

روش نمونه‌گیری برشی به عنوان یکی از روش‌های MCMC

اعظم ارشدی پور^۱

چکیده

در علوم کاربردی و مهندسی نمونه‌گیری از یک تابع توزیع از اهمیت بالایی برخوردار است. برای این منظور تاکنون روش‌های شبیه‌سازی آماری مختلفی معرفی شده است که هر کدام دارای ویژگی‌هایی هستند. یکی از این روش‌ها، روش نمونه‌گیری برشی است که بر پایه‌ی استفاده از متغیرهای کمکی است. در این مقاله ابتدا به بیان نمونه‌گیری برشی پرداخته می‌شود و سپس نوع پیشرفته‌تر آن در حالت تک متغیره و چندمتغیره معرفی و به همراه مثال‌هایی بررسی و تشریح می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: زنجیر مارکف مونت کارلویی، الگوریتم متروپولیس هستینگس، نمونه‌گیر گیبس، متغیر کمکی.
رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 62G07, 62G05, 62M15

۱ مقدمه

بسیاری علوم دیگر راه‌گشا هستند. الگوریتم‌های متفاوتی در روش‌های (MCMC) وجود دارد که متداول‌ترین آن‌ها متروپولیس-هستینگس^۲ و نمونه‌گیر گیبس^۳ هستند. اگرچه این الگوریتم‌ها در مواردی با محدودیت‌هایی روبرو هستند. در الگوریتم متروپولیس-هستینگس انتخاب بهینه‌ی توزیع پیشنهادی و پارامترهای مورد نیاز آن مورد بحث است. در نمونه‌گیر گیبس نیز ممکن است نمونه‌گیری از توزیع‌های شرطی کامل کار ساده‌ای نباشد، به عبارت دیگر ممکن است توزیع‌های شرطی کامل شکل متداول و شناخته شده‌ای نداشته باشند. برای پرهیز از چنین مواردی روش‌های دیگری بیان شده است. یکی از این روش‌ها، روش نمونه‌گیری برشی^۴ است که به اختصار آن را SS می‌نامیم و بر پایه‌ی استفاده از متغیرهای کمکی می‌باشد. پیشینه‌ی نمونه‌گیری برشی به دهه‌ی ۱۹۹۰ و به مقالات ویک فیلد و همکاران [۱۷]، بسیج و گرین [۱]، دامی‌ین و واکر [۴]، هیگدان [۹]، تایرنی و میرا [۱۶] و دامی‌ین

روش‌های مختلف زنجیر مارکف مونت کارلویی که به اختصار آن را MCMC می‌نامیم، امروزه به‌عنوان ابزاری اساسی در قلمرو علم آمار و به‌ویژه در مباحث پی‌ری به کار می‌رود. ایده اصلی این روش‌ها بسیار ساده است. اگر علاقه‌مند به تولید نمونه از توزیع f باشیم، وقتی که f تابعی n بعدی است و در عمل نتوانیم به‌طور مستقیم از آن نمونه‌گیری کنیم، ولی در عین حال قادر به تولید زنجیر مارکفی با فضای حالتی باشیم که دارای توزیع مانای f باشد، در این صورت اگر این زنجیر برای مدت طولانی ادامه یابد، مقادیر شبیه‌سازی شده این زنجیر می‌تواند برای خصوصیات تابع f مورد استفاده قرار گیرد. روش‌های MCMC در واقع به دنبال الگوریتم‌هایی است که چنین زنجیر مارکفی با توزیع مانای f را تولید کند. این روش‌ها در علوم مختلفی مانند فیزیک، بهینه‌سازی، الکترونیک، هوانوردی، بیولوژی، شبکه، بازسازی تصاویر و

^۱ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، a.arshadiipoor@math.iut.ac.ir^۲ Metropolis-Hastings^۳ Gibbs Sampling^۴ Slice Sampling

۲ روش نمونه‌گیری برشی

فرض کنید بخواهیم از تابعی که متناسب با $f(x)$ است، نمونه‌گیری نماییم. ایده‌ی کلی این روش، معرفی یک متغیر کمکی تعریف شده با بردار تصادفی $U = (U_1, U_2, \dots, U_k)$ و ساختن توزیع توام $f(X, U)$ است که چگالی حاشیه‌ای آن $f(x)$ است. با استفاده از توزیع توام معرفی شده روش گیس را برای نمونه‌گیری از توزیع‌های شرطی کامل به کار می‌بریم. در این روش غالباً می‌توان متغیر کمکی را طوری معرفی نمود که توزیع‌های شرطی کامل قابل نمونه‌گیری باشند.

قضیه ۱ فرض کنید علاقه‌مند به تولید نمونه از چگالی $f(x) \propto \pi(x) \prod_{i=1}^k l_i(x)$ باشیم که π یک تابع چگالی با شکل استاندارد است و l_i ها توابعی نه لزوماً چگالی، نامنفی و معکوس‌پذیرند (یعنی اگر $l_i(x) > u$ ، $A_u^i = \{x; l_i(x) > u\}$ قابل تعریف باشد)، در این صورت برای تولید نمونه از چگالی $f(x)$ ، می‌توان از یک الگوریتم گیس استفاده نمود که همه‌ی چگالی‌های شرطی کامل آن به جز یکی دارای توزیع یکنواخت هستند و آن یکی π ، با تکیه‌گاه محدود شده است [۳].

برهان بردار متغیر کمکی $U = (U_1, U_2, \dots, U_k)$ را طوری تعریف می‌نماییم که به ازای هر i ، $(i = 1, 2, \dots, k)$ ، هر U_i به شرط x دارای توزیع یکنواخت بر بازه‌ی $(0, l_i(x))$ است. هم‌چنین به شرط x ، U_i ها مستقل هستند. در این صورت چگالی توام (X, U) عبارت است از

$$\begin{aligned} f(x, u_1, \dots, u_k) &= f(u_1, \dots, u_k | x) f(x) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^k I_{\{u_i < l_i(x)\}}}{\prod_{i=1}^k l_i(x)} K \pi(x) \prod_{i=1}^k l_i(x) \\ &= K \pi(x) \prod_{i=1}^k I_{\{u_i < l_i(x)\}} \end{aligned}$$

