان می‌شود که، چنین رویکردی به فرایندهای تصادفی فازی و روش گسسته‌سازی، در مدل‌سازی سری‌های زمانی فازی نیز کاربرد دارد. مطالب بخش‌های آینده که عمدتاً مبتنی بر مراجع [۷]، [۸]، [۹] است، بدین صورت تدوین شده است. در بخش دوم مروری بر مفاهیم متغیر تصادفی و توابع توزیع و چگالی احتمال فازی و در بخش سوم مروری بر توابع تصادفی فازی انجام می‌شود. بخش چهارم اختصاص به تشریح روش گسسته‌سازی اعداد فازی دارد. در بخش پنجم، مدل‌سازی و تحلیل فرایندهای تصادفی فازی، با استفاده از روش گسسته‌سازی، مرور و تبیین می‌گردند. بخش پایانی نیز به نتیجه‌گیری و پیشنهادیه‌هایی برای کارهای آینده اختصاص دارد. گفتنی است که مثال‌ها، به جز مثال‌های ۹،۲ و ۱۰ از نویسندگان مقاله است.

## ۲ متغیرهای تصادفی فازی

در ادامه، $\Omega$ مجموعه‌ی تمام برامدهای ممکن یک آزمایش تصادفی است. هم‌چنین، اگر $\tilde{X}$ یک مجموعه فازی از $\mathbf{X}$ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{X}}(x)$ باشد، آن‌گاه اصطلاحاً $\mathbf{X}$ را مجموعه مرجع $\tilde{X}$ گوییم. فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ یک فضای احتمال و $\mathcal{B}$ نشان‌گر جبر بورل $R^n$ باشد.

**تعریف ۱** یک متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ از $\Omega$، نگاشتی فازی مقدار به‌صورت $\Omega \longrightarrow F(R^n)$ است؛ به قسمی که برای هر $\alpha \in [۰,۱]$ داشته باشیم

$$\{(w,x); x \in X_\alpha(w)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

که در آن تابع مجموعه‌ای مقدار $X_\alpha : \Omega \longrightarrow P(R^n)$ این‌گونه تعریف می‌شود

$$X_\alpha(w) = \{x \in R^n; X(w)(x) \geq \alpha\}$$

و $F(R^n)$ مجموعه همه اعداد فازی از $R^n$ است.

هر عدد فازی به‌صورت $\tilde{x}(w) = \tilde{x}$ را یک مشاهده فازی مرتبط با $w \in \Omega$ می‌نامیم.

**تعریف ۲** فرض کنید $x$ مشاهده‌ای از متغیر تصادفی حقیقی $X$، و $\tilde{x}$ مشاهده‌ای از متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ باشد که به هر برامد $w$ تعلق می‌گیرند و به ازای هر برامد $w$ داشته باشیم $x \in Supp(\tilde{x})$، آن‌گاه گوییم $X$ در $\tilde{X}$ قرار می‌گیرد.

**تعریف ۳** هر متغیر تصادفی حقیقی $X$ که در $\tilde{X}$ قرار داشته باشد و مقادیر آن اعضای مجموعه مرجع $\mathbf{X}$ باشند، یک متغیر تصادفی مرجع برای $\tilde{X}$ نامیده می‌شود. مثال زیر را برای واضح‌تر شدن تعاریف فوق، بیان می‌کنیم.

**مثال ۱** می‌خواهیم زمان از کار افتادن یک قطعه الکترونیکی را بررسی کنیم. با توجه به این‌که قطعه الکترونیکی به مرور زمان از کار می‌افتد، ممکن است زمان از کار افتادن قطعه به‌صورت زبانی و با یک عدد فازی گزارش شود. فرض کنید مشاهدات مربوطه به‌صورت اعداد فازی مثلثی $(i,۱,۱)_T \quad ,i=۱,۲,۳,...$ و یا مقدار فازی حدوداً صفر با تابع عضویت $\mu(x)=۱-x$ باشند. در این مثال فضای نمونه بازه $[۰,\infty)$ است. $\tilde{X}$ (زمان از کار افتادن قطعه الکتریکی) می‌باشد که مقادیر فازی (حدوداً صفر، حدوداً یک،...) را می‌پذیرد. متغیر تصادفی مرجع برای $\tilde{X}$، متغیر تصادفی حقیقی مقدار $X$ =زمان از کار افتادن یک قطعه الکتریکی می‌باشد که مشاهدات آن مقادیر دقیق هستند و مجموعه مرجع $\mathbf{X}=[۰,\infty)$ می‌باشد.

می‌توان برای هر متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ یک تابع توزیع احتمال فازی $\tilde{F}(x)$ تعریف کرد. فرض کنید $X_j$ یکی از متغیرهای تصادفی مرجع ممکن برای $\tilde{X}$، و $F_j(x)$ تابع توزیع احتمال $X_j$ باشد. آن‌گاه تابع توزیع احتمال فازی $\tilde{F}(x)$ به‌صورت یک مجموعه فازی بر مجموعه مقادیر $F_j(x)$ تعریف می‌شود. از سوی دیگر، بر اساس رویکرد [۹] و با در نظر گرفتن تابع توزیع احتمال فازی به‌عنوان تابع توزیع احتمال یک پارامتر فازی، می‌توان تابع توزیع احتمال فازی $\tilde{F}(x)$ را به‌عنوان تابعی حقیقی مقدار از بردار پارامترهای فازی $\tilde{s}$ به‌صورت $\tilde{F}(x)=F(\tilde{s},x)$ تعریف نمود.

