خواص توزیع‌های تک‌مدی و برخی کاربردهای آن

مهدی علیمحمدی[۱] و محمد حسین علامت‌ساز[۲]

چکیده:

مفهوم تک‌مدی برای هر دو نوع توزیع‌های گسسته و پیوسته تعریف شده است و هر یک تفسیر جداگانه‌ای دارد. با پیشرفت نظریه توزیع‌ها، تک‌مدی به تک‌مدی قوی و نیز α−تک‌مدی تعمیم داده شد و از آن پس توجه زیادی را به خود جلب کرد. در این مقاله ابتدا این مفاهیم را به همراه چند مشخصه‌سازی مرور می‌کنیم. به دلیل اهمیت متغیرهای تصادفی مرتب‌شده در بسیاری از شاخه‌های آمار، این خواص را در این نوع متغیرها نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس در راستای تکمیل این نتایج، یک مثال نقض ارائه خواهیم کرد که نشان می‌دهد این نتایج برای تمام مقادیر پارامترهای مدل نمی‌تواند برقرار باشد. در پایان چند کاربرد این مباحث را در آمار و قابلیت اعتماد بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: آماره‌های ترتیبی، آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته، تحدب، تک‌مدی، قابلیت اعتماد، قویاً تک‌مدی، مشخصه‌سازی، α−تک‌مدی.

۱ مقدمه

بررسی توزیع‌های تک‌مدی [۳] از اواخر قرن نوزدهم در ارتباط با تقریب چگالی تک‌مدی با توابع تک‌مدی مشابه در نظریه بهینه‌سازی آغاز شد. سپس با پیشرفت نظریه توزیع‌ها، انواع تعمیم‌یافته این توزیع‌ها مانند توزیع‌های تک‌مدی قوی [۴] و α− تک‌مدی و مشتقات آن‌ها مورد توجه آماردانان قرار گرفت. در چند دهه اخیر، مفهوم تک‌مدی چند متغیره نیز مورد توجه زیادی قرار گرفته است که از بیان آن در این مقاله صرف نظر می‌کنیم (برای مطالعه در این زمینه خواننده را به دارمادیکاری و جوجدف[۵] [۱۹] ارجاع می‌دهیم).

یکی از اهداف این مقاله، شناساندن مفهوم تک‌مدی و ارائه برخی از کاربردهای آن است. در اکثر کتاب‌ها، به خاصیت تک‌مدی توزیع ها توجه زیادی نمی‌شود. امیدواریم این مقاله نشان دهد که مفهوم تک‌مدی فراتر از آن است که بگوئیم منحنی ابتدا بالا رفته و سپس پایین می‌آید. شکل توزیع‌ها در مسائل آماری با توجه به ماهیت ساختاری آن‌ها متفاوت است. واضح است که یک آماردان برای مقایسه دو توزیع که از یک نوع نیستند، ممکن است با مشکل مواجه شود، اما اگر هر دو ساختار یکسانی داشته باشند، به عنوان مثال هر دو تک‌مدی باشند، بُعد این مشکل کاهش می‌یابد. همچنین مانند

[۱] موسسه آموزش عالی نقش جهان
[۲] گروه آمار دانشگاه اصفهان
[۳] Unimodal
[۴] Strongly Unimodal
[۵] Dharmadhikari and Joag-dev

سایر ساختارهای ساختمانی توزیع‌ها، از مدپذیری می‌توان در مشخصه‌سازی توزیع‌ها، که نقش مهمی در شناسایی غیرمستقیم و الگوسازی آن‌ها دارند، استفاده نمود. در این مبحث، تحدب نقشی بسیار اساسی بازی می‌کند. برای مشخصه‌سازی توزیع‌های پیوسته، بیشتر از خواص تحدب و تقعر لگاریتم چگالی توزیع استفاده می‌شود. به‌خصوص برای توزیع‌های قویاً تک‌مدی که به علت کاربرد زیاد آن‌ها در زمینه‌های مختلف از جمله قابلیت اعتماد مورد توجه آماردانان قرار دارد، از خصوصیت تقعر لگاریتم چگالی‌ها برای مشخصه‌سازی توزیع‌ها استفاده می‌شود.
در این مقاله ابتدا در بخش دوم به خواص تک‌مدی و قویاً تک‌مدی و برخی مشخصه‌سازی‌های موجود در این زمینه می‌پردازیم. در بخش سوم، مفاهیم تعمیم‌یافته تک‌مدی را مرور می کنیم. سپس از آن‌جا که متغیرهای تصادفی مرتب‌شده نقش ویژه‌ای در شاخه‌های مختلف آمار دارند، این خواص را در بخش چهارم در مورد این نوع آماره‌ها مورد بررسی قرار داده و بحث را با ارائه یک مثال نقض کامل می‌کنیم. در بخش پنجم نیز کاربردهایی از این توزیع‌ها را بیان خواهیم کرد.

۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۲ تک‌مدی پیوسته و گسسته

خاصیت تک‌مدی برای هر دو نوع توزیع‌های پیوسته و گسسته تعریف شده است که هر کدام تفسیر جداگانه‌ای دارند. اگر تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته مطلق روی فاصله $(-\infty,\nu)$ صعودی و در فاصله $(\nu,+\infty)$ نزولی باشد، آنگاه آن توزیع تک‌مدی حول ν خوانده می‌شود. این خاصیت به طور کلی‌تر بر اساس تابع توزیع تعریف می‌شود. اولین تعریف رسمی و دقیق این خاصیت همراه با چند مشخصه این توزیع‌ها توسط خین چین [6] [۲۹] ارائه شد.

تعریف ۱ متغیر تصادفی X یا تابع توزیع آن F حول نقطه ν تک‌مدی است، اگر F روی $(-\infty,\nu)$ محدب و روی $(\nu,+\infty)$ مقعر باشد.

به عنوان مثال با توجه به تعریف به‌راحتی می‌توان دید که توزیع‌های نرمال، کوشی، نمایی و یکنواخت تک‌مدی هستند. با استفاده از این تعریف، خین چین ثابت کرد که کلاس همه توزیع‌های تک‌مدی روی R تحت حد ضعیف بسته است و آمیخته [7] چند توزیع تک‌مدی حول صفر نیز یک توزیع تک‌مدی است. همچنین وی ثابت کرد که اگر ζ مجموعه همه توابع توزیع تک‌مدی حول صفر با تکیه‌گاه R باشند، آنگاه هر عضو F از ζ یک آمیخته تعمیم‌یافته از توابع توزیع یکنواخت روی $(\circ,z)$ یا $(z,\circ)$، W_z، خواهد بود که در آن ها به ترتیب $z>\circ$ و $z<\circ$ است. یعنی اگر H نشان‌دهنده تابع توزیع متغیر تصادفی Z روی $(-\infty,+\infty)$ باشد آنگاه خواهیم داشت

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}W_z(x)dH(z). \qquad (۱)$$

با استفاده از نکته‌ای که ذکر شد، خین چین مشخصه ذیل را اثبات کرد. پس از او شپ [8] [۳۴] همان قضیه را به روش دیگر اثبات کرد که در این‌جا به آن اشاره می‌شود.

