طرح‌های ابراشباع شده‌ی ۲^m با ملاک $E(S^۲)$

فریده محمدی‌نیا[۱]

چکیده:

در طرح‌های فاکتوریل ۲^m، برای صرفه‌جویی در تعداد اجراها، از کسری از اجراهای طرح عاملی برای آزمون معنی‌داری اثرات استفاده می‌شود. در مرحله‌ی غربال‌سازی که تعداد عامل‌ها زیاد هستند از طرح‌های کسری اثرات اصلی استفاده می‌کنند. برای صرفه‌جویی بیشتر و با توجه به اصل تُنُک بودن عامل‌های فعال، طرح‌های ابراشباع شده پیشنهاد شدند. در این مقاله طرح‌های ابراشباع شده و ملاک $E(S^۲)$ به عنوان معیار بهینگی برای طرح‌های ابراشباع شده‌ی دو—سطحی معرفی می‌شوند. سپس به منظور تعیین مطلوبیت این طرح‌ها، کران پایین برای $E(S^۲)$ ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: طرح ابراشباع شده، کران پایین، ملاک $E(S^۲)$.

۱ مقدمه

در بسیاری از صنایع عوامل متعددی روی عملکرد فرایند تولید یک محصول اثر دارند. برای یک تولیدکننده لازم است که عوامل مؤثر بر کیفیت محصول را شناسایی کرده و با انتخاب سطوح مناسبی از آن‌ها موجب افزایش کیفیت محصول گردد. با فرض وجود m عامل مرتبط با تولید یک محصول، با ارائه‌ی طرحی مناسب شامل n اجرا، می‌توان عوامل مؤثر را شناسایی نمود. چنین آزمایش‌هایی که با هدف غربال کردن عوامل مؤثر انجام می‌گیرد به آزمایش‌های غربال‌ساز [۲] موسوم هستند. ارائه‌ی یک مدل برای تحلیل نتایج یک آزمایش ضروری است. بسیاری از آزمایش‌ها برای انجام اجراهای مکرر، با محدودیت هزینه، زمان یا امکانات مواجه هستند، از این رو در چنین آزمایش‌هایی تنها قادر به انجام تعداد محدودی از اجراها هستیم. در چنین شرایطی می‌توان مدل مرتبه اول [۳] را در نظر گرفت. یک مدل را مرتبه اول گویند هرگاه ماتریس مدل [۴] تنها شامل اثرات اصلی باشد. در این مدل، اثرات متقابل دو—عاملی و بالاتر ناچیز فرض می‌شوند. این فرض براساس اصل سلسله مراتبی [۵] بودن اثرات است. مطابق این اصل اثرات اصلی مهم‌تر از اثرات متقابل، اثرات متقابل درجه پایین‌تر مهم‌تر از درجات بالاتر و اثرات متقابل هم‌درجه از اهمیت یکسانی برخوردار هستند. با فرض برقراری رابطه‌ی $n > m$، برآورد هم‌زمان اثرات اصلی امکان‌پذیر است. حال شرایطی را فرض کنید که $n \leq m$ باشد. در این شرایط با استناد بر اصل تنک

[۱] کارشناسی ارشد آمار ریاضی، دانشگاه اصفهان
[۲] Screening Expriments
[۳] First-Order
[۴] Model Mmatrix
[۵] Hierarchical Ordering

بودن اثرات [6] مجدداً می‌توان مدل را کاهش داد و تنها عامل‌های مؤثر را در نظر گرفت. اصل تنک بودن اثرات به این معنی است که از میان عامل‌هایی که تعدادشان زیاد است تنها تعداد کمی از آن‌ها هم‌زمان حقیقتاً بر روی متغیر پاسخ مؤثر هستند و بقیه عامل‌ها تأثیر معنی‌داری ندارند. با فرض وجود f عامل مؤثر از میان m عامل، به منظور برآورد اثرات اصلی مربوط به عامل‌های مؤثر و انتخاب طرح مناسب، برقراری شرط $n > f$، یک شرط لازم است. بنابراین هدف یافتن ماتریس طرح X با n اجرا و m عامل به گونه‌ای است که پس از شناسایی f عامل اصلی مؤثر، مدلی با ویژگی‌های مطلوب به‌دست آید. ماتریس طرح X که متناسب با حالت $n = m$ در نظر گرفته می‌شود را یک طرح اشباع شده [7] و ماتریس طرح متناسب با حالت $n < m$ را یک طرح ابراشباع شده [8] می‌نامند. برای بررسی میزان مطلوبیت یک طرح، لازم است از معیاری که بر اساس آن طرح بهینه شناسایی شود، استفاده کنیم. معیارهای متفاوتی متناسب با تعاریف گوناگون از یک طرح مطلوب می‌توان ارائه نمود. معیار مناسب متناسب با هدف آزمایش و فرضیات موجود، انتخاب می‌شود. یکی از معیارهای منتخب که با فرض دو—سطحی بودن هر یک از عوامل و فرض وجود دو عامل مؤثر از میان سایر عامل‌ها در نظر گرفته می‌شود، ملاک $E(S^2)$ است. کمینه کردن ملاک $E(S^2)$، معادل با کمینه کردن حجم بیضی‌گون حاصل از ناحیه اطمینان ضرایب است. از میان طرح‌های ابراشباع شده‌ی ممکنی که براساس تعداد اجرا و عامل مشخص ساخته می‌شوند، طرحی که دارای کمترین مقدار $E(S^2)$ است را یک طرح $E(S^2)$—بهینه می‌نامند. تعداد طرح‌های ابراشباع شده‌ی ممکنی که به ازای تعداد اجرا و عامل مشخص می‌توان ساخت بسیار زیاد است. به همین دلیل یافتن طرح $E(S^2)$—بهینه و یا مقدار بهینگی به سادگی امکان‌پذیر نیست. از این رو بحث ارائه‌ی کران پایین برای $E(S^2)$ مطرح می‌شود که متناسب با تعداد اجراها و تعداد عامل‌ها است. ارائه‌ی کران برای $E(S^2)$ به تفکیک تعداد اجرای زوج و فرد در مقالات مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. ارائه‌ی کران برای اولین بار به ازای تعداد اجرای زوج توسط نوین[۱۸] و تانگ و وو[۲۲] و به ازای تعداد اجرای فرد توسط نوین و چنگ[۱۹] ارائه شد. پس از آن پژوهشگران سعی بر اصلاح کران نمودند به طوری که قابل دسترس باشد. به عبارت دیگر تلاش پژوهشگران در راستای ارائه‌ی کران پایینی برای $E(S^2)$ بود که هر طرح ابراشباع شده‌ی ممکن دارای مقدار $E(S^2)$ بزرگ‌تر یا مساوی با آن باشد و البته بتوان طرحی را یافت که مقدار $E(S^2)$ آن برابر با کران ارائه شده گردد. چنین کرانی را کران قابل دستیابی می‌نامند. از جمله مقالاتی که در زمینه‌ی اصلاح کران $E(S^2)$ ارائه شده است می‌توان به لیو و ژانگ[۱۶]، باتلر و همکاران[۶]، بالاتواغلو و چنگ[۲]، رایان و بالاتواغلو[۲۰]، داس و همکاران[۹]، بالاتواغلو و رایان[۳] و سوئن و داس[۲۱] اشاره داشت. پژوهشگران هم‌چنین روش‌های مختلفی را برای ساختن طرح‌های ابراشباع شده‌ی $E(S^2)$—بهینه پیشنهاد کرده‌اند. انواع روش‌های ارائه شده را می‌توان