**تعریف ۴** تابع توزیع احتمال فازی $\tilde{F}(x)$، براساس $\alpha-$برش‌های آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$F(\tilde{s},x)=\{(F_\alpha(x),\mu(F_\alpha(x)))\ ;$$
$$F_\alpha(x)=[F_{\min,\alpha}(x);F_{\max,\alpha}(x)],$$
$$\mu(F_\alpha(x))=\alpha,\forall\alpha\in(۰,۱)\} \quad (۱)$$

که در آن

$$F_{\min,\alpha}(x)=\inf\{F(s,x)|s\in s_\alpha\},$$
$$F_{\max,\alpha}(x)=\sup\{F(s,x)|s\in s_\alpha\}$$

توجه شود که در رابطه فوق $s_\alpha$، $\alpha$-برش پارامتر فازی $\tilde{s}$ است. هم‌چنین تابع چگالی احتمال فازی $\tilde{f}(x)$، براساس $\alpha-$برش‌های آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(\tilde{s},x)=\{(f_\alpha(x),\mu(f_\alpha(x)))\ ;$$
$$f_\alpha(x)=[f_{\min,\alpha}(x);f_{\max,\alpha}(x)],$$
$$\mu(f_\alpha(x))=\alpha,\forall\alpha\in(۰,۱)\} \quad (۲)$$

که در آن

$$f_{\min,\alpha}(x)=\inf\{f(s,x)|s\in s_\alpha\},$$
$$f_{\max,\alpha}(x)=\sup\{f(s,x)|s\in s_\alpha\}$$

توجه شود که در رابطه فوق $s_\alpha$، $\alpha-$ برش پارامتر فازی $\tilde{s}$ است.

**مثال ۲** [۹] متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ را در نظر بگیرید. در شکل ۱، نمودار چند سطح از تابع چگالی احتمال فازی و تابع توزیع احتمال فازی یک متغیر تصادفی فازی نرمال، با میانگین $\mu$ رسم شده است.

**مثال ۳** مثال مربوط به قطعه الکترونیکی را در نظر بگیرید. فرض کنید متغیر تصادفی مرجع $X$ = زمان از کار افتادن قطعه الکترونیکی، از توزیع نمایی با پارامتر معلوم $\lambda$ تبعیت

کند. بنابراین متغیر تصادفی $X$ دارای تابع توزیع احتمال $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ است. می‌خواهیم تابع توزیع احتمال فازی $\tilde{X}$ را به‌دست آوریم. با توجه به این‌که $\tilde{F}(X)$ یک کمیت فازی است برای محاسبه آن می‌توان از یک پارامتر فازی مانند $\tilde{s}$ استفاده کرد و $\tilde{F}(X)$ را به‌عنوان تابع توزیع حقیقی مقدار این پارامتر فازی تعبیر کرد. در این مثال با توجه به مثلثی بودن مقادیر $\tilde{X}$، پارامتر $\tilde{s}$ را نیز یک عدد فازی مثلثی در نظر می‌گیریم که $\alpha$-برش‌های آن به‌صورت $s_\alpha = (x - (1-\alpha), x + (1-\alpha))$ می‌باشد.

طبق رابطه (۱) به‌ازای $\alpha = 0/2$ داریم

$$\begin{aligned}
F_{\min,\alpha=0/2}(x) &= \inf\{F(s,x) | s \in (x - 0/8, x + 0/8)\} \\
&= \inf\{1 - e^{-\lambda(x-0/8)}, 1 - e^{-\lambda(x+0/8)}\} \\
&= 1 - e^{-\lambda(x-0/8)} \\
F_{\max,\alpha=0/2}(x) &= \sup\{F(s,x) | s \in (x - 0/8, x + 0/8)\} \\
&= \sup\{1 - e^{-\lambda(x-0/8)}, 1 - e^{-\lambda(x+0/8)}\} \\
&= 1 - e^{-\lambda(x+0/8)}
\end{aligned}$$

بنابراین $F_{\alpha=0/2}(x) = [1 - e^{-\lambda(x-0/8)}, 1 - e^{-\lambda(x+0/8)}]$. دقت کنید که این بازه بدین معنی است که به اندازه ۰/۲ اطمینان داریم که مقدار تابع توزیع فازی در نقطه $x$ در فاصله $[1 - e^{-\lambda(x-0/8)}, 1 - e^{-\lambda(x+0/8)}]$ قرار دارد.

هم‌چنین، به ازای $\alpha = 1$ داریم

$$\begin{aligned}
F_{\min,\alpha=1}(x) &= \inf\{F(s,x) | s \in s_\alpha)\} \\
&= \inf\{F(s,x) | s \in \{x\}\} \\
&= F(x) = 1 - e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

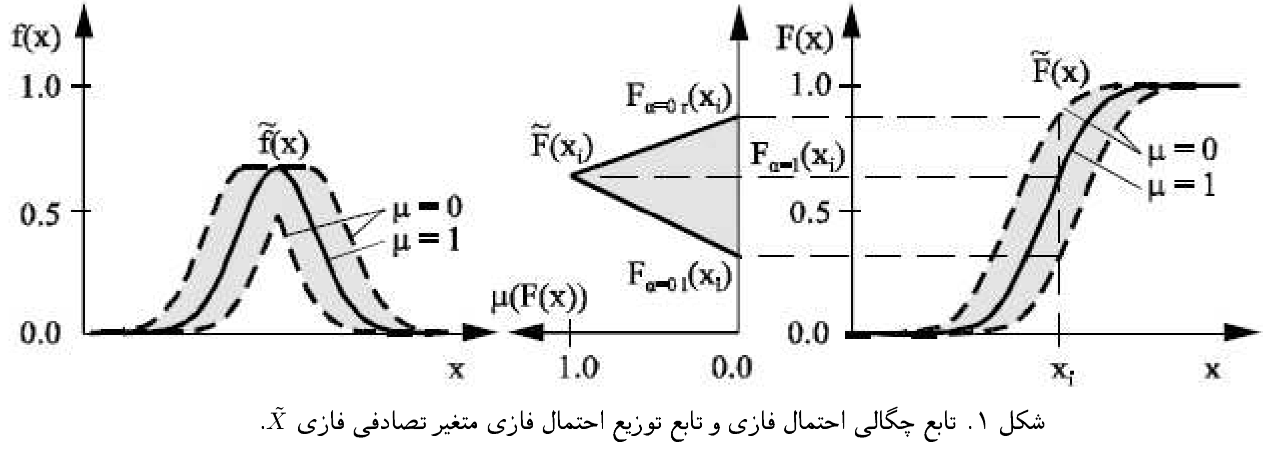
بنابراین $F_{\alpha=1}(x) = \{1 - e^{-\lambda x}\}$.