[6] Khintchine
[7] Mixture
[8] Shepp

قضیه ۱ تابع توزیع F تعریف‌شده روی R، تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر متغیرهای تصادفی مستقل U و Z وجود داشته باشند به طوری که U دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(۰,۱)$ و حاصلضرب UZ دارای توزیع F باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنید F حول صفر تک‌مدی بوده و در رابطه (۱) صدق کند. همچنین فرض کنید متغیر تصادفی Z دارای توزیع H بوده و U مستقل از Z دارای توزیع یکنواخت روی $(۰,۱)$ باشد. بنابراین داریم

$$۱ - F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [۱ - W_z(x)] dH(z). \qquad (۲)$$

اگر $x > ۰$، آنگاه داریم

$$W_z(x) = \begin{cases} ۰, & x \leq ۰ \\ x/z, & ۰ < x < z \\ ۱, & z \leq x \end{cases}.$$

بنابراین با استفاده از (۲) داریم

$$\begin{aligned} ۱ - F(x) &= \int_{x}^{\infty} [۱ - W_z(x)] dH(z) \\ &= \int_{x}^{\infty} P[U > x/z] dH(z) \\ &= P[UZ > x]. \end{aligned}$$

به طور مشابه برای $x < ۰$ می توان نشان داد $F(x) = P[UZ \leq x]$. در نتیجه UZ دارای تابع توزیع F است.

حال، برعکس، فرض کنید U و Z در شرایط قضیه صدق می‌کنند و Z دارای توزیع دلخواه H و UZ دارای تابع توزیع F باشند. آنگاه برای $x > ۰$، طبق مراحل فوق رابطه زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} ۱ - F(x) &= P[UZ > x] \\ &= \int_{x}^{\infty} [۱ - W_z(x)] dH(z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [۱ - W_z(x)] dH(z) \end{aligned}$$

و به طور مشابه برای $x < ۰$،

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_z(x) dH(z).$$

روابط فوق نشان می‌دهد که F، آمیزه توابع توزیع W_z می‌باشد. از طرفی با توجه به این‌که W_z تک‌مدی حول صفر بوده و همچنین آمیخته توزیع های تک مدی حول صفر، تک مدی حول صفر است، نتیجه گرفته می‌شود که F حول صفر تک‌مدی بوده و اثبات کامل می‌شود.□

گزاره ۱ یک توزیع با تابع مشخصه φ تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر یک تابع مشخصه مانند ψ وجود داشته باشد به طوری که

$$\varphi(t) = \int_{۰}^{۱} \psi(tu) du, \qquad t \in R.$$

در واقع این نتیجه بیان دیگری از قضیه قبل به زبان توابع مشخصه است. در قضیه زیر مشخصه‌سازی مفید دیگری را ارائه می‌دهیم که توسط اولشن و ساویج [۹] [۳۲] بیان شده است.

قضیه ۲ متغیر تصادفی X دارای توزیع تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر $tE[g(tX)]$ نسبت به $t > ۰$ و برای هر تابع کراندار، نامنفی و بورل—اندازه‌پذیر g غیرنزولی باشد.

[۹] Olshen and Savage

اثبات. فرض کنید X دارای تابع توزیع F و تک‌مدی حول صفر است. بنابراین با توجه به قضیه ۱، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} tE[g(tX)] &= tE[g(tUZ)] \\ &= t\int_{۰}^{۱} E[g(tuZ)]du \\ &= \int_{۰}^{t} E[g(\nu Z)]d\nu. \end{aligned}$$

واضح است که چون g نامنفی است، آخرین انتگرال نسبت به $t > ۰$ غیرنزولی خواهد بود.

برعکس، فرض کنید که $tE[g(tX)]$ نسبت به $t > ۰$ و برای هر تابع کراندار، نامنفی و بورل—اندازه‌پذیر g غیرنزولی است. حال تابع g را تابع نشانگر روی فاصله $(a,b]$، $۰ < a < b$، در نظر بگیرید. آنگاه $t[F(b/t) - F(a/t)]$ برای $t > ۰$ غیرنزولی خواهد بود. با تغییر متغیر $u = ۱/t$ تابع

$$K(u) = \frac{[F(bu) - F(au)]}{u}$$

برای $u > ۰$ غیرصعودی است. در این صورت، اولاً F باید روی $(۰,\infty)$ پیوسته باشد، زیرا اگر $x_۰ > ۰$ یک نقطه ناپیوستگی F باشد، با در نظر گرفتن a به عنوان نقطه پیوستگی F و $b = x_۰$ مشاهده می‌شود که وقتی u به عدد ۱ افزایش می‌یابد، K نیز افزایش می‌یابد و این با غیرصعودی بودن K در تناقض است.

حال ادعا می‌کنیم که F روی $(۰,\infty)$ مقعر است. اگر این حالت برقرار نباشد، پیوستگی F نشان می‌دهد که برای یک a و b متعلق به $(۰,\infty)$ که $a < b$ و برای هر $t \in (۰,۱)$، رابطه زیر برقرار است

$$F[ta + (۱-t)b] < tF(a) + (۱-t)F(b). \qquad (۳)$$

حال اگر $c = \sqrt{ab}$، آنگاه قرار می‌دهیم $u = (b/c) = (c/a)$. بدیهی است که $u > ۱$ و بنابراین خاصیت غیرصعودی بودن K نشان می‌دهد که

$$F(c) - F(a) \geq \frac{F(cu) - F(au)}{u} = \frac{F(b) - F(c)}{u}$$

که معادل است با

$$F(c) \geq \frac{uF(a) + F(b)}{۱+u}. \qquad (۴)$$

اما چون $c = (ua+b)/(۱+u)$، رابطه (۴) با (۳) در تناقض است. بنابراین F روی $(۰,\infty)$ مقعر است. به طور مشابه ثابت می‌شود که F روی $(-\infty,۰)$ محدب بوده و به این ترتیب ثابت می‌شود که F تک‌مدی است.□

طبق تعریف ۱، از توزیع‌های گسسته فقط توزیع تباهیده تک‌مدی است. به همین دلیل آماردانان به فکر تعریفی برای حالت گسسته افتادند. اولین تعریف توسط کیلسون و گربر[۱۰] [۲۸] به صورت زیر ارائه شد و بعد از آن کارهای متعددی در مورد این حالت انجام گرفت.