[6] Effects Sparisity
[7] Saturated Design
[8] Super Saturated Design

به دو قسمت کلی روش‌های سیستماتیک و روش‌های الگوریتمی تقسیم نمود. در روش سیستماتیک ابتدا طرح‌های مشخصی مانند طرح‌های هادامارد [۹] یا طرح‌های بلوکی ناقص [۱۰] در نظر گرفته می‌شود و سپس با در نظر گرفتن قواعدی تعیین شده، ماتریس مطلوب حاصل می‌گردد. این قواعد که شامل حذف یا اضافه کردن ستون و یا ترکیب ماتریس‌های مختلف است با هدف بهینه نمودن طرح، وضع می‌شود. در روش‌های الگوریتمی با استفاده از روش‌های جستجو و برنامه نویسی، یافتن طرح‌های ابراشباع شده‌ی بهینه را پی‌گیری می‌کنند. از جمله مقالاتی که با استفاده از انواع روش‌های سیستماتیک، ساختن طرح را مورد بررسی قرار داده‌اند می‌توان به مقالات لین[۱۵]، داس و همکاران[۹]، سوئن و داس[۲۱]، تانگ و وو[۲۲]، لو و منگ[۱۷]، وو[۲۳]، نوین و چنگ[۱۹]، نوین[۱۸]، لیو و ژانگ[۱٦]، بالاتواغلو و چنگ[۲]، رایان و بالاتواغلو[۲۰]، جرجیو[۱۰]، باتلر و همکاران[٦]، باتلر[۴] و باتلر[۵] اشاره کرد. در مقالاتی چون لی و وو[۱۴]، نوین[۱۸]، بالاتواغلو و رایان[۳]، رایان و بالاتواغلو[۲۰]، کلا و همکاران[۷]، کوکووینوس و همکاران[۱۲] و کوکووینوس و همکاران[۱۳]، نیز ساختن طرح‌های بهینه و نزدیک به آن، به روش الگوریتمی ارائه شده است. در این مقاله به طور کلی مفاهیم بنیادی و اولیه مرتبط با طرح‌های ابراشباع شده ارائه می‌شود. مقاله حاضر به شکل زیر تنظیم شده است.

در بخش های ۱.۲ و ۲.۲ به ترتیب طرح های ابراشباع شده و ملاک بهینگی $E(S^2)$ معرفی می‌شوند. در بخش سوم درباره‌ی کران $E(S^2)$ و اصلاح آن بحث می‌شود. در بخش چهارم نیز با ارائه‌ی یک مثال برای حالت $(n,m)=(9,18)$ طرح ابراشباع شده‌ی $E(S^2)$–بهینه را ارائه می‌کنیم.

۲ طرح‌های ابراشباع شده و ملاک بهینگی $E(S^2)$

۱.۲ طرح‌های ابراشباع شده

طرح ابراشباع شده یکی از انواع طرح‌های آزمایش است. همان‌گونه که در بخش مقدمه نیز به آن اشاره شد، طرح‌های ابر اشباع شده طرح‌هایی شامل n اجرا و m عامل هستند به طوری که در آن‌ها $n<m$ است. برای ارائه‌ی یک طرح از ماتریس طرح [۱۱] استفاده می‌شود. یک ماتریس طرح، ماتریسی $n\times m$ است که در آن n تعداد اجراها و m تعداد عامل‌های مرتبط هستند. درایه‌های ماتریس، سطوح عوامل در اجراهای مختلف را مشخص می‌سازد. طرح‌های ابراشباع شده براساس تعداد سطوحی که برای هر عامل در نظر گرفته می‌شود به سه شاخه‌ی طرح‌های دو–سطحی [۱۲]، چند–سطحی [۱۳] و چند–سطحی مخلوط [۱۴] تفکیک می‌گردند. در حالت

[۹] Hadamard Design
[۱۰] Incomplete Block
[۱۱] Design Matrix
[۱۲] Two Level
[۱۳] Multi Level
[۱۴] Mixed Level

