برآوردگرهای نقطه‌ای نوع اشتاین برای واریانس آشوب در یک مدل رگرسیونی خطی و تاثیر آنها در بهبود برآوردگرهای فاصله‌ای

فرج‌اله نگهداری [۱]

چکیده:

در این مقاله برآوردگرهای نقطه‌ای اشتاین برای واریانس آشوب در یک مدل رگرسیونی خطی را معرفی و به بررسی تاثیر آنها در بهبود برآوردگرهای فاصله‌ای مخصوصا از نقطه نظر احتمال پوشش خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: برآورد گرد نوع اشتاین، احتمال پوشش ، تابع زیان، فاصله اطمینان نااریب

۱ مقدمه

در برخی از توزیع های آماری برای بعضی از پارامترهای نامعلوم برآوردگرهایی وجود دارد که نسبت به برآوردگرهای معمولی تحت یک تابع زیان خاص دارای ریسک کمتری هستند. در سال ۱۹۶۴ اشتاین به این فکر افتاد که تحت همان تابع زیان برآوردگری با ریسک کمتری پیدا کند. برای مثال می دانیم در یک جامعه نرمال با میانگین نامعلوم μ براوردگر

$$s^{۲} = \frac{۱}{n+۱}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^{۲}$$

برای $\sigma^{۲}$ تحت تابع زیان درجه دوم دارای کمترین ریسک در میان برآوردگرهایی به شکل ضریبی از $\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\bar{x})^{۲}$ می‌باشد. اشتاین نشان داد که برآوردگر

$$\hat{\sigma}_s^{۲} = \min\left\{s^{۲}\ ,\frac{۱}{n+۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu_{\circ})^{۲}\ \right\}$$

($\mu_{\circ}$ عدد ثابت) تحت تابع زیان درجه دو دارای ریسک کمتری نسبت به $s^{۲}$ می باشد ([۸]).

در سال ۱۹۹۳، اوهاتی [۱۰] تابع توزیع و تابع چگالی برآوردگر اشتاین معرفی شده فوق را به دست آورده و مطالعاتی در مورد تاثیر آنها در اصلاح برآوردگرهای فاصله‌ای انجام داد.

از طرفی براون [۲] و ناگاتا [۸] مطالعات مشابهی را در مورد بهبود برآوردگرهای فاصله‌ای انجام دادند که در این مقاله از برخی نتایج آنها استفاده کرده به بررسی تاثیر برآوردگرهای نوع اشتاین در بهبود برآوردگرهای فاصله‌ای پرداخته و در پایان نتایج را به صورت عددی نشان خواهیم داد.

[۱] عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد نیریز

۲ برآوردگرهای نقطه‌ای نوع اشتاین برای واریانس آشوب در یک مدل رگرسیونی خطی

در این قسمت دو نوع برآوردگرهای نقطه ای راکه تحت توابع زیان داده شده دارای کمترین خطا بوده را بیان کرده و برآوردگرهای اشتاین مربوطه را معرفی می کنیم و به بررسی تاثیر آنها در اصلاح برآوردگرهای فاصله‌ای می پردازیم. مدل رگرسیونی خطی زیر را در نظر بگیرید

$$y = X\beta+\varepsilon \ , \ \varepsilon \sim N(0,\sigma^2 I)$$

که در آن y یک بردار $n\times 1$، X یک ماتریس $n\times k$ از رتبه k، β یک بردار $k\times 1$ و ε نیز یک بردار $n\times 1$ می‌باشد.

برآورد با حداقل مربعات خطا برای β به صورت زیر است

$$\hat\beta = (X'X)^{-1}X'y$$

و همچنین برآورد ε برابر است با

$$e = y - X\hat\beta$$

یک برآوردگر برای σ^2 عبارت است از $S_1^2=\frac{e'e}{n-k+2}$ که در میان برآوردگرهای به شکل ضریبی از $e'e$ تحت تابع زیان درجه دوم دارای کمترین ریسک می‌باشد. محدودیت خطی زیر روی β که در فرض های زیر خلاصه شده است را در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} H_0 : R\beta = r \\ H_1 : R\beta \neq r \end{cases}$$