تعریف ۲ توزیع گسسته (توزیع مشبک[۱۱] با تکیه‌گاه اعداد صحیح) $P = \{p_n, -\infty < n < \infty\}$ حول M تک‌مدی نامیده می‌شود، اگر

$$\begin{cases} p_n \geq p_{n-۱}, & n \leq M \\ p_n \geq p_{n+۱}, & n \geq M \end{cases}.$$

[۱۰] Keilson and Gerber

[۱۱] Lattice

این تعریف متناظر با این است که دنباله $\{p_n - p_{n-1}\}$ فقط یک بار از مثبت به منفی تغییر علامت بدهد. به عنوان مثال به سادگی می‌توان دید که توزیع‌های پواسن، دوجمله‌ای و دوجمله‌ای منفی تک‌مدی هستند.
در اینجا اولین مشخصه‌سازی در این حالت را که توسط مدگایسی [12] [۳۱] ارائه شد بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۳ دنباله $P = \{p_n\}$ که یک توزیع تعریف‌شده روی مجموعه اعداد صحیح است، تک‌مدی حول صفر است، اگر و فقط اگر دنباله $Q = \{q_n\}$ تعریف‌شده به صورت زیر

$$q_n = (\theta - n)(p_n - p_{n-1}), \quad \forall\theta \in (0, 1)$$

یک توزیع احتمال روی مجموعه اعداد صحیح باشد.

همانند قبل، در این حالت نیز مشخصه‌سازی بر اساس توابع مشخصه به صورت زیر بیان می‌شود.

گزاره ۲ متغیر تصادفی X با توزیع $P = \{p_n\}$ تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر تابع مشخصه آن به صورت زیر باشد

$$\varphi(t) = \frac{e^{i\theta t}}{i(1 - e^{it})} \int_0^t e^{-i\theta u}\psi(u)du, \quad t \neq 2n\pi,$$

که در آن ψ یک تابع مشخصه است.

در آخر این بخش به دو قضیه در مورد توزیع آمیخته پواسن که به فرم زیر است اشاره می‌کنیم

$$p_n = \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^n dF(\lambda),$$

که در آن F تابع توزیع λ می‌باشد.
هولگیت [13] [۲۲] اثبات کرد که اگر توزیع F به طور مطلق پیوسته باشد، آنگاه توزیع‌های آمیخته پواسن تک مدی‌اند. پس از آن علامت‌ساز [۶] با حذف شرط به طور مطلق پیوسته بودن F، قضیه فوق را اصلاح کرد و همچنین نشان داد که این قضیه برای حالتی که توزیع F گسسته تک‌مدی باشد، برقرار نیست.

۲.۲ پیچش تک‌مدی‌ها و تعریف قویاً تک‌مدی

پیچش یکی از عملگرهای مهم در آمار و احتمال است. بنابراین اطلاع از این‌که آیا خاصیت تک‌مدی تحت پیچش بسته می‌ماند یا خیر، از اهمیت زیادی برخوردار است. قابل توجه است که در ابتدا این طرز فکر وجود داشت که پیچش توزیع‌های تک‌مدی مجدداً تک‌مدی خواهد بود و اولین مثال نقض توسط چانگ (گنه دنکو و کلموگروف [14] [۲۱])، ارائه شد. فلر [15] [۲۰] نیز یک مثال ارائه داد که نسبتاً پیچیده است، اما علامت‌ساز [۵] با مثال مقدماتی زیر این موضوع را به‌سادگی روشن ساخت.

مثال ۱ توزیع پیوسته مطلق زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1-\alpha}{2}, & 1 \leq x < 3 \\ 0, & o.w. \end{cases},$$

که در آن $1/2 \leq \alpha < 1$ یک مقدار ثابت است. بدیهی است که این توزیع تک‌مدی است.

[12] Medgyessy
[13] Holgate
[14] Gnedenko and Kolmogorov
[15] Feller

حال پیچش دوگانه این توزیع را با خودش در نظر بگیرید

$$f^{2*}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$$
$$= \begin{cases} \alpha^2 x, & 0 \leq x < 1 \\ -\alpha x(2\alpha - 1) + \alpha(3\alpha - 1), & 1 \leq x < 2 \\ (\frac{1-\alpha}{2})^2 x + \frac{(1-\alpha)(3\alpha-1)}{2}, & 2 \leq x < 3 \\ (\frac{5\alpha^2-6\alpha+1}{4})x + \frac{(1-\alpha)(9\alpha-1)}{2}, & 3 \leq x < 4 \\ -(\frac{1-\alpha}{2})^2 x + 6(\frac{1-\alpha}{2})^2, & 4 \leq x < 6 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

به سادگی می‌توان دید، توزیع فوق دارای دو مد در نقاط ۱و ۳ و یک مینیمم در نقطه ۲ است. لذا پیچش دو توزیع تک‌مدی، ممکن است تک‌مدی نباشد. اما وینتنر [16] [۳۷] نشان داد که پیچش دو توزیع تک‌مدی متقارن، تک‌مدی و متقارن است.

با توجه به توضیحات بالا، ابراهیمف [17] [۲۴] خاصیت قویاً تک‌مدی را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۳ توزیع F را قویاً تک‌مدی می‌نامند اگر پیچش $F*G$ برای هر توزیع تک‌مدی G، تک‌مدی باشد.

وی با استفاده از این تعریف نتایج ذیل را به‌دست آورد.

۱. مجموعه توزیع‌های قویاً تک‌مدی تحت حد ضعیف و پیچش بسته‌اند.

۲. یک توزیع قویاً تک‌مدی، تک‌مدی است.

۳. توزیع‌های تباهیده، قویاً تک‌مدی هستند.

همچنین قضیه زیر را که مشخصه‌سازی مهم خاصیت قویاً تک‌مدی ابراهیمف است، به دلیل طولانی بودن اثبات آن، بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۴ یک تابع توزیع ناتباهیده F قویاً تک‌مدی است اگر و فقط اگر F پیوسته و چگالی آن f لگ−مقعر باشد (یعنی لگاریتم چگالی آن مقعر باشد).

کلاسن [18] [۳۰] نیز مشخصه‌سازی دیگری برای توزیع‌های قویاً تک‌مدی ارائه داده است. همچنین مشابه ابراهیمف، کیوکلسکو و تئودورسکو [19] [۱۸] خاصیت قویاً تک‌مدی ضربی [20] را برای حاصلضرب دو متغیر تصادفی تعریف و مشخصه‌سازی کردند. کیلسون و گربر [۲۸] برای حالت گسسته مانند حالت پیوسته تعریف و مشخصه سازی مشابهی را به صورت زیر ارائه دادند.