و همکاران [۳] برمی‌گردد. ارجحیت روش نمونه‌گیری برشی نسبت به روش‌های قبلی این است که بدون نیاز به استفاده از توزیع پیشنهادی و با اجتناب از نمونه‌گیری از توزیع‌های غیراستاندارد برای هر توزیعی قابل کاربرد است. به علاوه در بسیاری از روش‌های $(MCMC)$ برای این که نمونه ایجاد شده معرف نمونه‌ای از تابع چگالی هدف باشد، سعی می‌شود تا حرکات زنجیر مارکف در گام‌های کوچک انجام شود و این گام‌های کوچک موجب افزایش تعداد گام‌ها برای حرکت زنجیر مارکف روی کل فضای تکیه‌گاه توزیع می‌شود و بنابراین همگرایی زنجیر به تابع چگالی هدف به کندی صورت می‌گیرد. در حالی که در روش نمونه‌گیری برشی تغییرات حرکتی زنجیر بدون استفاده از گام‌های کوچک، به‌طور تصادفی روی کل فضای تکیه‌گاه توزیع صورت می‌گیرد و از بروز مشکلاتی که به دلیل استفاده از گام‌های کوچک هستند جلوگیری می‌نماید. روش نمونه‌گیری برشی معرفی شده اگرچه ساده و قابل کاربرد است اما زمانی که تعداد متغیرهای کمکی زیاد باشند به کندی همگرا می‌شود. نیل [۱۰] و [۱۱] روشی جدید بر پایه‌ی استفاده از یک متغیر کمکی ارایه نمود که برای اکثر توزیع‌ها قابل کاربرد می‌باشد. این مقاله به صورت زیر تدوین شده است. در بخش دوم بر پایه مرجع [۳]، نمونه‌گیری برشی را به همراه یک مثال معرفی و مورد بررسی قرار می‌دهیم. شرایط همگرایی نمونه‌گیری برشی را نیز در این بخش به اختصار بیان می‌نماییم. در بخش سوم و چهارم بر پایه مرجع [۱۰]، روش نمونه‌گیری برشی نیل را که از محدودیت‌های کمتری نسبت به سایر روش‌های $MCMC$ برخوردار است، در دو حالت تک‌متغیره و چندمتغیره به همراه الگوریتم‌های مربوطه ارایه و مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش ششم نیز یک مثال کاربردی به روش نمونه‌گیری برشی نیل انجام می‌دهیم و با روش مورد استفاده در مقالات قبلی مقایسه می‌نماییم.

بنابراین الگوریتم SS به‌صورت زیر خواهد بود

الگوریتم SS

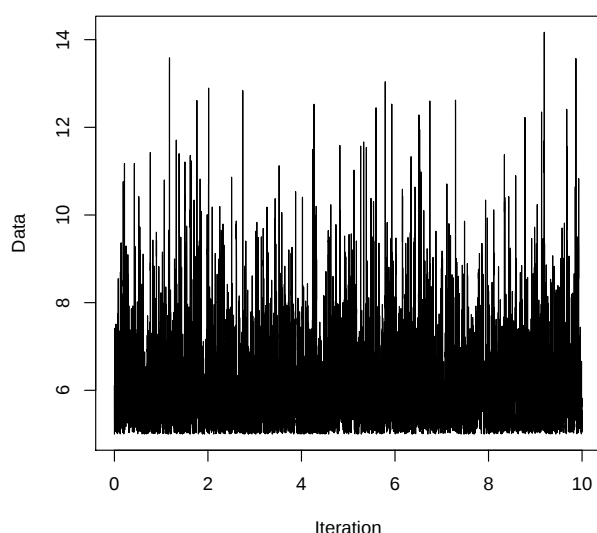
با یک مقدار اولیه $x^{(0)}$ شروع می‌کنیم و به ازای $t = 1, 2, \dots$ داریم

۱. U_1 را از توزیع یکنواخت بر $(0, (x^{(t-1)})^{\alpha-1})$ انتخاب می‌نماییم.

۲. U_2 را از توزیع یکنواخت بر $(0, e^{-x^{(t-1)}})$ انتخاب می‌نماییم.

۳. $x^{(t)}$ را از توزیع یکنواخت بر $(\max(u_1^{\frac{1}{\alpha-1}}, a), -\ln u_2)$ انتخاب می‌نماییم.

شکل ۱ نمودار ۱۰۰۰۰ داده‌ی شبیه‌سازی شده با استفاده از الگوریتم فوق را به ازای $a = 5, \alpha = 2$ و نقطه‌ی شروع ۵ نشان می‌دهد. این نمودار را سری زمانی داده‌های شبیه‌سازی می‌نامند که مشابه سری زمانی نوفه سفید است، بنابراین زنجیره به‌طور مناسبی تمام فضای تکیه‌گاه تابع چگالی هدف را می‌پیماید و اصطلاحاً گفته می‌شود که زنجیر آمیخته‌ی مناسب است.



شکل ۱. داده‌های شبیه‌سازی شده با روش SS .

که در آن K ضریب ثابت است. در مرحله‌ی بعد می‌توان از یک الگوریتم گیبس به‌صورت زیر استفاده نمود. در این الگوریتم چگالی‌های شرطی کامل به ازای هر U_i ، دارای توزیع یکنواخت بر بازه‌ی $(0, l_i(x))$ هستند و چگالی شرطی کامل برای X نیز π است که تکیه‌گاه آن به مجموعه‌ی $A_u = \{x; l_i(x) > u_i, i = 1, \dots, k\}$ محدود شده است. براساس قضیه‌ی بالا، الگوریتم نمونه‌گیری برشی به‌صورت زیر است.

الگوریتم SS

با یک مقدار اولیه $x^{(0)}$ شروع می‌کنیم و به ازای $i = 1, 2, \dots, k$ و $U_i, t = 1, 2, \dots$ را از توزیع یکنواخت بر $(0, l_i(x^{(t-1)}))$ انتخاب می‌نماییم و سپس $x^{(t)}$ را از توزیع $\pi(x)$ که تکیه‌گاه آن به مجموعه‌ی $A_u = \{x; l_i(x) > u_i, i = 1, \dots, k\}$ محدود شده است، انتخاب می‌نماییم.

مثال ۱ (توزیع گامای بریده شده^۵). فرض کنید بخواهیم از تابع چگالی f به‌صورت زیر نمونه‌گیری کنیم

$$f(x) \propto x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad x > a, \alpha > 1, a > 0.$$

یک روش معمول برای نمونه‌گیری، تولید نمونه از توزیع گاما به روش‌های معمول و پذیرش نقاطی است که از a بزرگتر هستند، اما این روش زمانی که a بزرگ باشد کارایی مناسبی ندارد و ممکن است نقاط زیادی رد شوند. برای استفاده از نمونه‌گیری برشی قرار می‌دهیم $f(x) \propto l_1(x)l_2(x)$ به‌طوری‌که $l_1(x) = x^{\alpha-1}$ ، $l_2(x) = e^{-x}$ و $\pi(x)$ نیز توزیع یکنواخت بر بازه‌ی (a, ∞) است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} A_u &= \{x; u_1 \leq x^{\alpha-1}, u_2 \leq e^{-x}, x > a\} \\ &= \{x; x \geq u_1^{\frac{1}{\alpha-1}}, x \leq -\ln u_2, x > a\} \\ &= \{x; \max(u_1^{\frac{1}{\alpha-1}}, a) \leq x \leq -\ln u_2\}. \end{aligned}$$

استفاده از یک متغیر کمکی ارایه نمود که در ادامه به بیان آن می‌پردازیم.