دو–سطحی همه‌ی عامل‌ها شامل دو سطح هستند. در این حالت برای مشخص کردن سطوح عامل‌ها از نمادهای + و − که معادل با مقادیر ۱+ و ۱− هستند، استفاده می‌شود. دو اصلی که برای ساختن طرح‌های ابراشباع شده‌ی دو–سطحی باید در نظر گرفت به قرار زیر است:

۱) متعادل بودن طرح که به معنی برابری تعداد + ها و − ها در هر یک از ستون‌های ماتریس طرح است. در طرح‌های با تعداد اجرای فرد که برابری + ها و − ها در هر ستون امکان‌پذیر نیست، بایستی اختلاف تعداد + ها و − ها در هر ستون برابر یک شود. طرح‌هایی که ویژگی مذکور را داشته باشند در حالت تعداد اجرای زوج، طرح‌های متعادل [۱۵] و در حالت تعداد اجرای فرد، طرح‌های نزدیک به متعادل [۱۶] نامیده می‌شوند.

۲) هیچ دو ستونی از ماتریس طرح به طور کامل مشابه یا قرینه‌ی یکدیگر نشوند. به عبارت دیگر هیچ یک از اثرات اصلی با یکدیگر کاملاً هم‌اثر [۱۷] نگردند. در صورتی‌که دو اثر کاملاً هم‌اثر شوند، جداسازی برآورد آن‌ها امکان‌پذیر نیست. در مقابل هم‌اثری کامل، تعامد دو اثر مطرح می‌شود که امکان برآورد کاملاً موجه عامل را فراهم می‌سازد.

قابل توجه است که حداکثر ستون ممکنی که به ازای n اجرا با در نظر گرفتن دو اصل فوق می‌توان ساخت برابر با $\binom{2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor-1}{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor-1}$ ستون است. به عبارت دیگر ساختن یک طرح ابراشباع شده شامل n اجرا، معادل با انتخاب m ستون از M ستون ممکن است که البته هر ستون می‌تواند با ستون قرینه‌ی خود نیز جایگزین گردد. به این ترتیب تعداد طرح‌های ابراشباع شده‌ی ممکن به ازای n اجرا و m عامل برابر با $2^m\binom{M}{m}$ است.

۲.۲ ملاک بهینگی $E(S^2)$

در ساختن معیار برای سنجش بهینگی یک طرح ابتدا باید منظور از بهینگی تعیین شود. مناسب بودن یک طرح از زوایای مختلف قابل بررسی است که در این‌جا تنها به حالتی خاص اشاره می‌شود و معیار متناظر با آن ارائه می‌گردد.

مدل خطی استاندارد را براساس اثرات اصلی f عامل مؤثر، به صورت رابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$\boldsymbol{y}=X^{(f)}\boldsymbol{b}^{(f)}+\boldsymbol{e} \qquad (1)$$

که در آن $X^{(f)}$، ماتریس مدل $n\times f$ شامل اثرات اصلی f عامل موثر است. $\boldsymbol{b}^{(f)}$، بردار پارامترها یا ضرایب رگرسیونی مدل به صورت مجهول بوده و بردار $\boldsymbol{e}$ خطاهای ناهمبسته تصادفی با میانگین صفر و واریانس همگون σ^2 است. بردار ضرایب رگرسیونی مجهول $\boldsymbol{b}^{(f)}$، براساس روش حداقل مربعات خطا به صورت زیر برآورد می‌شوند:

$$\hat{\boldsymbol{b}}^{(f)}=\left(X^{(f)'}X^{(f)}\right)^{-1}X^{(f)'}\boldsymbol{y}.$$

با در نظر گرفتن توزیع نرمال با میانگین $\mathbf{O}$ و واریانس $\sigma^2 I_n$ برای $\boldsymbol{e}$، برآوردگر $\hat{\boldsymbol{b}}^{(f)}$ نااریب و دارای حداقل

---

[۱۵] Balance desgin or Mean orthogonal

[۱۶] Near balance design or Near mean orthogonal

[۱۷] Fully-Alliased

واریانس نسبت به سایر برآوردگرهای نااریب می‌گردد. بدون از دست دادن کلیت، مقدار $\sigma^{۲}$ را برابر یک در نظر می‌گیریم. ماتریس کوواریانس $\hat{\boldsymbol{b}}^{(f)}$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$Cov(\hat{b}^{(f)}) = (X^{(f)'}X^{(f)})^{-۱}. \qquad (۲)$$

حجم بیضی‌گون ناحیه اطمینان [۱۸] ضرایب را می‌توان به عنوان معیار بهینگی مدل در نظر گرفت. هِردیا—لانگنر[۱۹] و همکاران[۱۱] اثبات کرده‌اند که کمینه کردن حجم بیضی‌گون حاصل از ناحیه اطمینان ضرایب یا به عبارت دیگر بیشینه کردن بهینگی مدل، معادل با بیشینه کردن مقدار $|X^{(f)'}X^{(f)}|$ است.

براساس رابطه‌ی ۲، ماتریس $X^{(f)'}X^{(f)}$، ماتریس وارون کواریانس یا ماتریس اطلاع $\hat{b}^{(f)}$ است.

