# خاصیت فقدان حافظه موضعی و ارتباط آن با نرخ شکست تناوبی

صدیقه اپرام[۱]، عبدالحمید رضایی رکن‌آبادی[۲] و غلامرضا محتشمی برزادران[۳]

چکیده

در این مقاله خاصیت ضعیف‌تری نسبت به خاصیت فقدان حافظه تحت عنوان خاصیت فقدان حافظه موضعی ارایه شده است و کلاس جدیدی از توزیع‌های طول عمر که دارای این خاصیت می‌باشند معرفی شده است، در ادامه ارتباط این خاصیت را با متغیرهای تصادفی دارای نرخ شکست تناوبی مورد بررسی قراردادهایم. همان‌گونه که متناظر با خاصیت فقدان حافظه، کلاس توزیع‌های طول عمر با نرخ شکست ثابت حاصل می‌شود، نشان می‌دهیم کلاس متناظر با خاصیت فقدان حافظه موضعی، توزیع‌های طول عمر بانرخ شکست متناوب است. هم‌چنین در ادامه فرم تابعی توزیع‌های دارای خاصیت فقدان حافظه را معرفی کرده و به برخی قضایای مرتبط اشاره می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** خاصیت فقدان حافظه، خاصیت فقدان حافظه موضعی، نرخ شکست تناوبی.
**رده‌بندی موضوعی** (MSC2000): 62N05

## ۱ مقدمه

دوره‌ای بودن دربسیاری از پدیده‌های طبیعی از قبیل رسوبات زمین‌شناسی، اتفاقات آب و هوایی و فعالیت خورشیدی امری پذیرفته شده است. بسیاری از کالاهایی مانند چاپ‌گرها که به‌طریقی دارای شرایطی تناوبی هستند نیز مطالعه توزیع‌های طول عمر با نرخ شکست تناوبی را اجتناب ناپذیر می‌سازد، از این‌رو در دو دهه اخیر توجه تعدادی از آماردانان به این مساله معطوف شده است. در این راستا می‌توان به چکووا و دیمیترو [۲] اشاره نمود. از آن‌جایی که به‌عنوان حالتی حدی از توابع متناوب می‌توان به تابع ثابت اشاره کرد، نرخ شکست متناوب به‌صورت حدی همان نرخ شکست ثابت است که قبلا به‌عنوان کلاس مهمی از خانواده توزیع‌های طول عمر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. دو توزیع نمایی و هندسی، به‌ترتیب برای متغیرهای تصادفی پیوسته و گسسته، به‌دلیل ثابت بودن نرخ شکست و پیروی آن‌ها از خاصیت معروف فقدان حافظه ($LM$)[۴]، از اهمیت خاصی در قابلیت اعتماد برخوردارند. برویجن [۱]، فورتت [۷] و جورکت [۹] خاصیت $LM$ را برای توزیع نمایی مطرح نموده و نقش آن‌را در دسته‌بندی توزیع‌های طول عمر بیان کردند و کران‌های احتمال مربوط به آن‌را تعیین نمودند. گالامبوز و کتز [۸] توزیع‌های نمایی و هندسی را بر اساس خاصیت $LM$ مشخصه‌سازی نمودند. چکووا و دیمیترو [۲] کلاس جدیدی از توزیع‌های احتمال با عنوان توزیع‌های دارای خاصیت فقدان حافظه موضعی ($ALM$)[۵] را برای مدل صحیح پدیده‌هایی که دارای رفتار تناوبی‌اند معرفی کردند. چکووا و دیمیترو و خلیل [۳] توزیع‌های احتمال مشخصی را که دارای خاصیت $ALM$ هستند معرفی نمودند. چکووا

[۱] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد epram_113@yahoo.com
[۲] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد rezaei@math.um.ac.ir
[۳] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد gmb1334@yahoo.com
[۴] Lack of Memory
[۵] Almost Lack of Memory

و دیمیترو و گاریدو [۴] شرایط لازم و کافی برای آن‌که یک فرآیند پواسون ناایستا[۶] $(NPP)$ دارای نرخ شکست تناوبی باشد را ارایه نمودند. دیمیترو و ریکو و کروگلی و قیطانی [۵] پارامترهای توزیع‌های دارای خاصیت $ALM$ را برآورد کردند و آزمون نسبت درست‌نمایی را برای آزمون فرض توزیع‌های دارای خاصیت $ALM$ انجام دادند. در ادامه دیمیترو و گرین و ریکو و استن‌چو [۶] این‌کار را کامل‌تر کردند.