تعریف ۴ توزیع P تعریف شده روی مجموعه اعداد صحیح قویاً تک‌مدی نامیده می‌شود اگر پیچش $P*Q$ برای هر توزیع تک‌مدی Q با تکیه‌گاه مجموعه اعداد صحیح، تک‌مدی باشد.

قضیه ۵ توزیع گسسته $P = \{p_n\}$ قویاً تک‌مدی است اگر و فقط اگر

$$p_n^2 \geq p_{n-1}p_{n+1}, \quad \forall n.$$

۳ تک‌مدی‌های تعمیم‌یافته

اولشن و ساویج [۳۲] تعریفی برای خاصیت تک‌مدی تعمیم‌یافته با استفاده از یک پارامتر مثبت α ارائه دادند

[16] Wintner
[17] Ibragimov
[18] Klaassen
[19] Cuculescu and Theodorescu
[20] Multiplicative Strong Unimodality

که در واقع نتایج آن‌ها، کار بنیادی خین چین درباره تک‌مدی بودن توزیع‌ها را تعمیم داد.

تعریف ۵ بردار تصادفی n—بعدی $\mathbf{X}$، دارای توزیع α—تک‌مدی حول بردار صفر است اگر برای هر تابع کراندار، نامنفی و بورل—اندازه‌پذیر g تعریف‌شده روی R^n، تابع $t^\alpha E[g(t\mathbf{X})]$ زمانی که $t \in (\circ, +\infty)$، غیرنزولی باشد.

با توجه به تعریف فوق به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که اگر $\mathbf{X}$، α—تک‌مدی و $\alpha < \beta$ باشد، آنگاه $\mathbf{X}$، β—تک‌مدی خواهد بود. بنابراین، بهترین α در این‌جا، کوچکترین مقدار ممکن برای α است.

در قضیه زیر یکی از مشخصه‌سازی‌های اولشن و ساویج [۳۲] در این زمینه را بیان می‌کنیم.

قضیه ٦ بردار تصادفی n—بعدی $\mathbf{X}$، دارای توزیع α—تک‌مدی حول بردار صفر است اگر و فقط اگر $\mathbf{X}$ با $U^{1/\alpha}\mathbf{Z}$ هم‌توزیع باشد که در آن $U \sim (\circ, 1)$ و $\mathbf{Z}$ یک بردار تصادفی مستقل از U است.

با توجه به مطالب بالا می بینیم که تک‌مدی روی R همان ۱—تک‌مدی است.

همانند توزیع‌های α—تک‌مدی پیوسته، تعمیم‌یافته توزیع‌های تک‌مدی گسسته، توزیع‌های α—تک‌مدی گسسته می‌باشد که اولین بار به وسیله ابوامااه [21][۱] تعریف شد. سپس این تعریف مورد توجه استیوتل [22][۳۵] قرار گرفت و پس از او علامت‌ساز [۷] به آن پرداخت. استیوتل توزیع‌های α—تک‌مدی را با توجه به ایده α—یکنوایی مورد بررسی قرار داد و بیان کرد که تعریف ابوامااه کاملاً صحیح نیست. پس از آن ابوامااه تعریف خود را اصلاح کرد و ادعا کرد که مشخصه‌سازی‌های وی در مقاله اش [۲] کماکان به اعتبار خود باقی است. علامت‌ساز [۷] نشان داد که این ادعا درست نبوده و مشخصه‌سازی‌های جانشین را برای این توزیع‌ها ارائه داد. پس از آن افراد زیادی در این حیطه وارد شدند که از تازه‌ترین آن‌ها می‌توان به تعمیم و بسط‌های ارائه شده توسط آقابابایی و علامت‌ساز [۳] اشاره کرد که کارهای قبلی را در بر می‌گیرد.

ابتدا ایده α—یکنوایی را با استفاده از تعریف ضرب تعمیم‌یافته $u \otimes Y$ که توسط استیوتل و ون هارن [23][۳٦] ارائه شد بیان‌می کنیم.

تعریف ٦ فرض کنید Y یک متغیر تصادفی تعریف‌شده روی $N_\circ = \{\circ, 1, 2, \ldots\}$ و $u \in [\circ, 1]$ باشد. آنگاه ضرب تعمیم‌یافته $u \otimes Y$ به صورت

$$u \otimes Y = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

تعریف می‌شود که در آن X_i—ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع مشترک برنولی با احتمال موفقیت u و مستقل از Y است.

با توجه به تعریف فوق، استیوتل [۳۵] متغیرهای α—یکنوای تعریف‌شده روی $N_\circ$ را به صورت زیر تعریف کرد.

[21] Abouammoh
[22] Steutel
[23] Van Harn

تعریف ۷ متغیر تصادفی X بر N_0 α—یکنوا گفته می‌شود اگر متغیر تصادفی Y بر N_0 وجود داشته باشد به‌طوری که بتوان نوشت $X =^d U^{\frac{1}{\alpha}} \otimes Y$ که در آن $U \sim U(0,1)$ مستقل از Y است.

با استفاده از این تعریف و مشخصه‌سازی توزیع‌های α—یکنوا، استیوتل [۳۱] نتیجه زیر را بیان کرد.

گزاره ۳ توزیع $\{p_n\}$ تعریف‌شده روی N_0، α—یکنوا است اگر و فقط اگر

$$p_n \geq \frac{(n+1)}{(\alpha+n)}p_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

بر این اساس ابواماه [۲] تعریف خود را به صورت زیر اصلاح کرد.

تعریف ۸ توزیع $\{p_n\}$، α—تک‌مدی حول صفر نامیده می‌شود اگر روابط زیر برقرار باشند

$$\begin{cases} (i)(\alpha-n)p_n \geq (1-n)p_{n-1}, & n \leq 0 \\ (ii)(\alpha+n)p_n \geq (n+1)p_{n+1}, & n \geq 0 \end{cases}. \quad (5)$$

یکی از مشخصه‌سازی های ابواماه [۱] بیان می‌دارد که " توزیع $\{p_n\}$ با اولین گشتاور متناهی، α—تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر Q_n که به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسسته باشد

$$Q_n = P_n - \alpha^{-1} n p_n, \quad n \in Z.$$

در تساوی فوق $P_n = \sum_{k=-\infty}^{n} p_n$، تابع توزیع p_n و $Q_n = \sum_{k=-\infty}^{n} q_n$، تابع توزیع یک توزیع گسسته مانند $\{q_n\}$ است."