نیز به‌ازای $\alpha = 0$ داریم

$$\begin{aligned}
F_{\min,\alpha=0}(x) &= \inf\{F(s,x) | s \in (x-1, x+1)\} \\
&= \inf\{1 - e^{-\lambda(x-1)}, 1 - e^{-\lambda(x+1)}\} \\
&= 1 - e^{-\lambda(x-1)} \\
F_{\max,\alpha=0}(x) &= \sup\{F(s,x) | s \in (x-1, x+1)\} \\
&= \sup\{1 - e^{-\lambda(x-1)}, 1 - e^{-\lambda(x+1)}\} \\
&= 1 - e^{-\lambda(x+1)}
\end{aligned}$$

بنابراین $F_{\alpha=0}(x) = [1 - e^{-\lambda(x-1)}, 1 - e^{-\lambda(x+1)}]$.

سر انجام، با توجه به $\alpha$-برش‌های به‌دست آمده برای $F(\tilde{s}, x)$ و طبق تعریف ۴ می‌توان $\tilde{F}(X)$ را به‌دست آورد. به‌طور مثال، مقدار تابع توزیع احتمال در نقطه $x = 2$ با اطمینان ۱ برابر $1 - e^{-2\lambda}$ می‌باشد. هم‌چنین مقدار تابع چگالی احتمال در نقطه $x = 2$ با اطمینان ۱ برابر $\lambda e^{-2\lambda}$ می‌باشد.




شکل ۱. تابع چگالی احتمال فازی و تابع توزیع احتمال فازی متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$.

# ۳ توابع تصادفی فازی

تابع تصادفی فازی $\tilde{X}$ تابعی است که روی فضای $T \times \Omega$ تعریف می‌شود و در آن مقادیر تابع، متغیرهای تصادفی فازی هستند. فرض کنید $\Omega$ فضای همه نمونه‌های تصادفی ممکن، و $T \subseteq R^m$ نیز فضای پارامترها باشد.

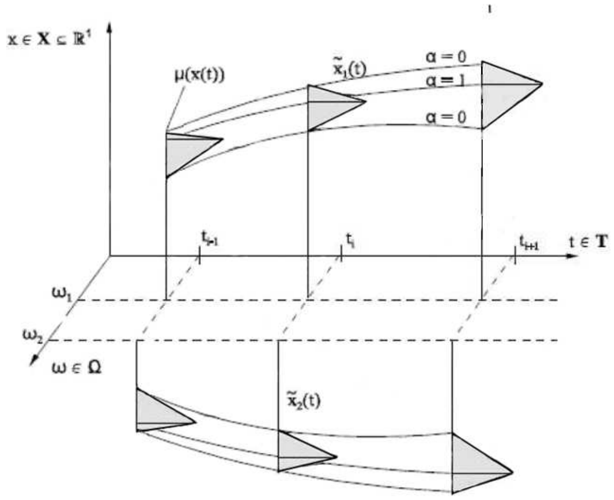
**تعریف ۵** یک تابع تصادفی فازی مقدار $\tilde{X}(t)$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی فازی با فضای پارامتر $T$ است. یعنی

$$\tilde{X}(t) = \{\tilde{X}_t = \tilde{X}(t) \quad \forall t \mid t \in T\} \qquad (۳)$$

**نکته ۱** یک تابع فازی مقدار $\tilde{x}(t)$ مشاهده‌ای است که به هر پیشامد $w \in \Omega \mid t \in T$ تعلق می‌گیرد. در واقع، $\tilde{x}(t)$ مقدار تحقق یافته‌ی $\tilde{X}(t)$ است.

**مثال ۴** بازیکنی در سه دور $t_{i-۱}, t_i, t_{i+۱}$ از مرحله نهایی یک بازی شیر ($H$) یا خط ($T$) شرکت می‌کند. با هر برد، او مقدار «تقریباً ۳ ( هزار تومان)» می‌برد و با هر باخت مقدار «تقریباً ۱ (هزار تومان)» از دست می‌دهد. تقریبی بودن این مقادیر بدین دلیل است که علاوه بر جایزه ویژه برنده، عواید جانبی دیگری نیز ممکن است برای وی در نظر گرفته شده باشد که مقدار دقیق آن را نمی‌توان اندازه‌گیری نمود. در این‌جا تابع تصادفی مناسب باید فازی مقدار باشد، یعنی به‌صورت $\tilde{X}(t) : \{T, H\} \times \{t_{i-۱}, t_i, t_{i+۱}\} \rightarrow F(R)$ باشد. فرض کنید هر کدام از مقادیر $\tilde{X}(t)$ یک عدد فازی مثلثی به‌صورت $\tilde{x}_۲(t) = (-۱, ۱, ۱)_T$ ، $\tilde{x}_۱(t) = (۳, ۱, ۱)_T$ باشند. مثلاً اگر در دور $t_i$اُم برنده شود آن‌گاه '' تقریباً ۳ (هزار تومان) (به‌صورت عدد فازی $\tilde{x}(t_i) = (۳, ۱, ۱)_T$)'' جایزه دریافت می‌کند. شکل ۲ مشاهدات فازی $\tilde{x}_۱(t)$ و $\tilde{x}_۲(t)$ را نشان می‌دهد.

اکنون تعاریف مربوط به متغیر تصادفی فازی را به توابع تصادفی فازی تعمیم می‌دهیم.




شکل ۲. مشاهدات فازی $\tilde{x}_۱(t)$ و $\tilde{x}_۲(t)$ در مثال ۳.

**تعریف ٦** فرض کنید $x(t)$ مشاهده‌ای از تابع تصادفی حقیقی مقدار $X(t)$ و $\tilde{x}(t)$ مشاهده‌ای از تابع تصادفی فازی مقدار $\tilde{X}(t)$ باشند که به هر پیشامد $w$ تعلق می‌گیرند و داشته باشیم $x(t) \in Supp(\tilde{x}(t) | t \in T)$، آن‌گاه گوییم $x(t)$ در $\tilde{x}(t)$ قرار می‌گیرد.