که در آن R یک ماتریس معلوم $p\times k$ از رتبه p و r یک بردار معلوم $p\times 1$ می‌باشد. آماره آزمون معمولی برای فرض فوق بصورت زیر است

$$F=\frac{(R\hat\beta-r)'(R(X'X)^{-1}R')^{-1}(R\hat\beta-r)/p}{e'e/(n-k)}$$

آماره F دارای توزیع فیشر غیرمرکزی با درجات آزادی p و $n-k$ و پارامتر غیرمرکزی

$$\lambda = (R\beta-r)'(R(X'X)^{-1}R')^{-1}(R\beta-r)/\sigma^2$$

می‌باشد. برآورد σ^2 تحت محدودیت فوق عبارت است از

$$\hat\sigma^{*2}=\frac{{e^*}'e^*}{n-k+p+2}$$

که در آن $e^*=y-X\hat\beta^*$ و

$$\hat\beta^* = \hat\beta + (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(r-R\hat\beta)$$

می باشد. ($\hat\beta^*$ برآوردگر MLE برای β است.)

در اینجا فرم برآوردگر نوع اشتاین به صورت $\hat\sigma^2_{S_1}=\min\left\{s_1^2,\hat\sigma^{*2}\right\}$ است. ([۸] ملاحظه شود.) با توجه به اینکه آماره F را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$F=\frac{({e^*}'e^*-e'e)/p}{(e'e)/(n-k)}$$

باانجام عملیات جبری ساده می توان $\hat\sigma^2_{S_1}$ را به صورت زیر نوشت.

$$\hat\sigma^2_{S_1}=\begin{cases} S_1^2 & F\geq \frac{n-k}{n-k+2} \\ \hat\sigma^{*2} & F<\frac{n-k}{n-k+2} \end{cases}$$

حال برآوردگر نااریب $s_2^2=\frac{e'e}{n-k}$ که در کلاس برآوردگرهای به شکل ضریبی از $e'e$ تحت تابع زیان $L(\delta,\sigma^2)=\frac{\delta}{\sigma^2}-\log(\frac{\delta}{\sigma^2})-1$ دارای کمترین ریسک می باشد را در نظر می‌گیریم. برآوردگر اشتاین به صورت زیر معرفی شده است

$$\hat\sigma^2_{s_2}=\min\left\{s_2^2,\frac{{e^*}'e^*}{n-k+p}\right\}$$

که با اندکی محاسبه به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\hat{\sigma}^2_{s_2} = \begin{cases} s_2^2 & F \ge 1 \\ \frac{e^{*\prime} e^*}{n-k+p} & F < 1 \end{cases}$$

$\hat{\sigma}^2_{s_2}$ تحت تابع زیان فوق دارای ریسک کمتری نسبت به s_2^2 مـی‌باشد ([۲]). برای بررسی تاثیر برآوردگرهای نقطه ای نوع اشتاین معرفی شده فوق برآوردگر فاصله‌ای I_0با ضریب اطمینان $1-\alpha$ بر اساس $e'e$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$I_0 = (\frac{e'e}{c_2}, \frac{e'e}{c_1})$$

که در آن c_1, c_2 $(c_1 < c_2)$ ثابت‌هایی هستند که برای فاصله اطمینان بااحتمال مساوی در دو انتها (I_{ET}) در روابط زیر صدق می‌کند:

$$P(\frac{e'e}{\sigma^2} \le c_1) = P(\frac{e'e}{\sigma^2} \ge c_2) = \alpha/2 \qquad (1)$$

بعلاوه برای کوتاهترین فاصله نااریب (I_{SU}) داریم:

$$P(\sigma^2 \in I_0) = 1-\alpha$$

$$f_{n-k+2}(c_1) = f_{n-k+2}(c_2) \qquad (2)$$

که در آن $f_\nu(x)$ تابع چگالی توزیع کای اسکور با درجه آزادی ν می‌باشد. حال فاصله $I_S(a)$ را مطابق زیر را تعریف می کنیم.

$$I_S(a) = \left(\frac{\min\left\{e'e, e^{*\prime} e^*/a\right\}}{c_2}, \frac{\min\left\{e'e, e^{*\prime} e^*/a\right\}}{c_1} \right)$$

$I_S(a)$ را می‌توان به عنوان یک فاصله اطمینان بهبود یافته نسبت I_0 در نظر گرفت. همچنین a^* را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^* = \frac{(n-k+p)\log(\frac{c_2}{c_1})}{c_2 - c_1}$$

ناگاتا[۸] قضیه زیر را ثابت کرد:

قضیه: اگر $a^* > 1$ آن گاه:

$$P(\sigma^2 \in I_S(a)) > P(\sigma^2 \in I_0) \quad \forall a \in (1, a^*]$$

و $P(\sigma^2 \in (I_S(a))$ روی فاصله $(1, a^*]$ اکیدا صعودی می باشد.