لازم به ذکر است که در ارائه‌ی طرح‌های ابراشباع شده، عامل‌های موثر بر متغیر پاسخ از ابتدا مشخص نیستند بنابراین مطلوب است که به ازای هر f عاملی که امکان انتخاب شدن به عنوان عامل موثر را دارند، مدل بهینه به‌دست آید. طبق اصل تنک بودن اثرات، فرض می‌شود که تعداد عوامل موثر برابر با دو باشد. تعداد حالت‌های ممکن برای موثر شدن دو عامل از میان m عامل برابر با $\binom{m}{۲}$ است. میانگین مقادیر $|X^{(۲)'}X^{(۲)}|$ را که از انتخاب‌های مختلف دو عامل به عنوان عامل موثر به‌دست می‌آید، می‌توان به عنوان ملاک بهینگی یک طرح ابراشباع شده معرفی کرد. ماتریس $X'X$ را که در آن X، ماتریس طرح ابراشباع شده است، تشکیل دهید. درایه‌های ماتریس $X'X$ با s_{ij} نمایش داده می‌شوند به طوری که s_{ij} درایه‌ی مربوط به سطر i و ستون j در ماتریس $X'X$ است. بطور دقیق‌تر مقادیر s_{ij} از ضرب داخلی بردارهای x_i و x_j به‌دست می‌آیند به طوری که بردارهای x_i و x_j به ترتیب ستون‌های i و j در ماتریس X را تشکیل می‌دهند و نشان‌دهنده‌ی سطوحی از عوامل i و j هستند که در n اجرا در نظر گرفته می‌شوند.

فرض کنید دو عامل x_i و x_j به عنوان عوامل موثر انتخاب شوند، در این صورت خواهیم داشت:

$$X^{(۲)'}X^{(۲)} = (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)'(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i & \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_j \\ \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_i & \boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & s_{ij} \\ s_{ij} & n \end{pmatrix}.$$

لذا در حالت کلی با فرض وجود دو عامل مؤثر، ملاک بهینگی یک طرح ابراشباع شده به صورت زیر خواهد بود:

$$D_{۲} = \frac{\sum_{k=۱}^{\binom{m}{۲}} \mid X_{(k)}^{(۲)'}X_{(k)}^{(۲)} \mid}{\binom{m}{۲}} = \frac{\sum_{i,j=۱(i<j)}^{m}(n^{۲} - s_{ij}^{۲})}{\binom{m}{۲}} = n^{۲} - \frac{\sum_{i,j=۱(i<j)}^{m} s_{ij}^{۲}}{\binom{m}{۲}} \qquad (۳)$$

بیشینه شدن رابطه‌ی ۳ معادل با کمینه شدن رابطه‌ی زیر است:

$$E(S^{۲}) = \frac{\sum_{i,j=۱(i<j)}^{m} s_{ij}^{۲}}{\binom{m}{۲}}. \qquad (۴)$$

که آن را معیار $E(S^{۲})$ نامیده‌اند. معیار $E(S^{۲})$ توسط بوث و کاکس[۱] معرفی شد و برای حالت $f = ۲$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. $E(S^{۲})$ مقادیر بین صفر تا $n^{۲}$ را

[۱۸] Confidence region
[۱۹] Heredia-Langner

اختیار می‌کند. هر اندازه مقدار $E(S^۲)$ به صفر نزدیک‌تر شود نشان‌دهنده‌ی افزایش مطلوبیت طرح می‌باشد. در طرح‌های متعامد مقدار $E(S^۲)$ برابر با صفر است و از این رو $E(S^۲)$ را به عنوان معیار انحراف از تعامد یک طرح نیز معرفی می‌کنند.

۳ کران معیار

اگر برای طرح‌های ابراشباع شده‌ای که براساس m و n مشخص ساخته می‌شوند، مقدار $E(S^۲)$ محاسبه شود، آن‌گاه طرحی که دارای کمترین $E(S^۲)$ باشد، به عنوان طرح $E(S^۲)$–بهینه معرفی می‌شود. مقدار $E(S^۲)$ مربوط به این طرح، بهترین کران برای $E(S^۲)$، متناسب با m و n است به طوری که مقدار $E(S^۲)$ مربوط به سایر طرح‌ها همواره از این مقدار بیشتر هستند. اما نکته‌ی قابل توجه این است که یافتن کران و طرح بهینه به سادگی امکان‌پذیر نیست. از ویژگی طرح‌های ابراشباع شده وجود تعداد عامل‌های زیاد در مقایسه با تعداد اجراها است که منتج به فراوانی تعداد طرح‌های ممکن، برای m و n مشخص، می‌شود. ساده‌ترین و ابتدایی‌ترین کران برای $E(S^۲)$ در حالتی که n زوج باشد، اولین بار توسط نوین[۱۸] و تانگ و وو[۲۲] مطرح شد که به صورت زیر است:

قضیه ۱ (نوین[۱۸] و تانگ و وو[۲۲]) اگر X ماتریس طرح شامل n سطر (n عدد صحیح زوج است) و m ستون باشد به طوری که درایه‌های آن تنها شامل ۱− و ۱+ باشد و هر یک از ستون‌های ماتریس متعادل باشند، آن‌گاه داریم:

$$E(S^۲) \geq \frac{n^۲(m-n+۱)}{(n-۱)(m-۱)}. \qquad (۵)$$

هم‌چنین اگر ماتریس $X'X$ به صورت رابطه‌ی زیر باشد:

$$X'X = (m-x)I_n + xJ_n, \qquad (٦)$$

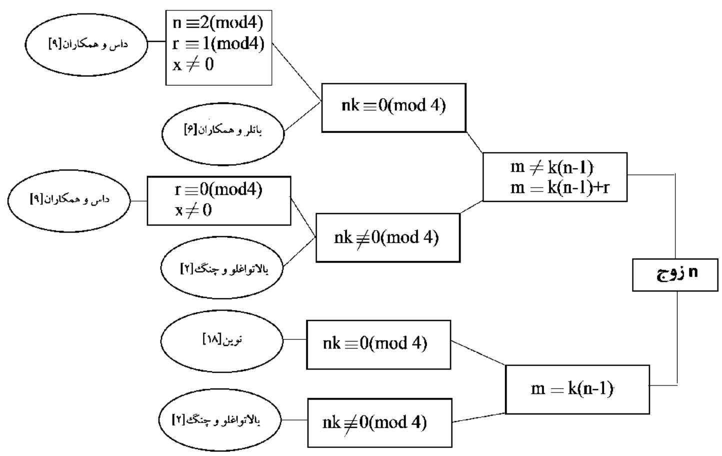
که در آن x برابر با $-m/(n-۱)$ است آن‌گاه نابرابری ۵ به تساوی تبدیل می‌شود.
[برای مشاهده اثبات ضمیمه را ببینید.]