۳ روش نمونه‌گیری برشی نیل در حالت تک‌متغیره

در این روش برای نمونه‌گیری از تابع چگالی تک‌متغیره‌ی $p(x)$ که با $f(x)$ متناسب است، از ناحیه‌ی زیر نمودار $f(x)$ به‌طور یکنواخت نمونه‌گیری می‌شود. برای این منظور با استفاده از یک متغیر تصادفی کمکی Y ، تابع چگالی توام (X, Y) به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{z} & 0 < y < f(x) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به‌طوری که $z = \int f(x) dx$ در این صورت تابع چگالی حاشیه‌ای X به‌صورت

$$p(x) = \int_0^{f(x)} \frac{1}{z} dy = \frac{f(x)}{z}$$

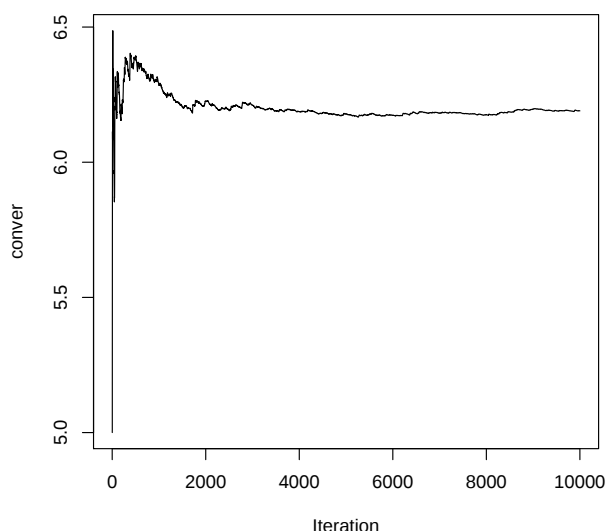
به‌دست می‌آید. اکنون با استفاده از تابع چگالی توام ایجاد شده اعضای نمونه را به روش گیبس تولید می‌نماییم. به‌طور تناوبی از توزیع شرطی Y به شرط $X = x$ که دارای توزیع یکنواخت بر $(0, f(x))$ است، نمونه‌گیری می‌نماییم

$$p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{f(x)}{z}} = \frac{1}{f(x)}$$

و سپس از توزیع شرطی X به شرط $Y = y$ که دارای توزیع یکنواخت بر ناحیه‌ی $S = \{x; y < f(x)\}$ است نمونه‌گیری می‌نماییم

$$\begin{aligned} p(x|y) &= \frac{p(x, y)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} \\ &= \frac{\frac{1}{f(x)} \frac{f(x)}{z}}{\frac{1}{z} \int_{\{x; y < f(x)\}} dx} = \frac{1}{\int_{\{x; y < f(x)\}} dx} \end{aligned}$$

شکل ۲ نمودار همگرایی میانگین زنجیر تولید شده را در روش SS به ازای $n = 10000$ تکرار نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار میانگین زنجیر، پس از گذشت تعدادی از تکرارها به مقدار ثابتی همگرا شده است و بنابراین می‌توان از نمونه تولید شده برای استنباط در مورد تابع چگالی هدف استفاده نمود.



شکل ۲. نمودارهای همگرایی میانگین زنجیر با روش SS .

رابرتز و روزنتال [۱۴]، نشان داده‌اند که این روش دارای خواص نظری خوبی است و اگر تکیه‌گاه تابع چگالی f محدود باشد، بنابراین همگرایی توزیع حدی زنجیر ایجاد شده به توزیع هدف تضمین می‌شود و اصطلاحاً گفته می‌شود که زنجیر ارگودیک هندسی [۱۲] است. تیرنی و میرا [۱۶]، نیز ثابت کرده‌اند که اگر $k = 1$ ، آن‌گاه توزیع حدی زنجیر با سرعت بیشتری به توزیع هدف همگرا می‌شود و اصطلاحاً گفته می‌شود که زنجیر دارای خاصیت ارگودیکی یکنواخت است. در عمل برای استفاده از این روش ممکن است با مشکلاتی روبرو شویم، مثلاً زمانی که k زیاد باشد، مجموعه‌ی A_u ممکن است پیچیده شود و یا همگرایی سرعت کندی داشته باشد. برای دوری از چنین مشکلاتی نیل [۱۱] روش جدیدی بر پایه‌ی

نحوه‌ی اجرای گام ۲)

بعد از انتخاب متغیر کمکی y و تعریف برش، گام بعدی یافتن بازه‌ی $I = (L, R)$ شامل نقطه‌ی x_0 است. این بازه باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که تا حد ممکن برش را شامل شود و نقطه‌ی جدید در گام بعدی نیز با نقطه‌ی قبلی متفاوت باشد. هم‌چنین بهتر است تا از فواصلی که از برش خیلی بزرگ‌تراند اجتناب شود، زیرا در غیر این صورت ممکن است روش کارایی مناسبی نداشته باشد. روش‌های مختلف انتخاب فاصله عبارت‌اند از

(۱) I را کوچک‌ترین فاصله‌ای قرار می‌دهیم که همه‌ی برش را شامل شود یعنی قرار دهیم

$$L = \inf(S), \quad R = \sup(S).$$

این روش همیشه قابل کاربرد نیست زیرا ممکن است نتوانیم همه‌ی جواب‌های معادله‌ی $y = f(x)$ را به روش‌های تحلیلی و عددی بیابیم. در اکثر موارد فواصل از هم جدای زیادی S را تشکیل می‌دهند و این مساله تعیین فاصله به این روش را دشوار می‌سازد [۱۱].

(۲) زمانی که تکیه‌گاه متغیر X کراندار است می‌توان I را برابر تکیه‌گاه قرار داد. این روش اگرچه ساده اما زمانی که برش از حدود تکیه‌گاه خیلی کوچک‌تر است مناسب نمی‌باشد و ممکن است نمونه‌گیری کارایی مناسبی نداشته باشد. این طرح توسط فری [۵] معرفی شده است.

(۳) روش گسترش گام^۶. این روش را برای هر تابع چگالی پیوسته‌ای می‌توان به‌کاربرد و محدودیت‌های دو روش قبلی را ندارد. در این روش ابتدا یک فاصله‌ی ابتدایی به اندازه‌ی w که شامل x_0 است را به‌عنوان مقیاسی برای پیمودن برش در نظر می‌گیریم و سپس این فاصله‌ی ابتدایی را در گام‌هایی به طول w می‌گستریم تا زمانی که هر دو انتهایش از برش خارج شود و یا به ازای عدد صحیح m ، اندازه‌ی از قبل تعیین‌شده‌ای مانند

مجموعه‌ی S را برش ایجادشده توسط y می‌نامیم. نمونه‌گیری به‌طور یکنواخت از S نیز ممکن است ساده نباشد که روش ارائه شده توسط نیل به حل این مساله کمک می‌نماید. بر اساس روش وی در حالت تک‌متغیره مقدار اولیه‌ی x_0 طی سه گام زیر به مقدار x_1 تبدیل می‌شود.

(۱) مقدار حقیقی y به‌طور یکنواخت از بازه‌ی $(0, f(x_0))$ انتخاب می‌شود که به‌موجب این انتخاب برش افقی S ایجاد می‌شود. با این انتخاب x_0 همیشه داخل S است.

(۲) یک بازه‌ی $I = (L, R)$ اطراف x_0 پیدا می‌شود که همه یا قسمت زیادی از برش را شامل می‌شود.

(۳) نقطه‌ی جدید x_1 از قسمتی از برش که داخل فاصله است انتخاب می‌شود.