اما مثال نقض زیر از علامت‌ساز [۷] نشان می‌دهد که این نتیجه درست نیست.

مثال ۲ فرض کنید $\alpha = 2$ و توزیع $\{p_n\}$ به صورت جدول ۱ باشد. واضح است که Q_n یک تابع توزیع گسسته است. اما می‌توان دید که برای $n = 2$، رابطه (۵i) برقرار نیست و در نتیجه $\{p_n\}$ ۲—تک‌مدی نیست.

اصلاح‌شده این نتیجه برای α—یکنوایی و α—تک‌مدی توسط علامت‌ساز [۷] به صورت زیر ارائه گردید.

قضیه ۷ (۱) توزیع $\{p_n\}$، α—یکنوا است اگر و فقط اگر

$$Q_n = P_n - \alpha^{-1}(n+1)p_{n+1}, \quad n \in N_0,$$

تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسسته باشد.

(۲) توزیع $\{p_n\}$، α—تک‌مدی حول صفر است اگر و فقط اگر $\alpha p_0 \geq p_1$ و

$$Q_n = \begin{cases} \frac{(\alpha P_n - np_n)}{(\alpha+p_1)}, & n \leq 0 \\ \frac{(\alpha P_n + p_1 - (n+1)p_{n+1})}{(\alpha+p_1)}, & n \geq 0 \end{cases},$$

یک تابع توزیع گسسته باشد.

مشاهده می‌کنیم که در این‌جا دیگر نیازی به متناهی بودن گشتاور اول توزیع نیز نمی‌باشد.

جدول ۱. توزیع $\{p_n\}$ در مثال ۲

n	کمتر از۱-	-۱	۰	۱	۲	۳	بیشتر از۳
p_n	۰	۰/۲۲۵	۰/۱۵	۰/۳	۰/۱۲۵	۰/۲	۰
P_n	۰	۰/۲۲۵	۰/۳۷۵	۰/۶۷۵	۰/۸	۱	۱
$Q_n = P_n - \frac{1}{2} n p_n$	۰	۰/۳۳۷۵	۰/۳۷۵	۰/۵۲۵	۰/۶۷۵	۰/۷	۱

۴ خواص تک‌مدی و قویاً تک‌مدی متغیرهای تصادفی مرتب‌شده

تاکنون مدل‌های مختلفی از متغیرهای تصادفی مرتب‌شده معرفی شده‌اند که از آن جمله می‌توان به آماره‌های ترتیبی، مقادیر رکورد و به طور کلی k−رکورد، آماره‌های سانسور فزاینده و ... اشاره کرد. هر یک از این مدل‌ها با توجه به ساختاری که دارند، برای نوع خاصی از داده‌ها پیشنهاد شده‌اند (کمپس[۲۴] [۲۶] ملاحظه شود).
مفهوم آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته را کمپس [۲۷و۲۶] به منظور تعمیم و تلفیق مدل‌های مختلف متغیرهای تصادفی (به طور صعودی) مرتب‌شده ارائه کرده است و بعد از آن بورکشات و همکاران[۲۵] [۱۴]، دوگان آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته را مشابه تعریف کمپس، برای متغیرهای تصادفی به طور نزولی مرتب‌شده تعریف کردند.
مطالعه خاصیت تک‌مدی درباره این نوع متغیرها، توسط کار هوشمندانه آلام [۲۶] [۴] صورت گرفت که تحدب $۱/f$، که در آن f چگالی توزیع جامعه است، را برای تک‌مدی بودن توزیع آماره‌های ترتیبی کافی دانست. بعد از آن هوآنگ و گوش[۲۷] [۲۳] نشان دادند قویاً تک‌مدی بودن یک توزیع به معنای قویاً تک‌مدی بودن آماره‌های ترتیبی آن توزیع است. تک‌مدی بودن آماره‌های رکورد توسط باساک و باساک [۲۸] [۱۲] مورد بررسی قرار گرفت، اما علیِف [۲۹] [۸] با یک مثال نقض نشان داد شرط تحدب $۱/f$ را که آنان در نظر گرفته بودند برای تک‌مدی بودن مقادیر رکورد کافی نیست. کرامر[۳۰] [۱۶] با همان شرایط آلام و هوآنگ و گوش، تک‌مدی و قویاً تک‌مدی بودن آماره‌های سانسور فزاینده را نتیجه گرفت و کرامر و همکاران [۱۷] تک‌مدی بودن حالت خاصی از آماره‌های ترتیبی‌تعمیم یافته وقتی توزیع اولیه یکنواخت باشد را ثابت کردند.
برای بیان مطالب بعدی به تعریف زیر که توسط کمپس [۲۷و۲۶] ارائه شده است، نیاز داریم.

تعریف ۹ فرض کنید F یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی f و $\bar{F} = ۱ - F$ باشد. همچنین فرض کنید پارامترهای $n \in N$، $k > ۰$ و $\tilde{m} = (m_۱, m_۲, ..., m_{n-۱}) \in R^{n-۱}$ به گونه‌ای باشند که‌برای $r = ۱, ..., n-۱$ و $n \geq ۲$،

$$\gamma_r = k + n - r + \sum_{j=r}^{n-۱} m_j > ۰,$$

و برای $n = ۱$، $\tilde{m} \in R$ دلخواه است. متغیرهای تصادفی $X_{(r,n,\tilde{m},k)}$، $r = ۱, ..., n$، را آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته

[۲۴] Kamps
[۲۵] Burkschat and et al.
[۲۶] Alam
[۲۷] Huang and Ghosh
[۲۸] Basak and Basak
[۲۹] Aliev
[۳۰] Cramer

(GOSs) [31] گویند هرگاه برای همه $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$، تابع چگالی توأم آن‌ها به فرم زیر باشد

$$f_{X_{(1,n,\tilde{m},k)},...,X_{(n,n,\tilde{m},k)}}(x_1,...,x_n) = k\Big(\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\Big)$$
$$\times\Big(\prod_{i=1}^{n-1}[\bar{F}(x_i)]^{m_i} f(x_i)\Big)[\bar{F}(x_n)]^{k-1} f(x_n).$$

به عنوان حالت‌های خاص مشاهده می شود که با قرار دادن $k = 1$ و $m_1 = ... = m_{n-1} = 0$، آماره‌های ترتیبی معمولی و برای $k \in N$ و $m_1 = ... = m_{n-1} = -1$ مقادیر k–رکورد و برای حالت خاص $k = 1$، مقادیر رکورد به‌دست می آید.