با توجه به برابری درایه‌های غیر قطری ماتریس $X'X$ با مقدار $-m/(n-۱)$ که باعث تبدیل شدن رابطه‌ی ۵ به تساوی می‌شود و این واقعیت که درایه‌های ماتریس $X'X$ را اعداد صحیح تشکیل می‌دهند، لذا برابری m با عددی که مضربی از $n-۱$ باشد به عنوان یک شرط لازم برای دست‌یابی به کران رابطه‌ی ۵ تعیین می‌شود. چنگ[۸] با ارائه‌ی قضیه ۲، شرط لازم دیگری را برای حصول کران رابطه ۵ ارائه نمود. اثبات این قضیه نیاز به ذکر و اثبات یک لم دارد. این لم و اثبات آن همراه با اثبات قضیه که در منبع اصلی ذکر نشده را در ضمیمه‌ی این مقاله ارائه نموده‌ایم.

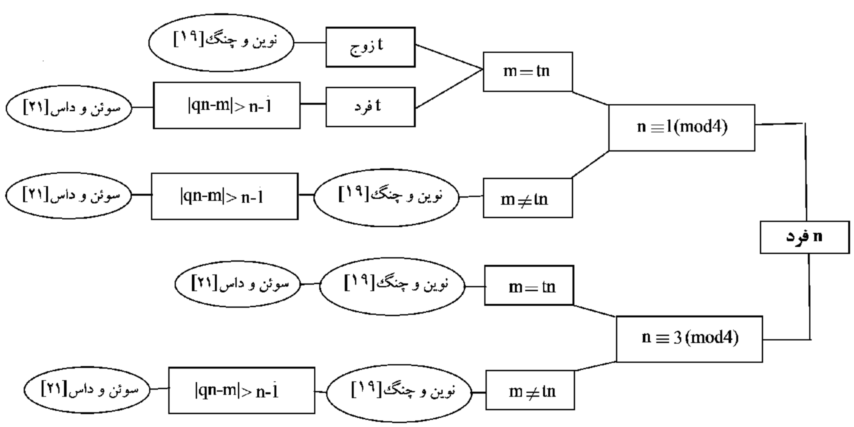
قضیه ۲ (چنگ[۸]): نابرابری رابطه ۵ به برابری تبدیل می‌شود اگر و تنها اگر $m = k(n-۱)$ و هر دو سطر از ماتریس $\widetilde{X}$ متعامد باشند که ماتریس $\widetilde{X}$ از اضافه کردن k ستون $\mathbf{1}$ به ابتدای ماتریس X و نرمال کردن آن حاصل می‌شود.
[برای مشاهده اثبات ضمیمه را ببینید.]

کران مذکور به تدریج اصلاح شد. در هر کران جدیدی که ارائه می‌گردید، کران قبلی در موارد قابل دستیابی تأیید

می‌شد و در موارد دیگر کران بهبود می‌یافت. برای تعداد اجرای فرد نیز کرانی اولیه توسط نوین و چنگ[۱۹] ارائه شد. برای شفاف‌تر شدن روند توسعه‌ی این تحقیقات، مطالب به صورت گرافیکی در شکل‌های ۱ و ۲ نمایش داده شده است که شامل موارد اصلاح کران و مقالات مربوط به آن‌ها می‌باشد.



شکل ۱. موارد اصلاح کران برای تعداد اجرای زوج .



شکل ۲. موارد اصلاح کران برای تعداد اجرای فرد.

۴ مثال

در تحقیقی هدف بررسی عوامل مؤثر بر روی حفظ انرژی حرارتی در بنای ساختمان می‌باشد. ۱۸ عامل دو—سطحی وجود دارد که از نظر محقق می‌تواند به عنوان عوامل مرتبط در حفظ انرژی حرارتی در نظر گرفته شود. این عامل‌ها به قرار زیر هستند:

عایق دیوار (R_1 یا R_2)، عایق بام ($R_{2/5}$ یا $R_{3/5}$)، عایق کف (R_0 یا R_1)، نوع کف (چوب یا بتن)، نوع دیوار (آجر روکار یا دو جداره)، شیشه‌های شمالی (۵٪ یا ۲۰٪)، شیشه‌های شرقی (۵٪ یا ۱۵٪)، شیشه‌های غربی (۵٪ یا ۱۵٪)، شیشه‌های جنوبی (۵٪ یا ۱۵٪)، پرده‌های شرقی (وجود یا عدم وجود)، پرده‌های غربی (وجود یا عدم وجود)، پرده‌های جنوبی (وجود یا عدم وجود)، جلوآمدگی بام از طرف شمال (۲۰٪ یا ۱۰۰٪)، جلوآمدگی بام از طرف شرق (۲۰٪ یا ۷۰٪)، جلوآمدگی بام از طرف غرب (۲۰٪ یا ۷۰٪)، جلوآمدگی بام از طرف جنوب (۲۰٪ یا ۱۰۰٪)، موقعیت ساختمان ۱ (شمال یا جنوب)، موقعیت ساختمان ۲ (شرق یا غرب). با توجه به امکانات موجود تنها امکان ساختن ۹ ساختمان وجود دارد. هم‌چنین برای قابل مقایسه بودن قیمت ساختمان‌ها محقق می‌خواهد که در هر یک از آن‌ها ۹ عامل در سطح پایین و ۹ عامل در سطح بالا باشد.