نحوه‌ی اجرای هریک از این سه گام را در ادامه شرح می‌دهیم. نحوه‌ی اجرای گام ۱)

این گام جهت انتخاب نقطه‌ی y به‌عنوان متغیر کمکی است که در تکرارهای مختلف زنجیر می‌تواند تغییر یابد. در عمل ممکن است در طول الگوریتم مقادیر $f(x)$ آن‌قدر کوچک باشند که از نظر محاسباتی جهت انتخاب y مشکل ایجاد کنند که در این صورت مناسب‌تر است تا از تبدیل $g(x) = \ln f(x)$ به جای $f(x)$ استفاده شود. در این صورت می‌نویسیم $y = f(x_0)u$ که u دارای توزیع یکنواخت بر $(0, 1)$ است. پس

$$\ln y = \ln f(x_0) + \ln(u) = g(x_0) - (-\ln u)$$

یا $z = g(x_0) - e$ که $z = \ln y$ و e از یک توزیع نمایی با میانگین ۱ تولید می‌شود. در این صورت برش به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$S = \{x; z < g(x)\} = \{x; g(x_0) - e < g(x)\}.$$

mw برای فاصله‌ی I به دست آید.

الگوریتم روش گسترش گام به صورت زیر است

الگوریتم گسترش گام

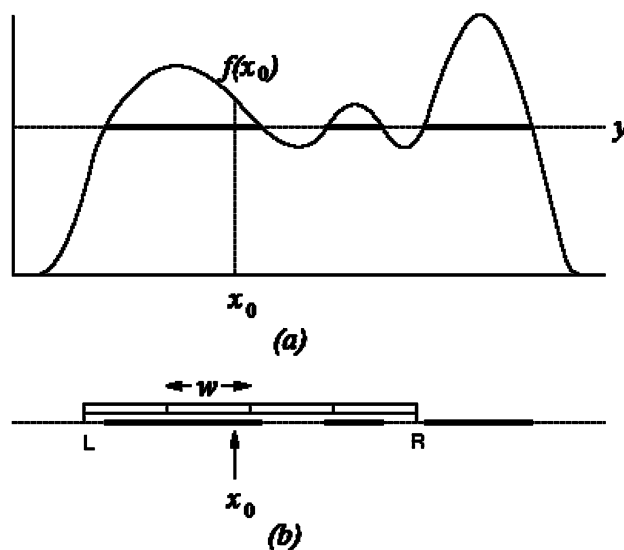
با مقادیر اولیه‌ی x_0, w, m و y شروع می‌کنیم.

۱. اعداد تصادفی U و V را به طور مستقل از توزیع یکنواخت بر بازه‌ی $(0, 1)$ را انتخاب می‌نماییم.

۲. قرار می‌دهیم $j = [mw]$ و $R = L + w$ و $L = x_0 - wU$ و $k = (m - 1) - j$

۳. تا زمانی که $j > 0$ و $y < f(L)$ قرار می‌دهیم $j = j - 1$ و $L = L - w$

۴. تا زمانی که $k > 0$ و $y < f(R)$ قرار می‌دهیم $k = k - 1$ و $R = R + w$



شکل ۳. یافتن فاصله‌ی $I = (L, R)$ به روش گسترش گام.

مراحل (۳) و (۴) در الگوریتم تا برقراری شرایط انجام می‌شوند و خروجی الگوریتم در نهایت فاصله‌ی $I = (L, R)$ است. اندازه‌ی نهایی فاصله را می‌توانیم به صورت mw در نظر گیریم که m عددی صحیح و از پیش تعیین شده است. در بسیاری از موارد m را بینهایت در نظر می‌گیریم که در این صورت فاصله هر اندازه‌ای می‌تواند داشته باشد. فاصله‌ی

ابتدایی شامل x_0 را باید به طور تصادفی جایگذاری نماییم. اختصاص m به گام‌های به طرف چپ یا راست و انتخاب جهت نیز باید به طور تصادفی صورت گیرد. این تصادفی بودن تضمینی برای درستی و دقت روش است و باعث می‌شود تا اطمینان یابیم که نقطه‌ی جدید به طور تصادفی انتخاب شده است.

نحوه‌ی اجرای گام (۳)

بعد از انتخاب فاصله‌ی مناسب I در گام قبل، برای انتخاب نقطه‌ی جدید x_1 از روشی به نام انقباض (Shrinkage Method) استفاده می‌کنیم. در این روش نقطه‌ی جدیدی از فاصله‌ی I به طور یکنواخت انتخاب می‌کنیم. اگر این نقطه در برش باشد آن را می‌پذیریم و در غیر این صورت آن نقطه را نقطه‌ی رد می‌نامیم و از آن برای منقبض کردن فاصله‌ی I استفاده می‌کنیم. فاصله به گونه‌ای منقبض می‌شود که پس از انقباض هنوز نقطه‌ی فعلی را شامل شود. این روند ادامه می‌یابد تا زمانی که نقطه‌ی انتخابی از فاصله، داخل برش قرار گیرد. در این روش، چون در هر مرحله فاصله‌ی مورد نظر حداقل نقطه‌ی فعلی را در بر دارد، می‌توان نسبت به خاتمه‌پذیر بودن روش اطمینان داشت.



شکل ۴. انتخاب نقطه‌ی جدید x_1 به روش انقباض.

الگوریتم روش انقباض به صورت زیر است

الگوریتم

با یک مقدار اولیه‌ی x_0, y و $I = (L, R)$ شروع می‌کنیم.

۱. قرار می‌دهیم $\bar{L} = L$ و $\bar{R} = R$

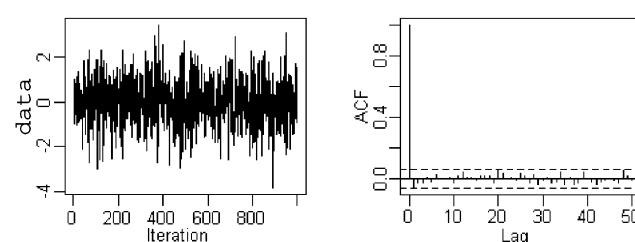
۲. عدد تصادفی U را از توزیع یکنواخت بر بازه‌ی $(0, 1)$

انتخاب می‌نماییم.

$$۳. \text{ قرار می‌دهیم } x_1 = \bar{L} + U(\bar{R} - \bar{L}).$$

۴. اگر $y < f(x_1)$ پذیرفته می‌شود و در غیر این صورت اگر $x_1 < x_0$ قرار می‌دهیم $\bar{L} = x_1$ و اگر $x_1 \geq x_0$ قرار می‌دهیم $\bar{R} = x_1$ و به مرحله ی (۲) برمی‌گردیم.

مثال ۲ در این مثال با استفاده از روش گسترش گام و روش انقباض، نمونه‌ای به حجم $n = 1000$ از توزیع نرمال استاندارد تولید شده است. شکل ۵ نمودارهای سری زمانی، خودهمبستگی، احتمال نرمال و هیستوگرام داده‌های شبیه‌سازی شده را نشان می‌دهد.



شکل ۵. نمودارهای سری زمانی، خودهمبستگی، احتمال نرمال و هیستوگرام داده‌های شبیه‌سازی شده.