این قضیه نشان می دهد که $I_s(a)$ نسبت به I_0 از لحاظ احتمال پوشش بهتر می باشد.

کنکاش بیشتر

قبل از اینکه به بررسی شرایط قضیه برای فواصل I_{SU} و I_{ET} به پردازیم, به مطالب زیر در مورد طول فاصله $I_S(a)$نیز توجه داشته باشیم. اگر $|I|$ را به عنوان طول فاصله تعریف کنیم واضح است که برای $a_1 < a_2$ داریم

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_2} < \frac{1}{a_1} \\ & \Rightarrow \min\left\{e'e, e^{*\prime} e^*/a_2\right\} \le \min\left\{e'e, e^{*\prime} e^*/a_1\right\} \end{aligned}$$

آنگاه به سادگی می توان نوشت:

$$\begin{aligned} |I_S(a_2)| &= \min\left\{e'e, \frac{e^{*\prime} e^*}{a_2}\right\} (\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}) \\ &\le \min\left\{e'e, \frac{e^{*\prime} e^*}{a_1}\right\} (\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}) \\ &= |I_S(a_1)| \\ &\le e'e(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}) = |I_0| \end{aligned}$$

این نشان می دهد که $I_s(a)$ از نظر طول فاصله نیز از I_0 بهتر می باشد و همچنین $|I_S(a)|$ با افزایش a کاهش می یابد. اگر چه در این جا صحبت کردن از طول فاصله مناسب نیست زیرا σ^2 یک پارامتر مقیاسی است.

بنابراین شکل دیگری از اندازه را در نظر می‌گیریم. حال $\|I\|$ را به عنوان نسبت نقاط انتهـایی فاصله در نظر گرفته، پس برای $a_1 < a_2$ خواهیم داشت:

$$\|I_S(a_1)\| = \frac{\frac{\min\left\{e'e, \frac{e^{*'}e^*}{a_1}\right\}}{c_1}}{\frac{\min\left\{e'e, \frac{e^{*'}e^*}{a_1}\right\}}{c_2}}$$
$$= \frac{\frac{\min\left\{e'e, \frac{e^{*'}e^*}{a_2}\right\}}{c_1}}{\frac{\min\left\{e'e, \frac{e^{*'}e^*}{a_2}\right\}}{c_2}} = \|I_s(a_2)\| = \|I_0\| = \frac{c_2}{c_1}$$

پس $I_s(a)$ از لحاظ احتمال پوشش و طول فاصله بهتر از I_0 می‌باشد در حالی که نسبت نقاط انتهایی آنها یکسان است. در نتیجه با توجه به قضیه مذکور $I_S(a^*)$ در کلاس $\{I_s(a); 1 < a < a^*\}$ بهتـرین بـرآوردگر فاصلـه‌ای از نظراحتمال پوشش و طول فاصله می‌باشد.

۳ برآوردگرهای نقطه ای نوع اشتاین و تاثیر آنان در بهبود برآوردگرهای فاصله‌ای

۱.۳ فاصله اطمینان با دم‌های برابر (I_{ET})

فرض کنید $I_0 = I_{ET}$ با توجه به رابطه (۱-۲) و با توجه به شکل تابع چگالی کای اسکور داریم:

$$f_v(c_1) < f_v(c_2)\tau\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(c_1-c_2)} < 1$$
$$\tau(\nu-2)\log\left(\frac{c_2}{c_1}\right) > c_2 - c_1$$
$$\longrightarrow \nu = n-k+2\,\frac{(n-k)\log(\frac{c_2}{c_1})}{c_2-c_1} > 1$$