تبیین شرایطی که خاصیت $ALM$ تنها برای دنباله‌ای از مقادیر حقیقی برقرار باشد ساختار مشابهی با دو توزیع مهم نمایی و هندسی دارد، که به شرح آن می‌پردازیم.

## ۲ نرخ شکست تناوبی

قبل از ادامه مباحث لازم است که به تعاریف زیر بپردازیم.

**تعریف ۱** متغیر تصادفی $X$ را دارای خاصیت فقدان حافظه $(LM)$ گوییم هرگاه به‌ازای هر $b > 0$،

$$P(X \geq x+b | X \geq b) = P(X \geq x); \quad x > 0. \qquad (1)$$

**تعریف ۲** متغیر تصادفی $X$ را دارای خاصیت فقدان حافظه موضعی $(ALM)$ گویند هرگاه دنباله‌ای از مقادیر حقیقی مثبت $\{a_n; n \geq 1\}$ وجود داشته باشد طوری‌که،

$$P(X \geq x+a_n | X \geq a_n) = P(X \geq x); \quad x > 0. \qquad (2)$$

در حقیقت این خاصیت را می‌توان خاصیت فقدان حافظه موضعی نامید که خاصیت فقدان حافظه را به جای "تمام نقاط حقیقی مثبت"، فقط "در دنباله‌ای از نقاط حقیقی مثبت" بیان می‌کند.

**تعریف ۳** نرخ شکست متغیر تصادفی $X$ با تابع چگالی احتمال (جرم احتمال) $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ به‌صورت $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$ تعریف می‌شود.

نرخ شکست اندازه‌ای برای بیان روند ادامه حیات یا طول عمر موجودات زنده و غیرزنده است و در این رابطه کلاس‌های متفاوتی از متغیرهای تصادفی طول عمر تعریف شده‌اند که عمدتا عبارت‌اند از نرخ شکست ثابت[۷] $(CFR)$، نرخ شکست صعودی[۸] $(IFR)$، نرخ شکست نزولی[۹] $(DFR)$، نرخ شکست وان حمامی شکل[۱۰] $(BT)$، و نرخ شکست وان حمامی شکل معکوس[۱۱] $(UBT)$. در این مقاله کلاس دیگری از متغیرهای طول عمر با نرخ شکست تناوبی[۱۲] $(PFR)$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در عمل با موارد فراوانی از سیستم‌ها یا مولفه‌های دارای نرخ شکست تناوبی مواجه هستیم. همه کالاهایی مانند چاپ‌گرها که عملکرد آن‌ها به‌نحوی در یک روند تناوبی قرار می‌گیرد را می‌توان در این گروه قرار داد.

همان‌گونه که تناظری یک‌به‌یک بین خاصیت فقدان حافظه و کلاس $CFR$ وجود دارد، قضیه زیر نیز ارتباط بین کلاس توزیع‌های $ALM$ و کلاس $CFR$ را نشان می‌دهد.

**قضیه ۱** متغیر تصادفی نامنفی $X$ دارای نرخ شکست متناوب با دوره تناوب $c \geq 0$ است اگر وتنهااگر $X$ خاصیت $ALM$ را بر دنباله $\{a_n = cn \quad ; n \geq 1\}$ داشته باشد.

---

[۶] Non-stationary Poisson Process
[۷] Constant Failure Rate
[۸] Increasing Failure Rate
[۹] Decreasing Failure Rate
[۱۰] Bathtub Shape
[۱۱] Upside-down Bathtub Shape
[۱۲] Periodic Failure Rate

برای مشاهده اثبات این قضیه می‌توان به چکووا و دیمیترو و خلیل [۳] مراجعه نمود.
قضیه زیر ارتباط خاصیت $LM$ در نقطه $c > 0$ و خاصیت $ALM$ را بیان می‌کند.

**قضیه ۲** اگر متغیر تصادفی $X$ دارای خاصیت $LM$ در نقطه $c > 0$ باشد، یعنی به‌ازای مقدار ثابت $c > 0$،

$$P(X \geq x + c | X \geq c) = P(X \geq x); \quad x > 0,$$

آن‌گاه $X$ دارای خاصیت $ALM$ بر دنباله حسابی $\{a_n = nc\}$ است.