با فرض برقراری دو اصل سلسله مراتبی و اصل تنک بودن اثرات می‌توان معنی‌دار نبودن اثرات متقابل و معنی‌دار بودن تنها دو اثر به طور هم‌زمان را فرض کرد. بنابراین هدف یافتن ماتریس طرح ابراشباع شده‌ی $E(S^2)$—بهینه شامل ۹ اجرا و ۱۸ عامل است که البته با توجه به در نظر گرفتن هر ساختمان به عنوان یک سطر از ماتریس و قابل مقایسه بودن قیمت ساختمان‌ها براساس درخواست محقق، لازم است که تعداد سطوح مثبت و منفی در هر سطر ماتریس نیز برابر باشد. برای چنین حالتی روشی براساس استفاده از ماتریس وقوع $BIBD$ های دوری توسط نوین و چنگ[۱۸] ارائه شده است. ماتریس براساس $BIBD$ مرتبط با آن ساخته می‌شود. به طوری که اگر در $BIBD$، تیمار i در بلوک j واقع شود آن‌گاه درایه‌ی سطر i و ستون j در ماتریس وقوع، مقدار یک را می‌پذیرد و در غیر این‌صورت برابر با صفر می‌گردد. در این روش یک ماتریس ۱۸ × ۹ براساس چرخش دو بردار مولد $(+-++----+)$ و $(++-+-+---)$ به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$
\begin{pmatrix}
+ & + & - & - & - & - & + & + & - & + & - & - & - & + & - & + & - & + \\
- & + & + & - & - & - & - & + & + & + & + & - & - & - & + & - & + & - \\
+ & - & + & + & - & - & - & - & + & - & + & + & - & - & - & + & - & + \\
+ & + & - & + & + & - & - & - & - & + & - & + & + & - & - & - & + & - \\
- & + & + & - & + & + & - & - & - & - & + & - & + & + & - & - & - & + \\
- & - & + & + & - & + & + & - & - & + & - & + & - & + & + & - & - & - \\
- & - & - & + & + & - & + & + & - & - & + & - & + & - & + & + & - & - \\
- & - & - & - & + & + & - & + & + & - & - & + & - & + & - & + & + & - \\
+ & - & - & - & - & + & + & - & + & - & - & - & + & - & + & - & + & +
\end{pmatrix}
$$

به طور مثال براساس ماتریس طرح ارائه شده اولین ساختمانی که ساخته می‌شود باید دارای شرایطی به این صورت باشد: عایق دیوار(R_{2})، عایق بام ($R_{3/5}$)، عایق کف (R_{0})، نوع کف (چوب)، نوع دیوار (آجر روکار)، شیشه‌های شمالی (۵٪)، شیشه‌های شرقی (۱۵٪)، شیشه‌های غربی (۱۵٪)، شیشه‌های جنوبی (۵٪)، پرده‌های شرقی (وجود)، پرده‌های غربی (عدم وجود)، پرده‌های جنوبی (عدم وجود)، جلوآمدگی بام از طرف شمال (۲۰٪)، جلوآمدگی بام از طرف شرق (۷۰٪)، جلوآمدگی بام از طرف غرب (۲۰٪)، جلوآمدگی بام از طرف جنوب (۱۰۰٪)، موقعیت خانه ۱ (جنوب)، موقعیت خانه ۲ (شرق).

مقدار $E(S^{2})$ مربوط به ماتریس طرح حاصل برابر ۵/۷۰ است و برابر با کران پایین ارائه شده برای $E(S^{2})$ ($E(S^{2}) \geq \frac{m(n^{2}+n-1)-n^{3}}{n(m-1)}$) به ازای ۹ اجرا و ۱۸ عامل می‌شود. در نتیجه طرح به‌دست آمده بهینه می‌باشد.

۵ ضمیمه (اثبات قضایا)

برای اثبات قضیه ۱ نیاز به تعریف و لم های زیر داریم:

تعریف ۱ مجموع مربعات همه‌ی درایه‌های ماتریس M با$SS(M)$ نمایش داده می‌شود.

لم ۱ اگر $\zeta_{1},\zeta_{2},\dots,\zeta_{\nu} \in R$، متغیرهایی تحت قید $\sum_{l=1}^{\nu}\zeta_{l}=\varpi$ باشند، آن‌گاه کمینه‌ی مقدار $\sum_{l=1}^{\nu}\zeta_{l}^{2}$ برابر با ϖ^{2}/n خواهد بود که به ازای در نظر گرفتن $\zeta_{1}=\zeta_{2}=\cdots=\zeta_{\nu}=\varpi/\nu$ به‌دست می آید.

اثبات : با توجه به قید $\sum_{l=1}^{\nu}\zeta_{l}=\varpi$، می‌توان ζ_{ν} را به شکل زیر نوشت:

$$\zeta_{\nu}=\varpi/\nu-\sum_{l=1}^{\nu-1}\zeta_{l}. \qquad (7)$$

با در نظر گرفتن تابع هدف $\pounds=\sum_{l=1}^{\nu}\zeta_{l}^{2}$ و با استفاده از رابطه‌ی ۷ داریم:

$$\pounds = \sum_{l=1}^{\nu}\zeta_{l}^{2} = \sum_{l=1}^{\nu-1}\zeta_{l}^{2}+\zeta_{\nu}^{2} = \sum_{l=1}^{\nu-1}\zeta_{l}^{2}+(\varpi/\nu-\sum_{l=1}^{\nu-1}\zeta_{l})^{2} = \sum_{l=1}^{\nu-1}\zeta_{l}^{2}-2(\varpi/\nu)\sum_{l=1}^{\nu-1}\zeta_{l}+(\sum_{l=1}^{\nu-1}\zeta_{l})^{2}+(\varpi/\nu)^{2}.$$