**تعریف ۷** اگر $x(t)$ به ازای هر پیشامد $w \in \Omega \mid t \in T$ در $\tilde{x}(t)$ قرار گیرد. آن‌گاه $X(t)$ بر اساس $x(t)$ یک تابع تصادفی مرجع برای تابع تصادفی فازی $\tilde{X}(t)$ نامیده می‌شود.

**مثال ۵** مثال ۴ را در نظر بگیرید. مشاهده $x = -۱/۵$ به ازای $t_{i-۱}, t_i, t_{i+۱}$ در مشاهده فازی $\tilde{x}_۱$ قرار می‌گیرد در حالی‌که مشاهده $x = ۵$ در $\tilde{x}_۲$ قرار نمی‌گیرد. در این‌جا $X_۱(t), X_۲(t)$ دو تابع تصادفی مرجع برای $\tilde{X}(t)$ می‌باشند در حالی‌که $X_۳(t)$ تابع تصادفی مرجع برای $\tilde{X}(t)$ نمی‌باشد

$$X_۱(t) = \begin{cases} -۱ & w = T \\ ۳ & w = H \end{cases}$$

$$X_۲(t) = \begin{cases} -۰/۵ & w = T \\ ۲/۳ & w = H \end{cases}$$

$$X_۳(t) = \begin{cases} -۱/۵ & w = T \\ ۵ & w = H \end{cases}$$

هر تابع تصادفی مرجع $X(t)$ دارای خواص تابع تصادفی حقیقی در فضای پارامتر $T$ است. بنابراین می توان گفت تابع تصادفی فازی $\tilde{X}(t)$ مجموعه فازی از همه توابع تصادفی مرجع ممکن $X(t)$ در $\tilde{X}(t)$ است.

**تعریف ۸** مجموعه توابع تصادفی مرجع در سطح $\alpha$ را به‌صورت زیر تعریف می کنیم

$$X_\alpha(t) = \{X(t) = X_j(t) \mid \mu(X_j(t)) \geq \alpha\}$$

با توجه به نکته ۱ و با استفاده از پارامتر فازی $\tilde{s}$ داریم: $\tilde{X}(t) = X(\tilde{s}, t)$، بنابراین تابع تصادفی فازی در فضای گروه پارامترهای فازی $\tilde{s}$ به‌صورت زیر است

$$X(\tilde{s}, t) = \{(X(t)\ ,\ \mu(X(t)) \mid X(t) = X(s,t)\ ;$$
$$\mu(X(t)) = \mu(s) \quad \forall\ s \in \tilde{s}\}$$

طبق روابط فوق می‌توان مجموعه‌های $\alpha-$ برش تصادفی مربوط به $\tilde{X}(t)$ را به‌صورت زیر نوشت که در آن $S_\alpha$ تشکیل دهنده توابع مرجع در سطح $\alpha$ و زیر فضایی از $\tilde{s}$ است.

$$X_\alpha(t) = \{X(s,t) \quad \forall s \mid s \in S_\alpha\ ;\ \alpha \in (0, 1]\}$$

**نکته ۲** اگر به‌ازای هر زمان $\tau \in T$ داشته باشیم $t = \tau$، آن‌گاه فرایند تصادفی فازی $\tilde{X}(\tau)$ به‌عنوان حالت خاصی از یک تابع تصادفی فازی $\tilde{X}(t)$ به‌دست می آید که به‌صورت رابطه زیر است

$$\tilde{X}(\tau) = \{\tilde{X}_\tau = \tilde{X}(\tau) \quad \forall\tau \mid \tau \in T\}$$

## ۴ گسسته‌سازی یک عدد فازی بر حسب $\alpha-$ برش‌های آن

برای محاسبات مربوط به فرایندهای تصادفی فازی، مناسب است که نوعی گسسته‌سازی اعداد فازی بر مبنای $\alpha$-برش‌های آن‌ها صورت گیرد. در این بخش به تشریح این روش می‌پردازیم.
اگر $\tilde{x}$ یک عدد فازی باشد، آن‌گاه $\alpha-$برش آن را می‌توان به‌صورت $x_\alpha = [x_{\alpha l}, x_{\alpha r}]$ نوشت.
روابط زیر برای $\alpha-$برش‌های $x_\alpha$ برقرار است.

$$x_{\alpha_{i+1}} \subseteq x_{\alpha_i} \quad \forall\alpha_i, \alpha_{i+1} \quad , 0 \leq \alpha_i \leq \alpha_{i+1} \leq 1 \quad (4)$$

برای گسسته‌سازی اعداد فازی با استفاده از $\alpha-$برش‌ها، $\Delta x_{\alpha_i l}$ و $\Delta x_{\alpha_i r}$ بر اساس حدود بازه $[x_{\alpha_i l}, x_{\alpha_i r}]$ به ازای $i = 1, ..., n-1, n+1, ..., 2n$ و $\alpha < 1$ طبق رابطه زیر تعریف می‌شود. ($n$ تعداد $\alpha-$برش‌هاست)

$$x_{\alpha_i l} = x_{\alpha_{i+1} l} - \Delta x_{\alpha_i l} \quad , \quad x_{\alpha_i r} = x_{\alpha_{i+1} r} + \Delta x_{\alpha_i r} \quad (5)$$

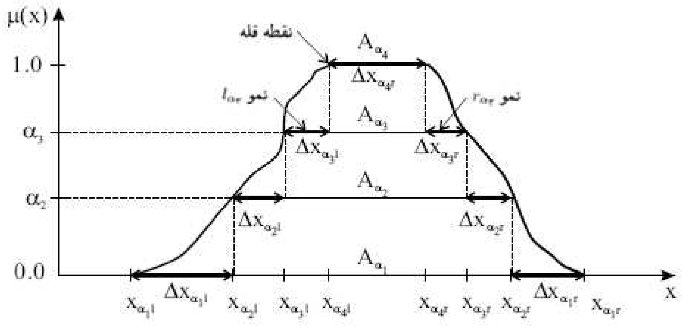
**نکته ۳** طبق رابطه فوق $\Delta x_{\alpha_i l}$ و $\Delta x_{\alpha_i r}$ مقادیر نامنفی را می‌پذیرند.