با استفاده از رابطه فوق می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
1 &< \frac{n-k+p+2}{n-k+2} \\
&< \frac{(n-k+2)(n-k)+p(n-k)}{(n-k+2)}\,\frac{\log\frac{c_2}{c_1}}{c_2-c_1} \\
&= ((n-k)+p(\frac{n-k}{n-k+2})).\frac{\log(\frac{c_2}{c_1})}{c_2-c_1} \\
&< (n-k+p)\frac{\log(\frac{c_2}{c_1})}{c_2-c_1} = a^*
\end{aligned}$$

بنابراین شرایط قضیه برقرار شد پس:

$$P\Big(\sigma^2 \in I_{ET}) = P(\sigma^2 \in (\frac{n-k+2}{c_2}s_1^2, \frac{n-k+2}{c_1}s_1^2\Big)$$

به جایگزینی $\hat{\sigma}^2_{s_1}$ بجای s_1^2 در رابطه فوق داریم :

$$\begin{aligned}
&P(\sigma^2 \in (\frac{n-k+2}{c_2}\hat{\sigma}^2_{s_1}, \frac{n-k+2}{c_1}\hat{\sigma}^2_{s_1})) \\
&= P(\sigma^2 \in [\frac{n-k+2}{c_2}\min\{\frac{e'e}{n-k+2}, \frac{e^{*'}e^*}{n-k+p+2}\} \\
&\quad ,\frac{n-k+2}{c_1}\min\{\frac{e'e}{n-k+2}, \frac{e^{*'}e^*}{n-k+p+2}\}]) \\
&= P(\sigma^2 \in [\frac{1}{c_2}\min\{e'e, \frac{e^{*'}e^*}{(n-k+p+2)/(n-k+2)}\} \\
&\quad ,\frac{1}{c_1}\min\{e'e, \frac{e^{*'}e^*}{(n-k+p+2)/(n-k+2)}\}]) \\
&= P(\sigma^2 \in I_S(n-k+p+2)/(n-k+2)) \\
&> P\left(\sigma^2 \in I_{ET} = I_0\right)
\end{aligned}$$

یعنی جایگزینی برآوردگر نقطه ای نوع اشتاین بـجای برآوردگر معمولی، باعث افزایش احتمال پوشش خواهد شد. بحث های مشابهی با جایگزین کردن S_2^2 و $\hat{\sigma}^2_{s_2}$، بجای S_1^2، $\hat{\sigma}^2_{S_1}$ به دست خواهد آمد.

۲.۳ کوتاهترین فاصله اطمینان نا اریب

فرض کنید $I_0 = I_{SU}$. با توجه به رابطه (۲) روابط زیر را خواهیم داشت:

$$f_v(c_1) = f_v(c_2), \quad v = n-k+2$$

$$\frac{f_v(c_1)}{f_v(c_2)} = (\frac{c_1}{c_2})^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(c_2-c_1)} = 1$$
$$\tau(\frac{v}{2} - 1)\log(\frac{c_1}{c_2}) = \frac{1}{2}(c_2 - c_1)$$
$$\tau\frac{(n-k)\log(\frac{c_2}{c_1})}{c_2 - c_1} = 1$$
$$\tau \;\; \frac{\log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{c_2 - c_1} = \frac{1}{n-k}$$

بنا براین داریم:

$$a^* = \frac{(n-k+p)\log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{c_2 - c_1} = \frac{n-k+p}{n-k} > 1$$

پس شرایط قضیه در این حالت نیز برقرار شده است، بنابراین

$$P(\sigma^2 \in I_{SU}) = P\left(\sigma^2 \in \left(\frac{(n-k)s_2^2}{c_2}, \frac{(n-k)s_2^2}{c_1}\right)\right)$$

پس با جایگزین کردن $\hat{\sigma}^2_{s_2}$ به جای s_2^2 و با توجه به قضیه ملاحظه می شود که:

$$\begin{aligned}
&P(\sigma^2 \in (\frac{n-k}{c_2}\hat{\sigma}^2_{s_2}, \frac{n-k}{c_1}\hat{\sigma}^2_{s_2})) \\
&= P(\sigma^2 \in [\frac{\min\{e'e, e^{*'}e^*/(n-k+p)/(n-k)\}}{c_2} \\
&\quad , \frac{\min\{e'e, e^{*'}e^*/(n-k+p)/(n-k)\}}{c_1}]) \\
&= P\left(\sigma^2 \in I_s(\frac{n-k+p}{n-k})\right) \\
&= P\left(\sigma^2 \in I_S(a^*)\right) \geq P(\sigma^2 \in I_{su})
\end{aligned}$$

پس با به کار بردن $\hat{\sigma}^2_{s_2}$ به جای s_2^2 باعث بهبود فاصله اطمینان نااریب از نقطه نظر احتمال پوشش خواهد بود. با جایگزین کردن $\hat{\sigma}^2_{S_1}$ بجای s_1^2 در I_{SU} همین نتایج به دست خواهد آمد.