اگر مشتق جزئی مرتبه اول تابع $\pounds$، نسبت به هر یک از ζ_{l}ها ($l=1,2,\dots,\nu-1$) محاسبه شود، داریم:

$$\frac{d\pounds}{d\zeta_{l}}=2\zeta_{l}-2(\varpi/\nu)+2(\sum_{l=1}^{\nu-1}\zeta_{l})=2(\zeta_{l}-\zeta_{\nu}).$$

هم‌چنین مشتق مرتبه دوم آن برابر با $\frac{d^{2}\pounds}{d^{2}\zeta_{l}}=4>0$ است. با توجه به مثبت شدن مشتق مرتبه دوم، ریشه‌ی $\frac{d\pounds}{d\zeta_{l}}$ منتج به کمینه شدن تابع $\pounds$ می‌گردد. به عبارت دیگر کمینه‌ی مقدار تابع $\pounds$ به ازای $\zeta_{l}=\zeta_{\nu}$، $l=1,2,\dots,\nu-1$ حاصل می‌شود که البته این با در نظر گرفتن قید $\sum_{l=1}^{\nu}\zeta_{l}=\varpi$، به معنی برابری هر یک از ζ_{l}ها، $l=1,2,\dots,\nu$ با مقدار ϖ/ν است. با جای‌گذاری مقادیر ζ_{l} در تابع $\pounds$ مقدار ϖ^{2}/n به‌دست می آید که کمینه‌ی مقدار تابع $\pounds$ است.

لم ۲ با توجه به برابری درایه‌های قطری ماتریس $(X'X)_{m\times m}$ با مقدار n^{2} و استفاده از تعریف ۱، مقدار $E(S^{2})$ برای ماتریس طرح ابراشباع شده‌ی X برابر

بامقدار زیر است:

$$E(S^{2}) = \frac{\sum_{i,j=1\&i<j}^{m} S_{ij}}{\binom{m}{2}} = \frac{\sum_{i,j=1\&i\neq j}^{m} S_{ij}}{m(m-1)} \quad (8)$$
$$= \frac{\sum_{i,j=1}^{m} S_{ij} - mn^{2}}{m(m-1)} = \frac{SS(X'X) - mn^{2}}{m(m-1)}.$$

لم ۳ با استفاده از محاسبات می‌توان به سادگی نشان داد که $SS(X'X)$ برابر با اثر ماتریس $X'XX'X$ است. لذا با توجه به خاصیت جابجایی ماتریس‌ها در محاسبه‌ی اثر حاصل ضرب آن‌ها داریم:

$$SS(X'X) = tr[X'XX'X] \quad (9)$$
$$= tr[XX'XX'] = SS(XX').$$

اثبات قضیه ۱:

ماتریس $A = X'X$ را در نظر بگیرید. اثر ماتریس A^{2} را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$tr(A^{2}) = \lambda_{(1)}^{2} + \cdots + \lambda_{(m)}^{2},$$

که در آن $\lambda_{(m)} \geq \cdots \geq \lambda_{(1)}$، مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند. با توجه به وجود شرط تعادل در هر یک از ستون‌های ماتریس X، رتبه‌ی ماتریس X، حداکثر برابر با $n-1$ است. پس به ازای $\iota \geq n$، $\lambda_{(\iota)} = 0$ است. لذا $tr(A^{2}) = \lambda_{(1)}^{2} + \cdots + \lambda_{(n-1)}^{2}$ است. هم‌چنین داریم:

$$\sum_{\iota=1}^{n-1} \lambda_{(\iota)} = \sum_{\iota=1}^{m} \lambda_{(\iota)} = tr(A) = mn.$$

بنابراین براساس لم ۱، $\lambda_{(1)}^{2} + \cdots + \lambda_{(n-1)}^{2}$، به ازای رابطه‌ی $\lambda_{(1)} = \cdots = \lambda_{(m)} = mn/(n-1)$ کمینه می‌شود. در نتیجه داریم:

$$tr(A^{2}) \geq (n-1)m^{2}n^{2}/(n-1)^{2} = m^{2}n^{2}/(n-1)$$

در نهایت براساس لم ۲ و لم ۳ داریم:

$$E(S^{2}) \geq \frac{m^{2}n^{2}/(n-1) - mn^{2}}{m(m-1)} = \frac{n^{2}(m-n+1)}{(m-1)(n-1)}.$$

به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

برای اثبات قضیه ۲ نیاز به تعریف و لم زیر است:

تعریف ۲ دو بردار $n \times 1$، $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ که شامل درایه‌های -1 و $+1$ هستند را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن دو بردار $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ در کنار یکدیگر، ماتریس جدیدی شامل n سطر و ۲ ستون تشکیل می‌گردد. مقصود از نماد $\boldsymbol{N(a_{+}b_{-})}$، تعداد جفت درایه‌هایی از ماتریس حاصل است که درایه‌ی مربوط به ستون $\boldsymbol{a}$ مثبت و درایه‌ی مربوط به ستون $\boldsymbol{b}$ منفی است. به همین ترتیب نمادهای $\boldsymbol{N(a_{-}b_{+})}$، $\boldsymbol{N(a_{-}b_{-})}$، $\boldsymbol{N(a_{+}b_{+})}$ تعریف می‌شوند. شایان ذکر است که اگر دو بردار $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ متعامد باشند آن‌گاه داریم:

$$\boldsymbol{N(a_{+}b_{-})} = \boldsymbol{N(a_{-}b_{+})} = \boldsymbol{N(a_{-}b_{-})} \quad (10)$$
$$= \boldsymbol{N(a_{+}b_{+})} = n/4.$$

هم‌چنین نماد $\boldsymbol{N(a)_{+}}$، تعداد درایه‌هایی از بردار $\boldsymbol{a}$ را نشان می‌دهد که برابر با $+1$ هستند.