برای حالت $i = n$ یعنی نقاطی که $\alpha_n = 1$ است، $\Delta x_{\alpha_n l}$ و $\Delta x_{\alpha_n r}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$x_{\alpha_n l} = \min(x \in R \mid \mu(x) = 1\ ) \quad , \quad \Delta x_{\alpha_n l} = x_{\alpha_n l} \quad (6)$$

$$x_{\alpha_n r} = \max(x \in R \mid \mu(x) = 1\ )\ ,\ x_{\alpha_n r} = x_{\alpha_n l} + \Delta x_{\alpha_n r} \quad (7)$$

با توجه به رابطه (۶)، $\Delta x_{\alpha_n l}$ مقادیر منفی را نیز می‌پذیرد. در روابط (۴)،(۵) و (۶) $\Delta x_{\alpha_i l}$ را نمو $l_\alpha$، $\Delta x_{\alpha_i r}$ را نمو $r_\alpha$ و $x_{\alpha_n l}$ را قله می‌نامند. شکل ۳ مثالی از گسسته‌سازی یک عدد فازی به‌ازای $n = 4$ را نشان می‌دهد.




شکل ۳. گسسته‌سازی یک عدد فازی.

رابطه زیر، نمادگذاری دیگری از عدد فازی $\tilde{x}$ است که با ماتریس ستونی نشان داده می‌شود.

$$(8) \qquad {}_{lr}\tilde{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_{\alpha_1 l} \\ \Delta x_{\alpha_2 l} \\ . \\ . \\ . \\ \Delta x_{\alpha_2 r} \\ \Delta x_{\alpha_1 r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ . \\ . \\ . \\ \Delta x_{2n-1} \\ \Delta x_{2n} \end{bmatrix}$$

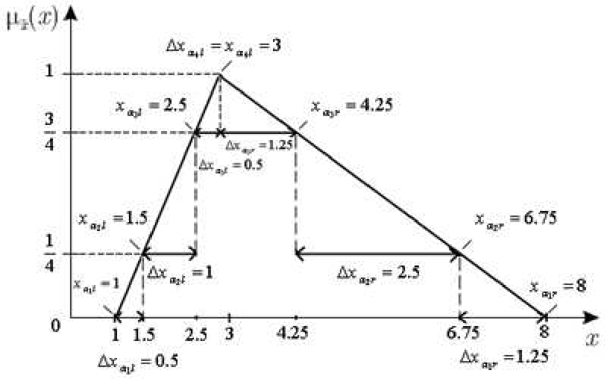
**مثال ۶** عدد فازی مثلثی $\tilde{x}$ = حدوداً ۳ را با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & 1 < x \leq 3 \\ \frac{-1}{5}(x-8) & 3 \leq x < 8 \end{cases}$$

در نظر بگیرید (شکل ۴). با استفاده از روش گسسته‌سازی، مقادیر گسسته $\Delta x_{\alpha_i r}$ , $\Delta x_{\alpha_i l}$ به‌ازای $n = 4$ به‌صورت زیر به‌دست می آید.

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0/5 \\ 1 \\ 0/5 \\ 3 \\ 0 \\ 1/25 \\ 2/5 \\ 1/25 \end{bmatrix}$$

توجه شود که در این مثال چون $x_{\alpha_4 l} = x_{\alpha_4 r} = \Delta x_{\alpha_4} = 3$ بنابراین $\Delta x_{\alpha_5} = x_{\alpha_4 r} - x_{\alpha_4 l} = 0$.




شکل ۴. عدد فازی $\tilde{x}$.

**تعریف ۹** جمع (تفاضل) چند عدد فازی که به‌صورت

$$\tilde{z} = \tilde{r} \oplus \tilde{s} \oplus \tilde{t} \oplus ... \quad \text{یا} \quad \tilde{z} = \tilde{r} \ominus \tilde{s} \ominus \tilde{t} \ominus ...$$

نشان داده می‌شود، از طریق جمع (تفاضل) درایه‌های بردار ستونی مربوط به اعداد فازی، طبق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\Delta z_j = \Delta r_j \pm \Delta s_j \pm \Delta t_j \pm ...$$

که در آن $\Delta z_j$ به ازای $j = 1, 2, ..., n-1, n+1, ..., 2n$ باید در شرط $\Delta z_j \geq 0$ صدق کند.

ضرب ماتریس حقیقی مقدار $A$ در عدد فازی $\tilde{x}$ با استفاده از عمل‌گر $\odot$ که به‌صورت $\underline{A} \odot \tilde{x} = \tilde{z}$ نشان داده می‌شود، از طریق ضرب ماتریس $\underline{A}$ در بردار ستونی مربوط به عدد فازی $\tilde{x}$ طبق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,2n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \cdots & a_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \vdots \\ \Delta z_{2n} \end{bmatrix}$$

که در آن $\Delta z_j$ به ازای $j = 1, 2, ..., n-1, n+1, ..., 2n$ باید در شرط زیر صدق کند.

$$\Delta z_j = a_{j,1}\Delta x_1 + \ldots + a_{j,2n}\Delta x_{2n} \geq 0$$

**مثال ۷** دو عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{x} = (۳, ۵, ۱/۴, ۱/۵)$ و $\tilde{y} = (-۱, ۰, ۲, ۰/۸)$ را در نظر بگیرید. جمع و تفاضل این دو عدد فازی به روش گسسته‌سازی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\tilde{z} = \tilde{x} \oplus \tilde{y} = \begin{bmatrix} ۱/۴ \\ ۳ \\ ۲ \\ ۱/۵ \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۱ \\ ۰/۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۴ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۲/۳ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{z} = \tilde{x} \ominus \tilde{y} = \begin{bmatrix} ۱/۴ \\ ۳ \\ ۲ \\ ۱/۵ \end{bmatrix} \ominus \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۱ \\ ۰/۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۶ \\ ۴ \\ ۱ \\ ۰/۷ \end{bmatrix}$$

در ادامه به‌منظور سادگی در نمادگذاری از $x_{r_i}$ و $x_{l_i}$ به جای $x_{\alpha_i r}$ و $x_{\alpha_i l}$ استفاده می‌شود.