**برهان** چون متغیر تصادفی $X$ خاصیت $LM$ را در نقطه $c$ دارد، پس

$$P(X \geq x)P(X \geq c) = P(X \geq x + c),$$

این برابری به‌ازای هر $x \geq 0$ از جمله

$$x = kc, \ldots, x = 2c, x = c$$

نیز برقرار است بنابراین از تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$P(X \geq kc) = (P(X \geq c))^k.$$

از طرفی به استقرا ثابت می‌شود

$$P(X \geq nc + x | X \geq nc) = P(X \geq x), \qquad n \in N.$$

یعنی در حقیقت نشان دادیم، اگر متغیر تصادفی $X$ دارای خاصیت $LM$ در نقطه $c$ باشد، دنباله‌ای چون $\{nc\}$ وجود دارد که به‌ازای هر $x > 0$،

$$P(X \geq nc + x | X \geq nc) = P(X \geq x),$$

و این همان تعریف $ALM$ است.

فرض کنید $\{X_n\}$ و $\{Y_n\}$ دو دنباله مستقل از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع به‌ترتیب با توابع توزیع $F_X$ و $F_Y$، باشند دراین‌صورت متغیرهای تصادفی $N$ و $Z$ را برحسب آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N = min\{n | \quad X_n < Y_n, \quad n \geq 1\},$$

$$Z = \sum_{n=1}^{N} min(X_n, Y_n). \tag{3}$$

در سیستمی با طول عمر $Z$ که از قطعات مستقل مختلف و قابل تعویض تشکیل شده است، می‌توان $Y_n$ را به‌عنوان طول عمر و $X_n$ را به‌عنوان مدت زمان استفاده قطعه $n$ام در این سیستم در نظر گرفت. قضیه زیر ارتباط توزیع متغیر تصادفی $Z$ و دنباله متغیرهای تصادفی $X_n$ و $Y_n$ را بیان می‌کند.

**قضیه ۳** اگردنباله متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $Y_n$ دارای توزیع هندسی باشد، متغیر تصادفی $Z$ و دنباله متغیرهای تصادفی $X_n$ هم‌توزیع هستند، اگروتنهااگر $X_n$ ها نیز دارای توزیع هندسی باشند.

این قضیه را می‌توان با استفاده از تابع مولد احتمال متغیر تصادفی $Z$ یعنی،

$$\begin{aligned} \psi_Z(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(Z = k) \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) t^k \sum_{v=k+1}^{\infty} P(Y_n = v)}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_n = k) t^k \sum_{v=k}^{\infty} P(X_n = v)} \end{aligned} \tag{4}$$

ثابت نمود. برای جزئیات بیشتر به خلیل و دیمیترو و دیون [۱۰] مراجعه نمایید.

**مثال ۱** فرض کنید برای فیلم‌برداری از یک مراسم، بخواهیم از دوربین قابل حملی که با باطری کار می‌کند استفاده کنیم و طول مدت مراسم متغیر تصادفی مانند $Z$ باشد. مراسم ممکن است آن‌قدر طولانی شود که چندین باطری با طول عمر

ثابت $c$ به‌طور کامل مورد استفاده قرار گرفته و تنها بخشی از باطری آخر مصرف شود و متغیر تصادفی $N$ را شماره آخرین باطری مورد استفاده بنامیم، با فرض آن‌که $X_i$ مدت زمانی از مراسم باشد که با استفاده از باطری $i$ام فیلم‌برداری شده است، دراین‌صورت بدیهی است اگر هیچ اطلاعی از طول مدت مراسم نداشته باشیم $X_1, \ldots, X_N$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع بوده و داریم

$$Z = \sum_{n=1}^{N} min(X_n, Y_n = c) = (N-1)c + X_N,$$

که در آن

$$N = min\{n| \quad X_n < c, \quad n \geq 1\}.$$

قضیه زیر که برای اثبات آن می‌توان به چکووا و دیمیترو و خلیل [۳] مراجعه نمود، فرم تابعی توزیع‌های احتمال گسسته دارای خاصیت $LM$ را درحالت کلی معرفی می‌کند.

**قضیه ۴** متغیر تصادفی $X$ دارای خاصیت $LM$ در نقطه $c > 0$ است اگروتنهااگر چگالی آن به فرم زیر باشد

$$P_X(nc+k) = \alpha^n (1-\alpha) q_k \; ; \quad k = 0, 1, \ldots, c-1 \;, \; n = 0, 1, \ldots \quad (5)$$

که در آن

$$.\alpha \in (0,1), \qquad q_k > 0, \qquad \sum_{k=0}^{c-1} q_k = 1.$$

شایان ذکر است توزیع هندسی به کلاس توزیع‌های به فرم (۵) تعلق دارد. زیرا با قرار دادن $\alpha = \beta^c$ و $q_k = \frac{\beta^k(1-\beta)}{1-\beta^c}$ در فرم (۵)، توزیع هندسی با پارامتر $\beta$ حاصل می‌شود.