۴ محاسبات عددی

در این قسمت بطور عددی احتمال‌های پوشش را برای فواصل اطمینان بحث شده در قسمت‌های قبل محاسبه می کنیم. برای انجام محاسبات لازم است که تابع توزیع $\min\left\{v, \frac{v+w}{q}\right\}$ را به دست آوریم که در آن $v = \frac{e'e}{\sigma^2}$ و $w = \frac{e^{*'}e^* - e'e}{\sigma^2}$ همانند روشی که اوهاتی [۱۰] تابع توزیع و تابع چگالی $\hat{\sigma}^2_s$ را به دست آورد. تابع توزیع $\min\left\{v, \frac{v+w}{q}\right\}$ را به دست آورده‌ایم:

$$\begin{aligned}
F(C) &= P(\min\left\{v, \frac{v+w}{q}\right\} \leq c) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_i}{B(\frac{m}{2}, \frac{p}{2}+i)} \int_0^{\frac{1}{a}} x^{\frac{m}{2}-1}(1-x)^{\frac{p}{2}+i-1} \\
&\qquad \times P(\frac{m+p}{2} + i, \frac{c}{2x})dx \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \left\{1 - I_{\frac{1}{a}}(\frac{m}{2}, \frac{p}{2}, i)\right\} P(\frac{m+p}{2} + i, \frac{ac}{2})
\end{aligned}$$

جایی که $m = n-k$، $w_i = \exp(-\frac{\lambda}{2})(\frac{\lambda}{2})^i$ و $P(.,.)$ تابع گامای نا کامل و $I(.,.)$ تابع بتای ناکامل می باشد. ([۳]).

با استفاده از $F(c)$ و انتگرال گیری به روش سیمپسون با ۲۰۰ تقسیمات جزیی انتگرال ها محاسبه شده‌اند. احتمال پوشش $I_s(a)$ به مقادیر $n-k$ و p با پارامتر غیرمرکزی λ بستگی دارد. برای مقادیر $n-k =$ ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ۱۹ و $p =$ ۱, ۳ همچنین با توجه به این که $\lambda = (n+k+1)d$ برای $d =$ ۰, ۰/۱, ۰/۳, ۰/۵, ۱, ۱/۵ احتمالات محاسبه شده‌اند. در فاصله اطمینان بادم‌های برابر فرض کنید ضریب اطمینان اسمی ۹۵% باشد. یعنی

$$P(\sigma^2 \in I_{ET}) \;\; = \;\; P_r(\sigma^2 \in (\frac{n-k}{c_2}s_1^2, \frac{n-k}{c_1}s_1^2))$$

$= ۰/۹۵$

احتمال‌های پوشش $I_S((n-k+p+2)/(n-k+p))$ و $I_s(a^*)$ در جداول ۱ و ۲ آورده شده اند. با ملاحظه این جداول می‌بینیم که $I_s(a^*)$ بزرگتر از $I_S((n-k+p+2)/(n-k+p))$ می‌باشد. همانطور که در قضیه ذکر شده بود $I_s(a)$ بر حسب a صعودی است. برای I_{SU} نیز احتمال های پوشش $I_s(a^*)$ برای $p=1$ و $p=3$ در جداول ۳ و ۴ آمده است. با توجه به جدول های شماره ۳ و ۴ احتمال های پوشش $I_s(a^*)$ برای کوتاهترین فاصله نا اریب نیز در اکثر موارد بزرگتر از ضریب اطمینان اسمی (۹۵%) می باشد.