نمودار سمت چپ از بالا، نمودار سری زمانی داده‌ها است که

مشابه سری زمانی نوفه سفید است و بنابراین زنجیر ایجاد شده آمیخته‌ی مناسب است و زنجیر به‌طور مناسبی تکیه‌گاه توزیع نرمال استاندارد را می‌پیماید. نمودار سمت راست از بالا نیز نمودار خودهمبستگی داده‌هاست که روندی مشابه نمودار خودهمبستگی در مدل $AR(1)$ دارد و بنابراین همبستگی داده‌ها مناسب به نظر می‌آید. نمودارهای هیستوگرام و احتمال نرمال داده‌ها نیز بیان‌گر نزدیک بودن زیاد توزیع داده‌ها به مدل نرمال استاندارد است. برای آزمودن فرض این که آیا نمونه‌ی ایجاد شده دارای توزیع نرمال استاندارد است یا نه، از آزمون کلموگروف-اسمیرنوف [۲] استفاده شده است. p -مقدار این آزمون برابر 0.3864 به دست آمده است و بنابراین فرض صفر که بیانگر نرمال استاندارد بودن داده‌هاست حتی در سطح 0.1 هم رد نمی‌شود.

مقایسه روش برشی نیل با برخی روش‌های متداول دیگر

الگوریتم باکس-مولر و روش فشردگی [۱۲] نیز از روش‌های متداولی هستند که برای تولید نمونه از توزیع نرمال استاندارد مورد استفاده قرار می‌گیرند. فرض کنید در توزیع نرمال استاندارد محور افقی بیان‌گر مقادیر x و محور عمودی بیان‌گر مقدار مساحت زیر منحنی یا $P(X \leq x)$ باشد، در این صورت برای بررسی روش نمونه‌گیری برشی با سایر روش‌ها، این مقادیر را برای نمونه‌های تولید شده توسط این روش‌ها به همراه مقادیر واقعی در توزیع نرمال استاندارد در جدول ۱ محاسبه نموده‌ایم.

جدول ۱، مقادیر x به ازای برخی از مساحت‌های زیر منحنی نرمال استاندارد.

مساحت زیر منحنی	۰/۵۰۰۰	۰/۷۵۰۰	۰/۸۰۰۰	۰/۹۵۰۰	۰/۹۹۹۰	۰/۹۹۹۹
مقادیر واقعی	۰/۰۰۰۰	۰/۶۷۰۰	۰/۸۴۰۰	۱/۶۵۰۰	۳/۰۹۰۰	۳/۷۲۰۰
باکس-مولر	۰/۰۶۵۸	۰/۷۶۸۸	۰/۹۲۹۷	۱/۷۱۲۷	۲/۸۴۶۴	۲/۸۹۵۱
فشردگی	۰/۰۵۴۶	۰/۶۸۹۴	۰/۸۵۱۲	۱/۶۶۸۹	۲/۸۸۴۵	۳/۱۷۳۸
برشی	۰/۰۳۲۵	۰/۶۹۴۳	۰/۸۶۴۲	۱/۶۰۲۹	۲/۶۰۵۲	۲/۸۷۱۴
برشی نیل	-۰/۰۴۶۳	۰/۶۶۴۴	۰/۸۷۶۱	۱/۷۱۶۸	۳/۰۷۹۱	۳/۴۲۳۸

افقی $S = \{\tilde{x}; y < f(\tilde{x})\}$ ایجاد می‌شود.

گام (۲) ابرمستطیل را اطراف $\tilde{x}_0$ طوری جایگذاری می‌نماییم که بخش زیادی از برش را دربر گیرد.

گام (۳) نقطه‌ی جدید $\tilde{x}_1$ را از قسمتی از برش که داخل ابرمستطیل است یعنی از $H \cap S$ ، انتخاب می‌کنیم.

در گام (۲) ابرمستطیل را می‌توان کوچکترین ابرمستطیل دربردارنده‌ی برش قرار داد اما این روش ممکن است امکان‌پذیر نباشد. زمانی که همه‌ی مولفه‌های $\tilde{x}$ کراندار باشند نیز می‌توان ابرمستطیل را برابر تکیه‌گاه توزیع قرار داد. این روش نیز زمانی که برش از حدود تکیه‌گاه خیلی کوچکتر است کارا نمی‌باشد. در روش گسترش گام نیز باید یک ابرمستطیل n بعدی با 2^n رأس بیابیم که تمام رؤس آن از برش خارج باشند. این روش نیز زمانی که n بزرگ باشد مقرون به صرفه نیست زیرا فاصله‌های ابتدایی w_i باید در هر n بعد گسترش یابند که مستلزم وقت زیادی است. بنابراین ساده‌ترین روش یافتن ابرمستطیل، قراردادن تصادفی یک ابرمستطیل اطراف $\tilde{x}_0$ است. گام (۳) نیز به صورت تعمیمی از روش انقباض در حالت تک‌متغیره انجام می‌شود. بدین صورت که بعد از جایگذاری ابرمستطیل در گام قبلی، نقطه‌ی جدید را به طور تصادفی از ابرمستطیل انتخاب می‌نماییم و اگر این نقطه داخل برش باشد آن را می‌پذیریم و اگر خارج از برش باشد آن‌گاه ابرمستطیل را با شروع از این نقطه در تمام جهت‌ها منقبض می‌نماییم و دوباره نقطه‌ی جدیدی انتخاب می‌نماییم و این روند را ادامه می‌دهیم تا زمانی که نقطه‌ی انتخابی داخل برش قرار گیرد. شکل ۶ یک نمونه‌گیری برشی دومتغیره را نمایش می‌دهد. قسمت پررنگ تر تصویر، خطوط انتهایی برش هستند که نقطه‌ی حال $\tilde{x}_0$ را شامل است، مربع بزرگ‌تر نیز ابرمستطیل ابتدایی است.

از جدول بالا مشاهده می‌شود که اختلاف مقادیر محاسبه‌شده در روش‌های مختلف با مقادیر واقعی، در روش نمونه‌گیری برشی نیل نسبت به سایر روش‌ها کمتر می‌باشد و بنابراین روش نمونه‌گیری برشی نیل برای تولید نمونه از توزیع نرمال استاندارد به خوبی عمل نموده است.

۴ روش نمونه‌گیری برشی نیل در حالت چند متغیره

روش نمونه‌گیری برشی تک‌متغیره را می‌توانیم برای حالتی که علاقه‌مندیم تا از یک بردار n بعدی نمونه بگیریم به کار ببریم، در این حالت روش نمونه‌گیری را برای هر مولفه‌ی بردار به طور جداگانه به کار می‌بریم. در این بخش ایده‌ی نمونه‌گیری برشی تک‌متغیره، به حالت چندمتغیره تعمیم داده می‌شود و الگوریتم‌های آن ارایه می‌گردد.