**قضیه ۵** فرض کنید متغیر تصادفی $Z$ بنا به رابطه (۳) تعریف شده باشد. اگر دنباله متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $X_n$ها دارای چگالی به فرم (۵) بوده و به‌ازای عدد طبیعی ثابت اختیاری $M$ داشته باشیم $P(Y_n = Mc) = 1$، آن‌گاه $X_n$ها و $Z = \sum_{n=1}^{N} min(X_n, Y_n)$ هم‌توزیع خواهند بود.

**برهان** تابع مولد احتمال متغیر تصادفی نامنفی $Z$ بنا به رابطه (۴) به‌صورت زیر است

$$\psi_Z(t) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) t^k \sum_{v=k+1}^{\infty} P(Y_n = v)}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_n = k) t^k \sum_{v=k}^{\infty} P(X_n = v)}.$$

اگر $Y_n$ دارای توزیع تباهیده در نقطه $b$ باشد آن‌گاه

$$P(Y_n = y) = \begin{cases} 0 & y \neq b \\ 1 & y = b \end{cases}$$

بنابراین اگر $k = 0, 1, \ldots$ و $b \geq k+1$ باشد، دراین‌صورت

$$\sum_{v=k+1}^{\infty} P(Y_n = v) = P(Y_n = b) = 1,$$

لذا صورت کسر $\psi_Z(t)$ معادل با $\sum_{k=0}^{b-1} P(X_n = k) t^k$ است و به تشابه در مخرج کسر

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(Y_n = k) t^k \sum_{v=k}^{\infty} P(X_n = v) = t^b \sum_{v=b}^{\infty} P(X_n = v),$$

و دراین حالت مخرج کسر برابر با $1 - t^b \sum_{v=b}^{\infty} P(X_n = v)$ می‌باشد. پس نشان دادیم اگر متغیر تصادفی $Y_n$ دارای توزیع تباهیده در نقطه $b$ باشد آن‌گاه

$$\psi_Z(t) = \frac{\sum_{k=0}^{b-1} P(X = k) t^k}{1 - t^b \sum_{v=b}^{\infty} P(X = v)}, \qquad (6)$$

حال کافی است نشان دهیم تابع مولد احتمال دنباله متغیرهای تصادفی $X_n$ها و $Z$ هر دو به فرم (۶) هستند و این موضوع نیز با توجه به چگالی $X_n$ها که در صورت قضیه معرفی شده است به سادگی حاصل می‌گردد.

**نتیجه ۱** اگر در قضیه بالا $M = ۱$ باشد و $X_n$ها با $Z$ هم‌توزیع باشند، آن‌گاه تابع چگالی دنباله متغیرهای تصادفی $X_n$ در حالت گسسته به فرم (۵) می‌باشد.

**برهان** از فرض قضیه نتیجه می‌شود $Z = (N - ۱)c + X_N$ و چون $N$ دارای توزیع هندسی بااحتمال موفقیت $P(X < c) = ۱ - \alpha$ است و $X_N$ و $N$ مستقل از یک‌دیگرند، داریم

$$\psi_Z(t) = \psi_{(N-۱)c}(t)\psi_{X_N}(t),$$

از طرفی

$$\begin{aligned}\psi_{(N-۱)c}(t) &= E(t^{(N-۱)c}) \\ &= \sum_{N=۱}^{\infty} t^{(N-۱)c}(۱-\alpha)\alpha^{N-۱} \\ &= \sum_{N=۰}^{\infty} t^{Nc}(۱-\alpha)(\alpha)^N \\ &= (۱-\alpha)\sum_{N=۰}^{\infty}(\alpha t^c)^N \\ &= \frac{۱-\alpha}{۱-\alpha t^c},\end{aligned} \quad (۷)$$

بنابراین

$$\psi_Z(t) = \frac{۱-\alpha}{۱-\alpha t^c}\psi_{X_N}(t).$$

نهایتا اگر چگالی متغیر تصادفی $X_n$ به فرم (۵) باشد، آن‌گاه تابع مولد احتمال $X_n$ عبارت است از

$$\begin{aligned}\psi_{X_n}(t) = E(t^{X_n}) &= \sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{k=۰}^{c-۱}\alpha^n(۱-\alpha)q_k t^{nc+k} \\ &= (۱-\alpha)\sum_{k=۰}^{c-۱} q_k t^k \sum_{n=۰}^{\infty}(\alpha t^c)^n \\ &= \frac{۱-\alpha}{۱-\alpha t^c}\sum_{k=۰}^{c-۱} q_k t^k \\ &= \frac{۱-\alpha}{۱-\alpha t^c}\psi_{X_N}(t),\end{aligned}$$

که معادل با $\psi_Z(t)$ است لذا نتیجه مطلوب از یکتایی تابع مولد احتمال حاصل می‌گردد.