جدول ۱- احتمال های پوشش $I_S((n-k+p+2)/(n-k+p))$ (مقدار بالایی) و $I_s(a^*)$ (مقدار پایینی)

برای $p=1$ با ضریب اطمینان اسمی ۹۵%

	d					
$n-k$	۰	۰/۱	۰/۳	۰/۵	۱	۱/۵
۳	۰/۹۵۸۶	۰/۹۵۷۶	۰/۹۵۵۸	۰/۹۵۴۵	۰/۹۵۲۳	۰/۹۵۱۱
	۰/۹۶۶۹	۰/۹۶۶۸	۰/۹۶۶۱	۰/۹۶۵۰	۰/۹۶۱۵	۰/۹۵۸۱
۷	۰/۹۵۵۷	۰/۹۵۴۵	۰/۹۵۲۷	۰/۹۵۱۶	۰/۹۵۰۴	۰/۹۵۰۱
	۰/۹۵۹۳	۰/۹۵۹۰	۰/۹۵۷۴	۰/۹۵۵۵	۰/۹۵۲۱	۰/۹۵۰۷
۱۱	۰/۹۵۴۲	۰/۹۵۲۹	۰/۹۵۱۳	۰/۹۵۰۶	۰/۹۵۰۱	۰/۹۵۰۰
	۰/۹۵۶۳	۰/۹۵۵۹	۰/۹۵۳۹	۰/۹۵۲۲	۰/۹۵۰۴	۰/۹۵۰۱
۱۵	۰/۹۵۳۳	۰/۹۵۲۰	۰/۹۵۰۷	۰/۹۵۰۲	۰/۹۵۰۰	۰/۹۵۰۰
	۰/۹۵۴۸	۰/۹۵۴۲	۰/۹۵۲۲	۰/۹۵۰۹	۰/۹۵۰۱	۰/۹۵۰۰
۱۹	۰/۹۵۷۲	۰/۹۵۱۵	۰/۹۵۰۴	۰/۹۵۰۱	۰/۹۵۰۰	۰/۹۵۰۰
	۰/۹۵۳۹	۰/۹۵۳۲	۰/۹۵۱۳	۰/۹۵۰۴	۰/۹۵۰۰	۰/۹۵۰

جدول ۲- احتمال هـای پوشش $I_S((n-k+p+2)/(n-k+p))$ (مقدار بالایی) و $I_s(a^*)$ (مقدار پایینی)

برای $p=3$ با ضریب اطمینان اسمی ۹۵%

	d					
$n-k$	۰	۰/۱	۰/۳	۰/۵	۱	۱/۵
۳	۰/۹۶۵۷	۰/۹۶۴۶	۰/۹۶۲۵	۰/۹۶۰۶	۰/۹۵۶۸	۰/۹۵۴۲
	۰/۹۷۳۴	۰/۹۷۳۴	۰/۹۷۳۱	۰/۹۷۲۶	۰/۹۷۰۶	۰/۹۶۷۶
۷	۰/۹۶۲۶	۰/۹۶۰۹	۰/۹۵۷۸	۰/۹۵۵۲	۰/۹۵۱۹	۰/۹۵۰۶
	۰/۹۶۶۹	۰/۹۶۶۶	۰/۹۶۴۶	۰/۹۶۲۵	۰/۹۵۶۷	۰/۹۵۳۱
۱۱	۰/۹۶۰۱	۰/۹۵۸۰	۰/۹۵۴۷	۰/۹۵۲۶	۰/۹۵۰۵	۰/۹۵۰۱
	۰/۹۶۲۷	۰/۹۶۲۱	۰/۹۵۹۳	۰/۹۵۶۳	۰/۹۵۱۸	۰/۹۵۰۴
۱۵	۰/۹۵۸۳	۰/۹۵۶۱	۰/۹۵۲۹	۰/۹۵۱۲	۰/۹۵۰۱	۰/۹۵۰۰
	۰/۹۶۰۱	۰/۹۵۹۳	۰/۹۵۵۹	۰/۹۵۵۱	۰/۹۵۰۴	۰/۹۵۰۰
۱۹	۰/۹۵۷۰	۰/۹۵۴۸	۰/۹۵۱۸	۰/۹۵۰۶	۰/۹۵۰۰	۰/۹۵۰۰
	۰/۹۵۸۳	۰/۹۵۷۳	۰/۹۵۳۸	۰/۹۵۱۵	۰/۹۵۰۱	۰/۹۵۰۰