## ۵ فرایندهای تصادفی فازی

با استفاده از روش گسسته‌سازی می‌توان متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}_\tau$ را به ازای هر $w \in \Omega$، بر اساس مقادیر $\Delta X_{l_i}(w,\tau)$ و $\Delta X_{r_i}(w,\tau)$ به‌صورت زیر تعریف کرد.

**تعریف ۱۰** متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}_\tau$ به‌ازای هر $w \in \Omega$ و $i = ۱, ..., n$ بر اساس روش گسسته‌سازی، طبق رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\tau(w) \quad = \quad & \{(X_{\alpha_i,\tau}(w), \mu(X_{\alpha_i,\tau}(w))) \mid \\ & X_{\alpha_i,\tau}(w) = [X_{l_{i+۱}}(w,\tau) - \Delta X_{l_i}(w,\tau), \\ & X_{r_{i+۱}}(w,\tau) + \Delta X_{r_i}(w,\tau)], \\ & \mu(X_{\alpha_i,\tau}(w)) = \alpha_i \ , \ \forall \alpha_i \in (۰, ۱]\} \end{aligned} \qquad (۹)$$

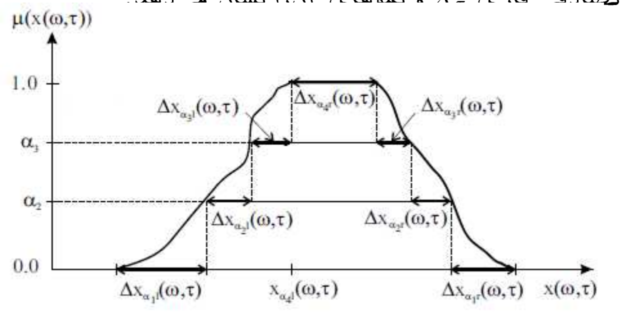
که در آن $\Delta X_{l_i}(w,\tau)$ به ازای $i = ۱, ..., n - ۱$ و $\Delta X_{r_i}$ به ازای $i = ۱, ..., n$، در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$\Delta X_{l_i}(w,\tau) \geq ۰ \ , \ \Delta X_{r_i}(w,\tau) \geq ۰$$

**تعریف ۱۱** یک فرایند تصادفی فازی $\tilde{X}(\tau) = \{\tilde{X}_\tau, \tau \in T\}$ گردایه‌ای از متغیرهای تصادفی فازی $\tilde{X}_\tau$ روی مجموعه‌ی اندیس‌گذار $T$ است. یعنی به‌ازای هر $\tau$ در مجموعه اندیس‌گذار $T$، $\tilde{X}_\tau$ یک متغیر تصادفی فازی است. مشاهدات یک فرایند تصادفی فازی $\tilde{X}(\tau)$ به‌ازای هر پیشامد $w_s \in \Omega$ عددهای فازی به‌صورت $\tilde{x}_s(w_s,\tau)$ می‌باشند.

توجه کنید که طبق تعریف ۱۰، $\Delta X_{l_i}(w,\tau)$ و $\Delta X_{r_i}(w,\tau)$ متغیرهای تصادفی همبسته هستند. زیرا در هر سطح $\alpha$، مقادیر این دو متغیر هم‌زمان و در ارتباط با یک‌دیگر، مشخص می‌شوند. در عمل هر $\Delta X_{l_i}(w,\tau)$ و $\Delta X_{r_i}(w,\tau)$ می‌تواند به‌وسیله توابع چگالی احتمال حقیقی مقدار $f(\Delta X_{l_i},\tau)$ و $f(\Delta X_{r_i},\tau)$ مشخص شوند.

**مثال ۸** فرض‌کنید $\tilde{X}(\tau)$ فرایند تصادفی میزان تغییرات شدت نور یک ستاره دوتایی تماسی نسبت به میانگین آن در سیستم استاندارد در زمان‌های گسسته‌ی $\tau = \tau_۱, \tau_۲, ...$ باشد که به‌صورت اعداد فازی گزارش می‌شوند. می‌توان فرض نمود که میزان تغییرات شدت نور ستاره دوتایی تماسی نسبت به میانگین آن در هر زمان $\tau$ یک متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}_\tau$ است که نموهای تصادفی آن، یعنی $\Delta X_i(w,\tau) \ , \ i = ۱, ۲, ..., ۲n$ دارای توزیع یکنواخت $(۰, ۱)$ می‌باشند. شکل ۵ نمودار متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}_\tau$ و نموهای آن را نشان می دهد.




شکل ۵. متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}_\tau$ در مثال ۸.

همانند فرایندهای تصادفی در حالت معمولی، برای شناسایی یک فرایند تصادفی فازی گشتاورهای مرتبه اول و دوم یک

فرایند به‌کار می‌رود.

**تعریف ۱۲** میانگین فرایند تصادفی فازی $\tilde{X}_\tau$ ($\tau$ زمان‌های گسسته)، $E(\tilde{X}_\tau) = \tilde{m}_{\tilde{X}_\tau}$ بر اساس روش گسسته‌سازی، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$E[\tilde{X}_\tau] = \tilde{m}_{\tilde{X}_\tau} = \begin{bmatrix} \Delta m_{\alpha_1 l}(\tau) \\ \vdots \\ \Delta m_{\alpha_n l}(\tau) \\ \vdots \\ \Delta m_{\alpha_1 r}(\tau) \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

$$E[\tilde{X}_\tau] = \tilde{m}_{\tilde{X}_\tau} = \begin{bmatrix} \int_0^\infty \Delta x_{\alpha_1 l} f_{\Delta X_{\alpha_1 l}}(\Delta x_{\alpha_1 l}, \tau)\, d\Delta x_{\alpha_1 l}(\tau) \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^\infty \Delta x_{\alpha_n l} f_{\Delta X_{\alpha_n l}}(\Delta x_{\alpha_n l}, \tau)\, d\Delta x_{\alpha_n l}(\tau) \\ \vdots \\ \int_0^\infty \Delta x_{\alpha_1 r} f_{\Delta X_{\alpha_1 r}}(\Delta x_{\alpha_1 r}, \tau)\, d\Delta x_{\alpha_1 r}(\tau) \end{bmatrix}$$

در روابط فوق $f_{\Delta X_{\alpha_i l}}(\Delta x_{\alpha_i l}, \tau)$ و $f_{\Delta X_{\alpha_i r}}(\Delta x_{\alpha_i r}, \tau)$ به ازای $i = 1, ..., n$ توابع چگالی احتمال مربوط به نموهای تصادفی $\Delta X_{\alpha_i l}(\tau)$ و $\Delta X_{\alpha_i r}(\tau)$ هستند.