**قضیه ٦** متغیر تصادفی $Z$ دارای خاصیت $LM$ در نقطه $c$ است اگروتنهااگر بتوان آن‌را به فرم $Z = X_c + cT$ تجزیه کرد، که در آن $X_c$ متغیر تصادفی مستقل با تکیه‌گاه $[۰, c)$ و $T$ دارای توزیع هندسی روی مقادیر صحیح نامنفی است.

با فرض آن‌که در قضیه ۳ متغیر تصادفی $T$ دارای توزیع هندسی با پارامتر $\alpha$ باشد $T \sim Ge(\alpha)$، به‌سادگی می‌توان نشان داد برآورد گشتاوری پارامتر این توزیع به‌صورت $\hat{\alpha} = \frac{\overline{Z}-\overline{X}}{c+\overline{Z}-\overline{X}}$ است.

مثال (۱) رامجددا یادآور می‌شویم.
بدیهی است در آن مثال $(N - ۱)$ دارای توزیع هندسی روی مقادیر صحیح نامنفی با احتمال موفقیت $\alpha$ است که در آن $\alpha$ احتمال آن است که یک باطری به‌طور کامل مصرف نشود. بنابراین شرایط قضیه (٦) در این مثال برقرار بوده و $Z$ دارای خاصیت $LM$ در نقطه $c$ است و بنابه قضایای ذکر شده $Z$ دارای خاصیت $ALM$ نیز می‌باشد.

## ۳ نتیجه‌گیری و آینده تحقیق

نکاتی در مورد خاصیت فقدان حافظه موضعی و ارتباط آن با نرخ خرابی به‌عنوان شروع بحث در این نوشتار مطرح شد. شایان ذکر است که ویژگی‌های قابلیت اعتماد در توزیع‌های با نرخ شکست تناوبی از قبیل میانگین باقی‌مانده عمر و برآورد دوره تناوب می‌تواند مورد توجه علاقه‌مندان به این مبحث قرار گیرد. علاوه بر آن مباحث استنباط آماری از جمله آزمون فرض توزیع‌های دارای خاصیت $ALM$ و برآورد پارامترها، می‌تواند از جمله مسیر آینده تحقیق باشد.

# مراجع

[1] Bruijn, N. G. (1966), *On almost additive functions.* Collaqu. Math., 15:59-63.

[2] Chukova, S. and Dimitrov, B. (1992), *On distributions having the almost-lack-of-memory property.* J. Appl. Prob., 29, 691-698.

[3] Chukova, S., Dimitrov, B. and Khalil, Z. (1993), *A characterization of probability distributions similar to the exponential.* The Canadian Journal of Statistics, Vol. 21, No. 3, 269-276.

[4] Chukova, S., Dimitrov, B. and Garrido, J . (1993), *Renewal non-homogeneous Poisson processes generated by distribution with periodic failure rates.* Stat. Prob. Lett., Vol. 7, No. 5, 19-25.

[5] Dimitrov, B.N., Rykov, V.V., Krougly, Z.L. and Ghitany, M.E. (2003), *On Properties and Statistical Estimation of ALM Distribution.* Hawaii Int, Conf. Statistics and Related Fields, Honolulu.

[6] Dimitrov, B.N., Green, D., Rykov, V.V. and Stanchev, P. (2003), *On statistical hypothesis testing via simulation method.* Inter. J. Information Theories and Appl., Vol. 10, 408-414.

[7] Fortet, R. (1977), *Elements of Probability Theory.* New York: Gordon and Breach.

[8] Galambos, J. and Kotz, S. (1978), *Characterizations of Probability Distributions: A unified approach with an emphasis on exponential and related models.* Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

[9] Jurcat, W. B. (1965), *On Cauchy's functional equation.* Proc. Amer. Math. Soc., 16: 683-686.

[10] Khalil, Z., Dimitrov, B. and Dion, J.P. (1991), *A characterization of the geometric distribution related to random sums.* Comm. Statist. Stoch. Models, 7, 321-326.