قضیه و نتیجه زیر توسط چن و همکاران [32] [۱۵] و با استفاده از تعریف زیر، اثبات شده است. برای بردار $\mathcal{T} = (\tau_1, ..., \tau_{n-1})$، که در آن برای هر i، τ_i عددی صحیح، $0 \le \tau_i \le i$ و $X_{(0,n,\tilde{m},k)} = 0$ است، بردار $\mathcal{U}(\mathcal{T})$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\mathcal{U}(\mathcal{T}) = \big(X_{(1,n,\tilde{m},k)} \quad , \quad X_{(2,n,\tilde{m},k)} - X_{(\tau_1,n,\tilde{m},k)}$$
$$, \quad ... \quad , \quad X_{(n,n,\tilde{m},k)} - X_{(\tau_{n-1},n,\tilde{m},k)}\big).$$

قضیه ۸ فرض کنید F یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی f باشد. آنگاه چگالی توأم $\mathcal{U}(\mathcal{T})$ لگ–مقعر خواهد بود، اگر یکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

(۱) $k \ge 1$، برای هر $i = 1, ..., n-1$، $m_i \ge 0$، $0 \le \tau_i \le i$ و f لگ–مقعر باشد،

(۲) $k > 0$، برای هر $i = 1, ..., n-1$، $m_i \ge -1$، $0 \le \tau_i \le i$ و $h(x) = f(x)/\bar{F}(x)$ (تابع نرخ خطر) لگ–مقعر باشد.

با استفاده از این قضیه و برقراری همین شرایط آنان نتیجه گرفتند که GOSs قویاً تک‌مدی هستند که کار هوآنگ و گوش را در بر می‌گیرد.

علیمحمدی وعلامت‌ساز [۹] حالت مهم معینی از GOSs و دوگان آن‌ها DGOSs [33] را که بسیاری از مدل‌های مشهور را دربر می‌گیرد در نظر گرفتند و تک‌مدی بودن آن را اثبات کردند. این کار علاوه بر آن‌که کار آلام را نتیجه می‌دهد، ایراد کار باساک و باساک را نیز برطرف می‌کند. برای ارائه این نتایج ابتدا فرض کنید $k \ge 1$ و $m_1 = ... = m_{n-1} = m$ به گونه‌ای باشند که برای $r \in \{1, 2, ..., n-1\}$ داشته باشیم

$$\gamma_r = k + (n-r)(m+1) \ge 1.$$

در این حالت r–امین GOS (DGOS) را با $X_{(r,n,m,k)}$ ($X^d_{(r,n,m,k)}$) نشان می‌دهیم. حال فرض کنید برای $r = 1, ..., n$، $c_{r-1} = \prod_{i=1}^{r}\gamma_j$ و $g_m(x)$، $(m \in R)$، را روی $[0, 1)$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$g_m(x) = \begin{cases} \frac{(1-(1-x)^{m+1})}{m+1}, & m \neq -1 \\ -ln(1-x), & m = -1 \end{cases} . \qquad (6)$$

با توجه به مطالب فوق، چگالی r–امین GOS و DGOS با یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته F، به ترتیب به

[31] Generalized Order Statistics
[32] Chen and et al.
[33] Dual Generalized Order Statistics

صورت زیر به‌دست می‌آید (کمپس [۲۷و۲۶])

$$f_{X_{(r,n,m,k)}}(x)=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}\times(\bar F(x))^{\gamma_r-1}(g_m(F(x)))^{r-1}f(x),\quad x\in R \tag{۷}$$

و

$$f_{X^d_{(r,n,m,k)}}(x)=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}\times(F(x))^{\gamma_r-1}(g_m(\bar F(x)))^{r-1}f(x),\quad x\in R.$$

قضیه ۹ فرض کنید F یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی f باشد. اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه GOS آن تک‌مدی خواهد بود.

(۱) برای $m\geq 0$، $1/f$ محدب باشد،

(۲) برای $m=-1$،

(a) $k=1$ و f در دامنه خود غیرنزولی باشد،

(b) $k>1$، $1/f$ محدب و f در دامنه خود غیر نزولی باشد.

اثبات. (۱) با استفاده از (۷) داریم

$$\begin{aligned}f'_{X_{(r,n,m,k)}}(x)&=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}\\&\times\Big[-(\gamma_r-1)f^2(x)(\bar F(x))^{\gamma_r-2}(g_m(F(x)))^{r-1}\\&+(r-1)f^2(x)(\bar F(x))^m\\&\times(\bar F(x))^{\gamma_r-1}(g_m(F(x)))^{r-2}\\&+f'(x)(\bar F(x))^{\gamma_r-1}(g_m(F(x)))^{r-1}\Big]\\&=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}f^2(x)(g_m(F(x)))^{r-1}(\bar F(x))^{\gamma_r-1}\\&\times\Big[-\frac{(\gamma_r-1)}{\bar F(x)}+\frac{(r-1)}{g_m(F(x))}(\bar F(x))^m+\frac{f'(x)}{f^2(x)}\Big].\end{aligned}\tag{۸}$$

با استفاده از (۶) می بینیم که $g_m(F(x))$ در این حالت غیرنزولی است. حال با توجه به فرض، f'/f^2 غیرصعودی بوده و در نتیجه عبارت داخل کروشه عبارت (۹) نسبت به x غیر صعودی است و عبارت بیرون از کروشه مثبت خواهد بود. بنابراین زمانی که x از $-\infty$ به ∞ تغییر می‌کند، $f'_{X_{(r,n,m,k)}}(x)$ حداکثر یک بار از مثبت به منفی تغییرعلامت می‌دهد و در نتیجه $f_{X_{(r,n,m,k)}}(x)$ تک‌مدی خواهد بود.