**تعریف ۱۳** وابستگی خطی بین دو مشاهده از یک فرایند تصادفی فازی در زمان‌های $\tau_a$ و $\tau_b$ به‌وسیله تابع کواریانس $_{lr}K_{\tilde{X}_\tau}(\tau_a, \tau_b)$ تعریف می‌شود

$$_{lr}K_{\tilde{X}_\tau}(\tau_a, \tau_b) = \begin{bmatrix} k_{a_1 l}^{a_1 l}(\tau_a, \tau_b) & k_{a_1 l}^{a_2 l}(\tau_a, \tau_b) & \cdots & k_{a_1 l}^{a_2 r}(\tau_a, \tau_b) & k_{a_1 l}^{a_1 r}(\tau_a, \tau_b) \\ k_{a_2 l}^{a_1 l}(\tau_a, \tau_b) & k_{a_2 l}^{a_2 l}(\tau_a, \tau_b) & \cdots & k_{a_2 l}^{a_2 r}(\tau_a, \tau_b) & k_{a_2 l}^{a_1 r}(\tau_a, \tau_b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{a_1 r}^{a_1 l}(\tau_a, \tau_b) & k_{a_1 r}^{a_2 l}(\tau_a, \tau_b) & \cdots & k_{a_1 r}^{a_2 r}(\tau_a, \tau_b) & k_{a_1 r}^{a_1 r}(\tau_a, \tau_b) \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

که هر عضو آن به ازای $i, j = 1, 2, ..., n$ به‌صورت زیر می‌باشد

$$k_{\alpha_j r}^{\alpha_i l}(\tau_a, \tau_b) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (\Delta x_{\alpha_i l} - \Delta m_{\alpha_i l}(\tau_a)). (\Delta x_{\alpha_j r} - \Delta m_{\alpha_j r}(\tau_b)). f(\Delta x_{\alpha_i l}, \Delta x_{\alpha_j r}, \tau_a, \tau_b)\, d\Delta x_{\alpha_i l} d\Delta x_{\alpha_j r} \qquad (۱۲)$$

**تعریف ۱۴** تابع واریانس $l_\alpha r_\alpha$ای یک فرایند تصادفی فازی $\tilde{X}_\tau$، $Var(\tilde{X}_\tau) = {}_{lr}\sigma_{\tilde{X}}^2(\tau)$، درایه‌های روی قطر ماتریس $_{lr}K_{\tilde{X}}(\tau_a, \tau_b)$ است که در آن $\tau_a = \tau_b = \tau$.

**تعریف ۱۵** یک فرایند تصادفی فازی $\tilde{X}_\tau$ را ایستا گوییم اگر:

۱) تابع کواریانس $_{lr}K_{\tilde{X}}(\tau_a, \tau_b)$ به $\tau_a$ و $\tau_b$ بستگی نداشته باشد بلکه به $\Delta\tau = \tau_a - \tau_b$ بستگی داشته باشد.

۲) $\forall \tau \in T$ $\quad E(\tilde{X}_\tau) = \tilde{m}_{\tilde{X}_\tau} =$ ثابت.

**مثال ۹** فرایند تصادفی فازی $\tilde{Z}(\tau)$ را در نظر بگیرید. به‌ازای هر زمان $\tau$، $\tilde{Z}_\tau$ یک متغیر تصادفی فازی با مشاهده $\tilde{z}_\tau$ می‌باشد. متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار $\Delta Z_j(\tau)$ و $\Delta Z_j(\tau + \Delta\tau)$، نموهای تصادفی $l_\alpha$ و $r_\alpha$ مربوط به متغیرهای تصادفی فازی $\tilde{Z}_\tau$ و $\tilde{Z}_{\tau+\Delta\tau}$ هستند. فرض کنید در این فرایند تصادفی فازی، $\Delta Z_j(\tau)$ و $\Delta Z_j(\tau + \Delta\tau)$ مستقل از هم، با میانگین ثابت باشند و در رابطه $Var(\Delta Z_j(\tau)) = Var(\Delta Z_j(\tau+\Delta\tau))$ صدق کنند. هم‌چنین داشته باشیم

$$E(\tilde{Z}(\tau)) = \tilde{m}_{\tilde{Z}} = \text{ثابت}, \quad Var(\tilde{Z}(\tau)) = \tilde{\sigma}_{\tilde{Z}}^2 = \text{ثابت}$$

$$_{lr}K_{\tilde{Z}}(\tau_a, \tau_b) = \begin{cases} _{lr}K_{\tilde{Z}}(0) & for \quad \tau_a - \tau_b = 0 \\ 0 & for \quad \tau_a - \tau_b \neq 0 \end{cases} \qquad (۱۳)$$

که در آن ۰ ماتریس $[2n, 2n]$ با درایه‌های صفر است.

طبق رابطه (۱۳) $_{lr}K_{\tilde{Z}}(\tau_a, \tau_b)$ فقط به $\Delta\tau = \tau_a - \tau_b$ بستگی دارد و مقدار میانگین آن ثابت است، بنابراین طبق تعریف (۱۵) فرایند تصادفی فازی $\tilde{Z}(\tau)$ ایستاست.