فرض کنید $\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ و $f(\tilde{x})$ تابعی متناسب با تابع چگالی $\tilde{X}$ باشد. ایده‌ی نمونه‌گیری برشی تک‌متغیره را می‌توان به حالت چندمتغیره تعمیم داد. در این روش به جای یک فاصله‌ی $I = (L, R)$ ، یک ابرمستطیل به صورت

$$\begin{aligned} H &= \{\tilde{x}; L_i < x_i < R_i, i = 1, \dots, n\} \\ &= (L_1, R_1) \times (L_2, R_2) \times \dots \times (L_n, R_n) \end{aligned}$$

اطراف نقطه‌ی ابتدایی $\tilde{x}_0 = \{x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}\}$ جایگذاری می‌نماییم و سپس نقطه‌ی جدید $\tilde{x}_1 = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}\}$ را از قسمتی از برش که داخل ابرمستطیل است، انتخاب می‌کنیم. در حالت چند متغیره، وضعیت فعلی $\tilde{x}_0$ به صورت سه گام زیر به وضعیت جدید $\tilde{x}_1$ تبدیل می‌شود.

گام (۱) مقدار حقیقی y را به طور یکنواخت از بازه‌ی $(0, f(\tilde{x}_0))$ انتخاب می‌نماییم. به موجب این انتخاب برش

از تبدیل زیر، $\tilde{x}$ را که دارای توزیع $N_n(\mu, \Sigma)$ است به‌دست می‌آوریم [۸].

$$\tilde{x} = T^t z + \mu.$$

در این تبدیل T یک ماتریس $n \times n$ است به‌طوری‌که $T^t T = \Sigma$ در این مثال با استفاده از سه روش تجزیه‌ی چولسکی، نمونه‌گیر گیبس و نمونه‌گیری برشی نمونه‌هایی به حجم ۵۰۰۰ از توزیع $N_2((0 \ 0), \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix})$ به‌ازای $\rho = 0.99$ را تولید نموده‌ایم. برای آزمودن این که آیا داده‌ها از توزیع نرمال دومتغیره تولید شده‌اند یا نه، از آزمون نرمال چند متغیره شاپیرو-ویلک [۱۵] استفاده کرده‌ایم. از آن‌جا که فرض صفر در این آزمون بیان‌گر نرمال بودن داده‌هاست و با توجه به p -مقدار این آزمون برای هر سه روش در جدول ۲، فرض صفر در هر سه روش در سطح ۰/۰۵ رد نمی‌شود و می‌توان پذیرفت که داده‌ها از توزیع نرمال دو متغیره هستند.

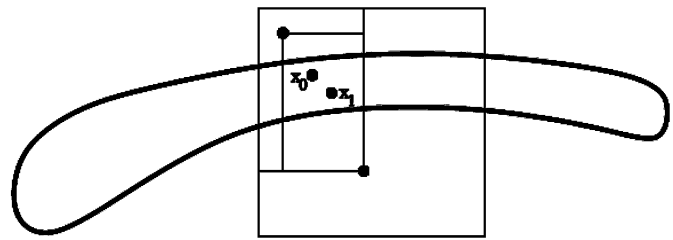
جدول ۲، p -مقدار آزمون شاپیرو-ویلک در هر سه روش.

نمونه‌گیری	نمونه‌گیر	تجزیه‌ی
برشی	گیبس	چولسکی
۰/۲۸۷۱	۰/۴۱۷۸	۰/۳۱۴۸
مقدار p		

مقادیر برآورد نمونه‌ای ضریب همبستگی و انحراف معیار برآورد در هر سه روش در جدول ۳ آمده است. در هر سه روش مقادیر برآوردشده برای ρ به مقدار واقعی آن نزدیک می‌باشد اما خطای برآورد در روش نمونه‌گیری برشی نسبت به دو روش دیگر تا حدودی کمتر می‌باشد و بنابراین نمونه‌گیری برشی را می‌توان به‌عنوان یکی از روش‌های تولید نمونه از توزیع نرمال n متغیره به‌کار برد.

جدول ۳، برآورد ρ و انحراف معیار برآورد در هر سه روش.

نمونه‌گیری	نمونه‌گیر	تجزیه‌ی
برشی	گیبس	چولسکی
۰/۹۸۷۹	۰/۹۸۴۶	۰/۹۸۸۰
برآورد ضریب همبستگی		
$1/0.3 \times 10^{-1}$	$1/0.55 \times 10^{-5}$	$3/96 \times 10^{-6}$
انحراف معیار برآورد		



شکل ۶. نمایش نمونه‌گیری برشی دو متغیره.

براساس گام‌های فوق، الگوریتم نمونه‌گیری برشی چندمتغیره که $\tilde{x}_0$ را به $\tilde{x}_1$ تبدیل می‌کند را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

الگوریتم

با بردارهای اولیه‌ی $\tilde{x}_0 = \{x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}\}$ و

$\tilde{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ شروع می‌نماییم.

۱. مقدار حقیقی y را از توزیع یکنواخت بر بازه‌ی $(0, f(\tilde{x}_0))$ انتخاب می‌نماییم.

۲. به ازای $i = 1, \dots, n$ مقدار U_i را از توزیع یکنواخت بر بازه‌ی $(0, 1)$ انتخاب می‌نماییم و قرار می‌دهیم $R_i = L_i + w_i$ و $L_i = x_{0i} - w_i U_i$.

۳. به ازای $i = 1, \dots, n$ مقدار V_i را از توزیع یکنواخت بر بازه‌ی $(0, 1)$ انتخاب می‌نماییم و قرار می‌دهیم $x_{1i} = L_i + V_i(R_i - L_i)$.

۴. اگر $\tilde{x}_1, y < f(\tilde{x}_1)$ را می‌پذیریم و در غیر این صورت به ازای $i = 1, \dots, n$ اگر $x_{1i} < x_{0i}$ آن‌گاه قرار می‌دهیم $L_i = x_{1i}$ و در غیر این صورت قرار می‌دهیم $R_i = x_{1i}$.

مثال ۳. فرض کنید $\tilde{x}$ دارای توزیع نرمال n متغیره با بردار میانگین $\tilde{\mu}$ و ماتریس واریانس-کواریانس σ باشد. برای نمونه‌گیری از توزیع نرمال n متغیره روش‌های مختلفی ارایه شده است. یکی از این روش‌ها استفاده از تجزیه‌ی چولسکی (*Cholesky Decomposition*) است. در این روش ابتدا بردار n بعدی $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ با عناصر از هم مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد را تولید می‌نماییم و سپس با استفاده

گاور و همکاران [۶] برای نرخ خرابی پمپ‌های هسته‌ای مدلی را ارایه نمودند. فرض کنید x_i تعداد خرابی‌های پمپ i ام در مدت زمان $[0, t_i]$ باشد به طوری که t_i (بر حسب ساعت) معلوم است و $r_i = \frac{x_i}{t_i}$ نرخ خرابی نمونه‌ای است. داده‌های گزارش شده برای ده پمپ در جدول ۴ آمده است [۱۸].

جدول ۴، مقادیر نمونه‌ای برای ده پمپ.		
شماره پمپ	تعداد خرابی	مدت زمان
۱	۵	۹۴/۳۲۰
۲	۱	۱۵/۷۲۰
۳	۵	۶۲/۸۶۰
۴	۱۴	۱۲۵/۷۶۰
۵	۳	۵/۲۴۰
۶	۱۹	۳۱/۴۴۰
۷	۱	۱/۰۴۸
۸	۱	۱/۰۴۸
۹	۴	۲/۰۹۶
۱۰	۲۲	۱۰/۴۸۰

برای به دست آوردن برآورد بیز نرخ خرابی پمپ‌ها (λ_i) بر اساس مدل بیزی فرض می‌کنیم $X_i|\lambda_i$ دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda_i t_i$ و $\lambda_i|\beta$ دارای توزیع گاما با پارامترهای α و β است و β نیز دارای توزیع گاما با پارامترهای γ و δ است، و α, δ, γ معلوم هستند.