(۲) در این حالت تابع چگالی به فرم زیر است

$$f_{X_{(r,n,m,k)}}(x)=\frac{k^r}{(r-1)!}\times(H(x))^{r-1}(\bar F(x))^{k-1}f(x),x\in R,\tag{۹}$$

که $H(x)=-ln(1-F(x))$ تابع نرخ خطر تجمعی است. قابل توجه است که (۱۰) با در نظر گرفتن $k\in N$، در واقع چگالی آماره k–رکورد است. حال با مشتق گرفتن از (۱۰) داریم

$$\begin{aligned}f'_{X_{(r,n,m,k)}}(x)&=\frac{k^n}{(n-1)!}\\&\times(H(x))^{n-1}(\bar F(x))^{k-1}f(x)h(x)\\&\times\Big[-(k-1)+\frac{(n-1)}{H(x)}+\frac{f'(x)}{f^2(x)}\bar F(x)\Big].\end{aligned}$$

با به کار بردن شیوه استفاده‌شده در اثبات قسمت قبل و توجه به این نکته که حاصلضرب دو تابع غیرصعودی مثبت، غیرصعودی است، اثبات کامل می‌شود. البته در حالت $k=1$ دیگر نیازی به شرط تحدب $1/f$ نیست، زیرا چگالی حاصل، حاصلضرب توابع غیرنزولی می شود که تک‌مدی است.□

مثال ۳ توزیع نرمال ازراست بریده‌شده در میانگین خود را در نظر بگیرید. به‌سادگی می‌توان دید که شرایط قسمت (۲) قضیه برقرار است و GOS—هایی که از این توزیع تولید می‌شوند برای $m = -۱$ تک‌مدی خواهند بود. برای قسمت (۱) می‌توان توزیع‌های نرمال، کوشی و حالت‌های خاصی از گاما و وایبل را نام برد. برای مثال‌های بیشتر می‌توان به علیمحمدی وعلامت‌ساز [۹] مراجعه کرد.

مشابه قضیه قبل برای DGOS به صورت زیر است.

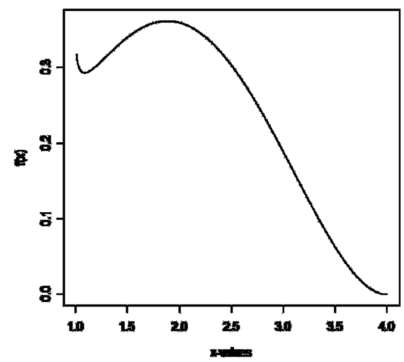
قضیه ۱۰ فرض کنید F یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی f باشد. اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه DGOS آن تک‌مدی خواهد بود.

(۱) برای $m = -۱, m > ۰$، $۱/f$ محدب و f در دامنه خود غیرنزولی باشد،

(۲) برای $m = ۰$، $۱/f$ محدب باشد.

اکنون در تکمیل این نتایج، یک مثال نقض ارائه می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که حتی با برقراری دو شرط تحدب $۱/f$ و غیرنزولی بودن f، DGOS آن برای $m < ۰$ و $m \neq -۱$ می‌تواند تک‌مدی نباشد.

مثال ۴ فرض کنید $n = ۴$، $k = ۰.۷$، $m = -۰.۷$ و $f(x) = x^۲/۲۱$، $۱ \leq x \leq ۴$. بدیهی است که $۱/f$ محدب و f در دامنه خود غیرنزولی است. با این حال، همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌شود، $f_{X_{(۳,۴,-۰.۷,۰.۷)}}(x)$ تک‌مدی نیست.



شکل ۱. تابع چگالی مربوطه در مثال ۴.

شایان ذکر است که اخیراً علیمحمدی وعلامت‌ساز [۱۰] تک‌مدی بودن GOS—ها را بدون محدودیت در مدل اثبات کردند که تمامی کارهای قبلی در این زمینه را به عنوان حالت خاص در بر می‌گیرد.

۵ کاربردها

ابتدا یک کاربرد ساده از قضیه (۱) را بیان می‌کنیم. فرض کنید متغیر تصادفی X، تک‌مدی در M و با میانگین و واریانس به ترتیب μ و $\sigma^۲$ باشد. ابتدا در نظر می‌گیریم $M = ۰$. طبق قضیه (۱)، X با UZ هم‌توزیع است. همچنین فرض کنید Z دارای میانگین ν و واریانس $\tau^۲$ باشد. از آن‌جایی که $E(U) = \frac{۱}{۲}$ و $E(U^۲) = \frac{۱}{۳}$، به سادگی می‌توان دید که $\nu = ۲\mu$ و $\nu^۲ + \tau^۲ = ۳(\mu^۲ + \sigma^۲)$. با حذف ν داریم $\mu^۲ + \tau^۲ = ۳\sigma^۲$ و در نتیجه $\mu^۲ \leq ۳\sigma^۲$. این نامساوی برای حالت کلی با مد M به صورت زیر خواهد بود

$$(\mu - M)^۲ \leq ۳\sigma^۲.$$

این نامساوی توسط جانسون و راجرز[۳۴] [۲۵] ارائه شد. بدیهی است که این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود اگر و فقط اگر Z تباهیده باشد و این یعنی اگر و فقط اگر X یکنواخت باشد.

کاربرد دیگری که در اینجا مطرح می‌کنیم، کاربرد خاصیت قویاً تک‌مدی در مباحث قابلیت اعتماد است. کلاس‌بندی متغیرها (و یا توزیع آنها) در قابلیت اعتماد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از جمله می‌توان به کلاس‌های با تابع نرخ خطر صعودی[۳۵] (IFR) اشاره کرد. قضیه زیر از بارلو و پروشان[۳۶] [۱۱] ارتباط بین خاصیت قویاً تک‌مدی و IFR بودن را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۱ اگر تابع توزیع F دارای چگالی لگ–مقعر (قویاً تک‌مدی) f باشد، آنگاه F، IFR است.

اثبات. برای $t_۲ > t_۱ > ۰$ و $x > ۰$، لگ–مقعر بودن f نتیجه می‌دهد که $\frac{f(t_۱+x)}{f(t_۱)} \geq \frac{f(t_۲+x)}{f(t_۲)}$ و یا

$$f(t_۲)f(t_۱+x) \geq f(t_۱)f(t_۲+x).$$

با انتگرال‌گیری روی $(۰,\infty)$ نسبت به x به‌دست می‌آوریم $f(t_۲)\bar{F}(t_۱) \geq f(t_۱)\bar{F}(t_۲)$. بنابراین $\frac{f(t_۲)}{\bar{F}(t_۲)} \geq \frac{f(t_۱)}{\bar{F}(t_۱)}$ و اثبات تمام است.□

در پایان به این نکته اشاره می‌کنیم که کار آلام [۴] به طور غیرمستقیم نتیجه‌ای درباره تک‌مدی بودن توزیع طول عمر یک سیستم k از n می‌دهد، زیرا چنین سیستمی زمانی از کار می‌افتد که حداقل k جزء آن از کار بیفتد و بنابراین طول عمر آن برابر با آماره ترتیبی k–ام است.