**مثال ۱۰** فرایند تصادفی فازی، $\tilde{X}(\tau)$ را در نظر بگیرید که در هر زمان $\tau$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\tilde{X}_\tau = \tilde{Z}_\tau \ominus B_1 \odot \tilde{Z}_{\tau-1} \ominus ... \ominus B_q \odot \tilde{Z}_{\tau-q}$$

که در آن $\tilde{Z}_\tau, \tilde{Z}_{\tau-1}, ..., \tilde{Z}_{\tau-q}$ متغیرهای تصادفی فازی از فرایند تصادفی فازی $\tilde{Z}(\tau)$ (مثال (۸)) در زمان‌های $\tau, \tau-1, ..., \tau-q$ هستند. میانگین $E(\tilde{X}_\tau)$، تابع واریانس

$_{lr}Var(\tilde{X}_\tau)$ و تابع کواریانس $_{lr}K_{\tilde{X}_\tau}(\tau_a,\tau_b)$ برای فرایند تصادفی فازی $\tilde{X}(\tau)$ طبق روابط زیر به‌دست می آید

$$E(\tilde{X}_\tau) = \tilde{m}_{\tilde{X}_\tau} = [\sum_{j=0}^{q}(-B_j)] \odot \tilde{m}_{\tilde{Z}_\tau}$$

که در آن
$$B_0 = \begin{bmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

$$_{lr}Var(\tilde{X}_\tau) = {}_{lr}\sigma^2_{\tilde{X}_\tau} = [\sum_{j=0}^{q}(B_j \bullet B_j)]\cdot {}_{lr}\sigma^2_{\tilde{Z}_\tau}$$

در رابطه فوق، عمل‌گر $\bullet$ نشان‌دهنده ضرب درایه در درایه‌ی ماتریس‌های پارامتری است. طبق تعریف (۱۳) داریم

$$_{lr}K_{\tilde{X}_\tau}(\tau_a,\tau_b) = \sum_{c=0}^{q-(\tau_a-\tau_b)} B_{c+\tau_a-\tau_b}\, {}_{lr}K_{\tilde{Z}_\tau}(\tau_a-\tau_b=0) B_c^T \quad (۱۴)$$

که درایه‌های آن به‌صورت زیر می‌باشند

$$k_{\tilde{X}_\tau}[i,j](\tau_a-\tau_b) = \sum_{c=0}^{q-(\tau_a-\tau_b)} \sum_{b=1}^{2n}\sum_{a=1}^{2n} b_c[j,b]\; k_{\tilde{Z}_\tau}[a,b](\tau_a-\tau_b=0)\; b_{c+\tau_a-\tau_b}[i,a]$$

مقادیر $b_c[j,b]$ و $b_{c+\tau_a-\tau_b}[i,a]$ درایه‌های ماتریس‌های پارامتری $B_c$ و $B_{c+\tau_a-\tau_b}$ و $k_{\tilde{Z}_\tau}[a,b]$ درایه‌های تابع کواریانس $_{lr}K_{\tilde{Z}_\tau}(\tau_a-\tau_b=0)$ می‌باشند. طبق رابطه (۱۴) $_{lr}K_{\tilde{X}}(\tau_a,\tau_b)$ تنها به $\Delta\tau = \tau_a - \tau_b$ بستگی دارد و میانگین آن ثابت است. بنابراین طبق تعریف (۱۵) فرایند تصادفی فازی $\tilde{Z}(\tau)$ ایستاست.

فرایندهای تصادفی فازی ایستا در مدل‌سازی سری‌های زمانی با مشاهدات فازی کاربرد دارند. خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای مطالعه بیشتر این نوع فرایندها و کاربردهای آن به [۹] مراجعه نماید.

## ۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، بر اساس مفهوم متغیر تصادفی فازی، فرایند تصادفی فازی به‌عنوان یک فرایند تصادفی که در آن مشاهدات به‌صورت اعداد فازی هستند، مورد بررسی قرار گرفت. در این‌باره، روش گسسته‌سازی یک عدد فازی که برای انجام محاسبات مربوطه در تحلیل فرایند لازم است، تشریح شد. مدل‌سازی سری‌های زمانی فازی بااستفاده از فرایندهای تصادفی با مشاهدات فازی به روش گسسته‌سازی و بررسی این نوع از فرایندهای تصادفی در علوم و مهندسی از جمله زمینه‌هایی است که برای تحقیق در آینده پیشنهاد می‌شود.

## مراجع

[۱] طاهری، م. ارقامی، ن. ر. (۱۳۷۴)، متغیرهای تصادفی فازی، گلچین ریاضی، ۱: ۱۵—۶.

[2] Klir, G., Yuan, B. (1996), *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Systems*, Springer.

[3] Kratschmer, V. (2001), *A unified approach to fuzzy random variables*, Fuzzy Sets and Syst. 123: 1-9.

[4] Kwakernaak, H., Rangquan W., Shihuang, S. (1978), *Fuzzy random variables - I. Definitions and theorems*, Inf. Sci. 15: 1-29.

[5] Kwakernaak, H. (1979), *Fuzzy random variables - II. Algorithm and examples for the discrete case*, Inf. Sci. 17: 253-278.

[6] liangjian, H., Rangquan, W., Shihuang, S. (2002), *Analysis of dynamical systems whose inputs are fuzzy stochastic process*. Fuzzy Sets and Syst. 129: 111-118.

[7] Moller, B., Beer, M. (2004), *Fuzzy Randomness-Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics*, Springer.

[8] Moller, B., Beer, M., Reuter, U. (2005), *Theorical basis of fuzzy randomness-application to time series with fuzzy data*, ICOSSAR, pp. 1701-1707.

[9] Moller, B., Reuter, U. (2007), *Uncertainty Forecasting in Engineering*, Springer.

[10] Moller, B., Reuter, U. (2008), *Prediction of uncertain structural responses using fuzzy time series*, Computers and Structures 86: 1123-1139.

[11] Puri, M.L. and Ralescu, D. (1986), *Fuzzy random variables*, J. Math. Anal. Appl. 114: 409-422.

[12] Ross, S.M. (1996), *Stochastic Processes*, J. Wiley.

[13] Shapiro, A.F. (2009), *Fuzzy random variables*, Insurance: Mathematics and Economics 44: 307-314.

[14] Wang, G., Zang, Y. (1992), *The theory of fuzzy stochastic process*, Fuzzy Sets and Syst. 51: 161-178.

[15] Zhang, Y., Wang, G. (1996), *The general theory for response analysis of fuzzy stochastic dynamical systems*, Fuzzy Sets and Syst. 83: 369-405.