در این صورت تابع درستنمایی عبارت است از

$$L(\{\lambda_i\}) = \prod_{i=1}^{10} \frac{e^{-\lambda_i t_i} (\lambda_i t_i)^{x_i}}{x_i!} \propto \prod_{i=1}^{10} e^{-\lambda_i t_i} \lambda_i^{x_i}$$

و چگالی پیشین توأم پارامترها برابر است با

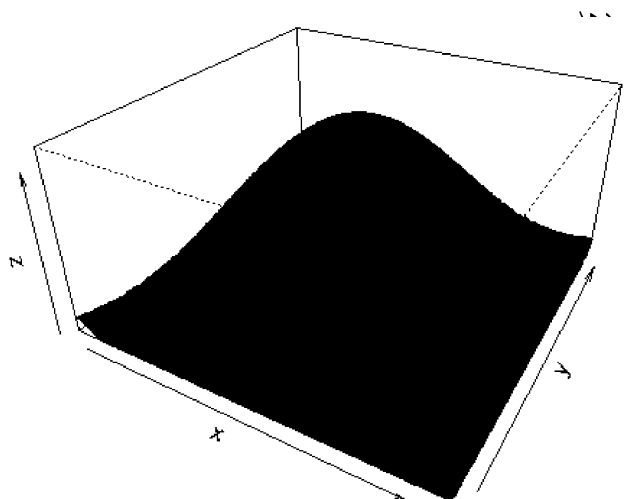
$$g_{\{\lambda_i\}, \beta}(\{\lambda_i\}, \beta) = \frac{e^{-\delta\beta} \beta^{\gamma-1} \delta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \prod_{i=1}^{10} \frac{e^{-\beta\lambda_i} \beta^\alpha \lambda_i^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

توزیع پسین بر اساس قاعده بیز عبارت است از

$$\pi_{\{\lambda_i\}, \beta}(\{\lambda_i\}, \beta) \propto L(\{\lambda_i\}) g_{\{\lambda_i\}, \beta}(\{\lambda_i\}, \beta).$$

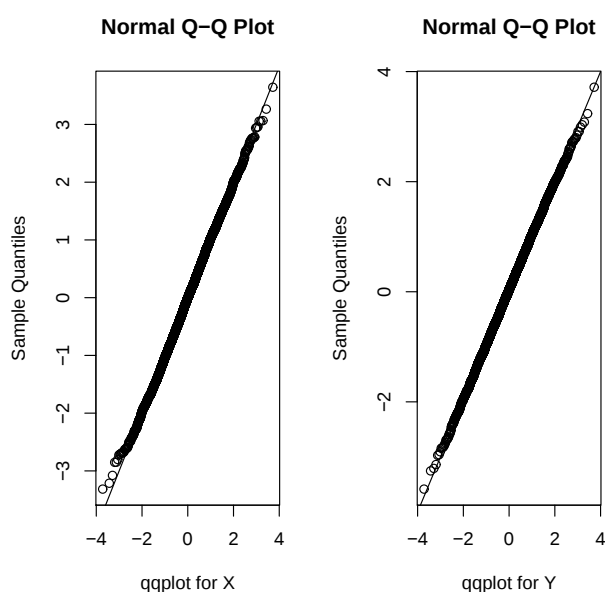
توزیع شرطی کامل $\beta | (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10})$ ، گاما با پارامترهای $\alpha + \sum_{i=1}^{10} \lambda_i$ و $\delta + \sum_{i=1}^{10} \lambda_i$ است و توزیع شرطی کامل $(\beta, \{\lambda_{-j}\}) | (\beta, \{\lambda_{-j}\})$ نیز گاما با پارامترهای $\alpha + x_j$ و $\beta + t_j$ است.

شکل زیر نمودار داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع نرمال دومتغیره را با استفاده از نمونه‌گیری برشی دومتغیره نمایش می‌دهد.



شکل ۷. نمودار داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع نرمال دومتغیره.

از آنجا که در توزیع نرمال چندمتغیره چگالی‌های حاشیه‌ای دارای توزیع نرمال هستند، شکل ۸ نیز نمودار احتمال نرمال را برای توزیع‌های حاشیه‌ای اعداد شبیه‌سازی شده نمایش می‌دهد که برای توزیع نرمال بسیار مناسب به نظر می‌آید.



شکل ۸. نمودار احتمال نرمال داده‌های شبیه‌سازی شده برای مولفه‌های توزیع نرمال دومتغیره.

با استفاده از توزیع‌های بالا، برآورد بیز j امین نرخ خرابی عبارت است از

$$\hat{\lambda}_j = E_{\pi_\beta}(E_{\pi_{\lambda_j|\beta}}[\lambda_j]) = E_{\pi_\beta}\left(\frac{\alpha + x_j}{\beta + t_j}\right)$$

که π_β چگالی حاشیه‌ای پسین برای β است. رابرت و کسلا [۱۳] و گلفاند و اسمیت [۷] برای مقادیر α, δ, γ در شبیه‌سازی‌ها از بیز تجربی استفاده نموده‌اند. در این مثال با استفاده از امید ریاضی و واریانس پیشین نرخ خرابی‌ها مقادیر بهینه‌ای برای این پارامترها به صورت زیر به دست آمده است. به ازای $\gamma > 1$ داریم

$$\begin{aligned} E_{g_{\{\lambda_i\}, \beta}}(\lambda_j) &= E_{g_\beta}(E_{g_{\lambda_j|\beta}}[\lambda_j]) = E_{g_\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \\ &= \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta} \frac{e^{-\delta\beta} \beta^{\gamma-1} \delta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} d\beta \\ &= \frac{\alpha \delta \Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma)} = \frac{\alpha \delta}{\gamma-1} \end{aligned}$$

و به ازای $j = 1, 2, \dots, 10$ و $\gamma > 2$ داریم

$$\begin{aligned} Var_{g_{\{\lambda_i\}, \beta}}(\lambda_j) &= E_{g_\beta}(Var_{g_{\lambda_j|\beta}}[\lambda_j]) \\ &\quad + Var_{g_\beta}(E_{g_{\lambda_j|\beta}}[\lambda_j]) \\ &= E_{g_\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right) + Var_{g_\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \\ &= E_{g_\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right) + E_{g_\beta}\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) - [E_{g_\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)]^2 \\ &= \alpha(1+\alpha) \int_0^\infty \frac{e^{-\delta\beta} \beta^{\gamma-1} \delta^\gamma}{\beta^2 \Gamma(\gamma)} d\beta \\ &\quad - \left(\frac{\alpha \delta}{\gamma-1}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha(1+\alpha)\delta^2}{(\gamma-1)(\gamma-2)} - \left(\frac{\alpha \delta}{\gamma-1}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha \delta^2 (\alpha + \gamma - 1)}{(\gamma-1)^2 (\gamma-2)}. \end{aligned}$$

از آن جا که با توجه به تجربیات گذشته [۱۳] معتقدیم که امید ریاضی و انحراف استاندارد هر نرخ خرابی به ترتیب برابر $0/5$ و 2 است و احتمال آن که نرخ خرابی از 5 تجاوز کند برابر $0/01$

است، مقادیر زیر برای سه پارامتر تعیین می‌شوند

$$\alpha = 0/54, \quad \gamma = 2/2, \quad \delta = 1/11.$$

جدول ۵ مقادیر برآورد شده برای نرخ خرابی ده پمپ را با استفاده از نمونه‌های شبیه‌سازی شده در دو روش نمونه‌گیر گیبس و نمونه‌گیری برشی به همراه مقادیر r_i نمونه‌ای نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقادیر برآوردشده در روش نمونه‌گیری برشی به مقادیر نمونه‌ای نزدیک‌تر هستند.