[۳۴] Johnson and Rogers
[۳۵] Increasing Failure Rate
[۳۶] Barlow and Proschan
[۳۷] Sengupta and Nanda
[۳۸] Bagnoli and Bergstrom

برای کاربردهای دیگر این مباحث در قابلیت اعتماد و اقتصاد به ترتیب می‌توان به سن گوپتا و ناندا [۳۷] [۳۳] و باگنولی و برگستروم [۳۸] [۱۳] مراجعه کرد.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

یکی از خواص مهم و مطلوب در نظریه توزیع‌ها خاصیت تک‌مدی توزیع‌ها است که از آن مفاهیم مهم و کاربردی دیگری مانند قویاً تک‌مدی مشتق می‌شود. البته هرکدام از این مفاهیم در حالت گسسته و پیوسته تعابیر مربوط به خود را دارند. در این مباحث، تحدب و لگ– مقعر بودن نقش بسیار اساسی بازی می‌کند و لذا دانستن خواص و رفتارهای ریاضی‌وار این مفاهیم لازم و ضروری است. همچنین بر اساس خواص تک‌مدی می توان مشخصه‌سازی هایی را برای توزیع‌ها ارائه داد. بررسی این مفاهیم در توزیع متغیرهای تصادفی مرتب‌شده از اهمیت ویژه‌ای برخودار است و در چند دهه اخیر منجر به تولید نتایج مفید و متعددی در این زمینه شده است. در این مقاله علاوه بر بیان این مباحث، با یک مثال نقض نشان دادیم که خاصیت تک‌مدی در این مدل‌های ترتیبی، برای همه مقادیر پارامترها می‌تواند به خوبی عمل نکند. در پایان لازم است اشاره کنیم که خواص تک‌مدی و تحدب، علاوه بر کاربرد در شاخه های مختلف آمار و احتمال، در مباحث بهینه‌سازی، اقتصاد و حتی مهندسی کاربرد بسیاری دارند.

مراجع

[1] Abouammoh, A.M. (1987), On discrete α-unimodality, *Statistica Neerlandica*, 41, 239-244.

[2] Abouammoh, A.M. (1988), Corretion to 'On discrete α-unimodality', *Statistica Neerlandica*, 42, 141.

[3] Aghababaie, M. and Alamatsaz, M.H. (2011), Two new thinning operators and their applications, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, preprint.

[4] Alam, K. (1972), Unimodality of the distribution of an order statistic, *The Annals of Mathematical Statistics*, 43, 2041-2044.

[5] Alamatsaz, M.H. (1983), On structural aspects of probability distributions and their mixtures with applications in queuing theory, Ph.D. Thesis, University of Sheffield, Sheffield.

[6] Alamatsaz, M.H. (1990), On modality and divisibility of Poisson and binomial mixtures, *J. Sci. I.R. Iran*, 3, 202-207.

[7] Alamatsaz, M.H. (1993), On discrete α-unimodal distributions, *Statistica Neerlandica*, 47, 245-252.

[8] Aliev, F.A. (2003), A comment on 'Unimodality of the distribution of record statistics', *Statistics and Probability Letters*, 64, 39-40.

[9] Alimohammadi, M. and Alamatsaz, M.H. (2010), On unimodality of generalized order statistics and their dual, *Proceedings of the 10^{th} Iranian Statistics Conference*, 41-48.

[10] Alimohammadi, M. and Alamatsaz, M.H. (2011), Some new results on unimodality of generalized order statistics and their spacings, *Statistics and Probability Letters*, 81, 1677-1682.

[11] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

[12] Basak, P. and Basak, I. (2002), Unimodality of the distribution of record statistics, *Statistics and Probability Letters*, 56, 395-398.

[13] Bagnoli, M. and Bergstrom, T. (2005), Log-concave probability and its applications, *Economic Theory*, 26, 445-469.

[14] Burkschat, M., Cramer, E. and Kamps, U. (2003), Dual generalized order statistics, *Metron*, 61, 13-26.

[15] Chen, H., Xie, H. and Hu, T. (2009), Log-concavity of generalized order statistics, *Statistics and Probability Letters*, 79, 396-399.

[16] Cramer, E. (2004), Logconcavity and unimodality of progressively censored order statistics, *Statistics and Probability Letters*, 68, 83-90.

[17] Cramer, E., Kamps, U. and Rychlik, T. (2004), Unimodality of uniform generalized order statistics, with applications to mean bounds, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 56, 183-192.

[18] Cuculescu, I. and Theodorescu, R. (1998), Multiplicative strong unimodality, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 40, 205-214.

[19] Dharmadhikari, S. and Joag-Dev, K. (1988), *Unimodality, Convexity, and Applications*, Academic Press, Boston.

[20] Feller, W. (1971), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 2., 2nd Ed., Wiley, New York.

[21] Gnedenko, B.V. and Kolmogorov, A.N. (1954), *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addision-Wesley, Cambridge, Massachusetts.

[22] Holgate, P. (1970), The modality of some compound Poisson distributions, *Biometrika*, 57, 666-667.

[23] Huang, J.S. and Ghosh, M. (1982), A note on strong unimodality of order statistics, *Journal of the American Statistical Association*, 77, 929-930.

[24] Ibragimov, I.A. (1956), On the composition of unimodal distributions, *Theory of Probability and Its Application*, 1, 255-260.

[25] Johnson, N.L. and Rogers, C.A. (1951), The moment problem for unimodal distributions, *The Annals of Mathematical Statistics*, 22, 432-439.

[26] Kamps, U. (1995a), *A Concept of Generalized Order Statistics*, Teubner, Stuttgart.

[27] Kamps, U. (1995b), A concept of generalized order statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 48, 1-23.

[28] Keilson, J and Gerber, H. (1971), Some results for discrete unimodality, *Journal of the American Statistical Association*, 66, 386- 389.

[29] Khintchine, A.Y. (1938), On unimodal distributions, *Izv. Nauchno-lssled. Inst. Math. Mech. Tomsk. Gos. Univ.* 2, 1-7.

[30] Klaassen, C.A.J. (1985), Strong unimodality, *Advances in applied probability*, 17, 905-907.

[31] Medgyessy, P. (1972), On the unimodality of discrete distributions, *Period. Math. Hungar.* 2, 245-257.

[32] Olshen, R.A. and Savage, L.J. (1970). A generalized unimodality, *Journal of Applied Probability*, 7, 21-34.

[33] Sengupta, D. and Nanda, A.K. (1999), Log-concave and concave distributions in reliability, *Naval Research Logistics*, 46, 419-433.

[34] Shepp, L.A. (1962), Symmetric random walk, *Trans. Amer. Math. Soc.* 104, 144-153.

[35] Steutel, F.W. (1988), Note on discrete α-unimodality, *Statistica Neerlandica*, 48, 137-140.

[36] Steutel, F.W. and van Harn, K. (1979), Discrete analogues of self-decomposability and stability, *Annals of Probability*, 7, 893-899.

[37] Wintner, A. (1938), *Asymptotic Distributions and Infinite Convolutions*, Edwards Brothers, Ann Arbor, Michigan.