جدول ۳- احتمال پوشش $I_s(a^*)$ برای حالت $p=$ ۱ با ضریب اطمینان اسمی ۹۵%

	d					
$n-k$	۰	۰/۱	۰/۳	۰/۵	۱	۱/۵
۳	۰/۹۵۴۲	۰/۹۵۴۲	۰/۹۵۳۹	۰/۹۵۳۵	۰/۹۵۲۴	۰/۹۵۱۵
۷	۰/۹۵۲۵	۰/۹۵۲۴	۰/۹۵۱۸	۰/۹۵۱۳	۰/۹۵۰۴	۰/۹۵۰۱
۱۱	۰/۹۵۱۸	۰/۹۵۱۶	۰/۹۵۱۰	۰/۹۵۰۵	۰/۹۵۰۱	۰/۹۵۰۰
۱۵	۰/۹۵۱۳	۰/۹۵۱۱	۰/۹۵۰۵	۰/۹۵۰۲	۰/۹۵۰۰	۰/۹۵۰۰
۱۹	۰/۹۵۱۱	۰/۹۵۰۹	۰/۹۵۰۳	۰/۹۵۰۱	۰/۹۵۰۰	۰/۹۵۰۰

جدول ۴- احتمال پوشش $I_s(a^*)$ برای حالت $p=$ ۳ با ضریب اطمینان اسمی ۹۵%

	d					
$n-k$	۰	۰/۱	۰/۳	۰/۵	۱	۱/۵
۳	۰/۹۵۴۲	۰/۹۵۴۲	۰/۹۵۳۹	۰/۹۵۳۵	۰/۹۵۲۴	۰/۹۵۱۵
۷	۰/۹۵۲۵	۰/۹۵۲۴	۰/۹۵۱۸	۰/۹۵۱۳	۰/۹۵۰۴	۰/۹۵۰۱
۱۱	۰/۹۵۱۸	۰/۹۵۱۶	۰/۹۵۱۰	۰/۹۵۰۵	۰/۹۵۰۱	۰/۹۵۰۰
۱۵	۰/۹۵۱۳	۰/۹۵۱۱	۰/۹۵۰۵	۰/۹۵۰۲	۰/۹۵۰۰	۰/۹۵۰۰
۱۹	۰/۹۵۱۱	۰/۹۵۰۹	۰/۹۵۰۳	۰/۹۵۰۱	۰/۹۵۰۰	۰/۹۵۰۰

مراجع

[1] Brown, L.D. (1968). "Inadmissibility of the usual estimators of scale parameters in problems with unknown location and scale parameters, "*Annals of Mathematical Statistics* ,39 ,29-48.

[2] Brown, I,. D. (1990). Comment on "Development in decision theoretic variance estimation" by Maatta, J. M. and Casella, G., Statistcal Science, B, 103-106.

[3] Clarko, J.A., Giles, D.F.A. and Wallace, T.D.(1987). "Estimating the error variance in regression after a preliminary test of restrictions on the coefficicnts,"*Journal of Econometrics*, 34, 293-304.

[4] Cohen,A.(1972)."Improved confidence intervals for the variance of a normal distribution, "*Journal of the American Statistical Association*, 67, 382-387.

[5] Giles, J.A.(1990). Preliminary-test Estimation of a Mis-specified Linear Model with Sphcrically Symmetric Distnrbances, Ph.D. thesis, Univerity of Canterbury, Christchurch.

[6] Giles, J.A.(1991). "Pre-testing for linear restrictions in a regression model with spherically symmetric disturbances," *Journal of Econometrics*, 50, 377-398.

[7] Inaba, T. and Nagata, Y.(1994). "An unequality in the condition for improving on an equal-tails confidence of normal variance, " *Journal of Japan Statistical Society*, 24, 181-184.

[8] James, W. and Stein, C. (1961). "Estirnation with quadratic loss," *Proceedings of the Fourti: Berkeley Syrnposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1,361-379.

[9] Nagata, Y.(1989)."Improvement of Interval Estimation for the Variance and the Ratio of two Variance, "*journal of Japan Statistical Society*, 19, 151-161.

[10] Ohtani, K. (1993)."The exact distribution and density functions of the Stein-type estimator for normal variance," *Communications in Statistics-Theory and Methods*. 22, 2863-2876.