جدول ۵، برآوردهای نرخ خرابی برای ده پمپ.

شماره پمپ	مقادیر نمونه‌ای	برآورد در روش گیبس	برآورد در روش برشی
۱	۰/۰۵۳	۰/۰۵۸	۰/۰۵۸
۲	۰/۰۶۳	۰/۰۹۲	۰/۰۹۱
۳	۰/۰۷۹	۰/۰۸۶	۰/۰۸۶
۴	۰/۱۱۱	۰/۱۱۴	۰/۱۱۴
۵	۰/۰۵۷۳	۰/۰۵۶۶	۰/۰۵۷۲
۶	۰/۰۶۰۴	۰/۰۶۰۲	۰/۰۶۰۴
۷	۰/۰۹۵۴	۰/۰۷۶۴	۰/۰۸۳۱
۸	۰/۰۹۵۴	۰/۰۷۶۴	۰/۰۸۳۱
۹	۱/۰۹۰۸	۱/۰۴۷۰	۱/۰۵۵۴
۱۰	۲/۰۹۹	۱/۰۹۵۸	۱/۰۹۸۳

مطابق جدول ۵، مقادیر برآورد شده برای نرخ خرابی‌ها در نمونه‌گیری برشی نسبت به روش گیبس به مقادیر نمونه‌ای نزدیک‌تر هستند.

جدول ۶، انحراف معیار برآوردهای نرخ خرابی برای ده پمپ

در دو روش.

شماره پمپ	انحراف معیار برآورد در روش گیبس	انحراف معیار برآورد در روش برشی
۱	$6/028 \times 10^{-7}$	$4/956 \times 10^{-8}$
۲	$3/682 \times 10^{-5}$	$3/984 \times 10^{-6}$
۳	$2/887 \times 10^{-6}$	$2/452 \times 10^{-7}$
۴	$1/352 \times 10^{-6}$	$1/093 \times 10^{-7}$
۵	$6/641 \times 10^{-3}$	$1/071 \times 10^{-3}$
۶	$4/911 \times 10^{-4}$	$4/563 \times 10^{-5}$
۷	$5/971 \times 10^{-2}$	$1/987 \times 10^{-2}$
۸	$5/971 \times 10^{-2}$	$1/987 \times 10^{-2}$
۹	$1/211 \times 10^{-1}$	$2/995 \times 10^{-2}$
۱۰	$3/114 \times 10^{-2}$	$3/817 \times 10^{-3}$

همان‌طور که در جدول ۶ مشاهده می‌شود مقادیر انحراف معیار برآورد بیز برای تمام نرخ خرابی در روش نمونه‌گیری برشی

نسبت به روش نمونه‌گیر گیبس کمتر می‌باشد و این دلیلی دیگر
 برای بهتر بودن نمونه‌گیری برشی نسبت به روش نمونه‌گیر
 گیبس در این حالت است.
 استفاده و کاربرد می‌باشد. این روش برپایه‌ی اصول *MCMC*
 استوار است و از برخی محدودیت‌های دیگر روش‌های
MCMC برخوردار نمی‌باشد. با استفاده از این روش می‌توان
 داده‌های واقعی را نیز مورد تحلیل و بررسی قرار داد.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی برای نمونه‌گیری از یک تابع چگالی تشریح
 شد که برای اکثر توزیع‌های تک‌متغیره و چندمتغیره قابل

مراجع

- [1] Besag J., Green P. L., Spatial statistics and Bayesian computation with discussion, J. Roy. Stat. Soc., Ser.B, 55, 25-38, 1995.
- [2] Conover W. J., Practical Nonparametric Statistics, New York: John Wiley and Sons, 1971.
- [3] Damien P., Wakefield J. C., Walker S. G., Gibbs sampling for Bayesian nonconjugate and hierarchical models by using auxiliary variables, J. Roy. Stat. Soc. Ser.B, 61, 331-344, 1999.
- [4] Damien P., Walker S., Sampling probability densities via uniform variables and a Gibbs sampler, Tech. Report, Business School, University of Michigan, 1996.
- [5] Frey, B. J., Continuouse sigmoidal belief networks trained using slice sampling, In: Advances in Neural Information Processing Systems, MIT Press, Cambridge, 1997.
- [6] Gaver, D. P., O'Muircheartaigh, I. G., Robust empirical Bayes analyses of event rates, Technometrics, 29, 1-15, 1987.
- [7] Gelfand, A. E., Smith, A. F. M., Sampling-based approaches to calculating marginal densities, Journal of the American Statistical Association, 85, 398-409, 1990.
- [8] Gentle, J. E., Random Number Generation and Monte Carlo Methods, Sec. Ed., Springer, 2005.
- [9] Higdon D. M., Auxiliary variable methods for Markov Chain Monte Carlo with applications, Discussion Paper, ISDS, Duke University, 1996.

-
- [10] Neal R. N., Markov Chain Monte Carlo Methods based on Slicing the density function, Tech. Report, University of Toronto, 1997.
- [11] Neal R. N., Slice sampling, *Annals of Statistics*, 31(3), 705-767, 2003.
- [12] Robert, C. P., Casella, G., *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [13] Robert, C. P., Casella, G., *Monte Carlo Statistical Methods*, 2nd edn, Springer-Verlag, New York: 2004.
- [14] Robert, G. O., Rosenthal, J. S., Markov Chain Monte Carlo: Some practical implications of theoretical result (with discution), *Can. J. Stat.*, 26, 5-32, 1998.
- [15] Royston, P., An extension of Shapiro and Wilk's W test for normality to large samples. *Applied Statistics*, 31, 115-124, 1982.
- [16] Tierney L., Mira A., Some adaptive Monte Carlo methods for Bayesian inference, *Statistics in Medicine*, 18, 2507-2525, 1998.
- [17] Wakefield J. C., Gelfand A. E., Smith A. F. M., Efficient generation of random variates via the ratio-of-uniforms methods, *Statistics and Computing* 1, 129-133, 1991.
- [18] Dagpunar, J. S., *Simulation and Monte Carlo: With Applications in Finance and MCMC*, John Wiley and Sons, 2007.