لم ۴ دو بردار $n \times 1$ متعادل $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$، که در آن‌ها n مضرب ۴ و $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ است، متعامد هستند.

اثبات: بردار $\boldsymbol{(xy)}_{n\times 1}$ را بردار حاصل از ضرب هاداماری دو بردار $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ در نظر بگیرید. داریم:

$$\boldsymbol{N(xy)_{-}} = \boldsymbol{N(x_{-}y_{+})} + \boldsymbol{N(x_{+}y_{-})}, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{N(xy)_{+}} = \boldsymbol{N(x_{+}y_{+})} + \boldsymbol{N(x_{-}y_{-})}. \quad (12)$$

با توجه به $\langle x,y\rangle = ۰$، داریم:

$$N(xy)_- = N(xy)_+ = n/۲, \qquad (۱۳)$$

و با توجه به رابطه‌ی فوق داریم:

$$N(x_-y_+) + N(x_+y_-) = n/۲, \qquad (۱۴)$$

$$N(x_+y_+) + N(x_-y_-) = n/۲. \qquad (۱۵)$$

با توجه به تعادل بردار x نتیجه می‌گیریم:

$$N(x)_- = n/۲ \qquad (۱۶)$$

$$N(x_-y_-) + N(x_-y_+) = n/۲.$$

به طور مشابه با توجه به شرط تعادل در ماتریس، برای بردار y داریم:

$$N(y)_- = n/۲ \qquad (۱۷)$$

$$N(x_-y_-) + N(x_+y_-) = n/۲.$$

هم‌چنین از روابط ۱۶ و ۱۷ نتیجه می‌گیریم:

$$N(x_-y_+) = N(x_+y_-). \qquad (۱۸)$$

براساس روابط مذکور نتایج زیر حاصل می‌شود:
براساس روابط ۱۴ و ۱۸ داریم:

$$N(x_-y_+) = N(x_+y_-) = n/۴. \qquad (۱۹)$$

براساس روابط ۱۶ و ۱۹داریم:

$$N(x_-y_-) = n/۴, \qquad (۲۰)$$

و براساس روابط ۱۵ و ۲۰داریم:

$$N(x_+y_+) = n/۴. \qquad (۲۱)$$

با توجه به روابط ۱۹، ۲۰ و ۲۱ تعامد x و y نتیجه می‌شود.

اثبات قضیه ۲ (چنگ[۸]): فرض کنید هر دو سطر از ماتریس $\widetilde{X}$ متعامد باشد. حال اگر k ستون $\mathbf{1}$ را از ماتریس $\widetilde{X}$ حذف نماییم، همان ماتریس X به‌دست می آید که ضرب داخلی هر دو سطر آن برابر با $(-k)$ است. با توجه به رابطه‌ی $m = k(n-۱)$ نیز k برابر با یک مقدار صحیح مثبت می‌باشد. در نتیجه درایه‌های غیرقطری ماتریس $X'X$ برابر با $-m/(n-۱)$ خواهد بود. بنابراین براساس قضیه‌ی ۱ مقدار $E(S^۲)$ برابر با کران رابطه‌ی ۴ بوده و نابرابری به برابری تبدیل می‌گردد.
در حالت عکس اگر به ازای طرح ابراشباع شده‌ی X، حالت تساوی رابطه‌ی ۴ برقرار باشد، آن‌گاه طبق قضیه‌ی ۱، درایه‌های غیرقطری ماتریس $X'X$ برابر با $(-k)$ است. به عبارت دیگر ضرب داخلی هر دو سطر X برابر با $(-k)$ خواهد بود. در نتیجه ضرب داخلی هر دو سطر ماتریس $\widetilde{X}$، که از اضافه نمودن k ستون ۱ به ماتریس حاصل می‌شود، برابر با صفر می‌گردد. حال اگر با قرینه کردن ستون‌هایی از ماتریس که با ۱− آغاز می‌شوند، درایه‌های سطر اول در ماتریس حاصل همگی ۱+ گردند باز هم ضرب داخلی سطرها برابر با صفر است. به ویژه این‌که ضرب داخلی سطر اول در سایر سطرها نیز برابر با صفر است. با توجه به مثبت بودن درایه‌های سطر اول می‌توان تعادل سایر سطرها را نتیجه گرفت. براساس لم ۴ از صفر شدن ضرب داخلی سطرهای متعادل، تعامد آن‌ها را نتیجه می‌گیریم و به این ترتیب قضیه اثبات می‌شود.

مراجع

[1] Booth, K.H.V. and Cox, D.R. (1962), Some Systematic Supersaturated Designs, *Technometrics*, 4, 489-495.

[2] Bulutoglu, D.A. and Cheng, C.S (2004), Construction of $E(S^۲)$-optimal Supersaturated Designs, *The Annals of Statistics*, 32, 1662-1678.

[3] Bulutoglu, D.A and Ryan, K.J. (2008), $E(S^۲)$-optimal Supersaturated Designs with Good Minimax Properties when N is Odd, *Statstical Planning and Inference*, 138, 1754-1762.

[4] Butler, N.A. (2005), Minimax 16-run Supersaturated Designs, *Statistics and Probability Letters*, 73, 139-145.

[5] Butler N.A (2009), Two-level Supersaturated Designs for ۲^k Runs and Other Cases, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139, 23-29.

[6] Butler, N.A., Eskridge, K.M., Mead, R. and Gilmour, S.G. (2001), A General Method of Constructing $E(S^۲)$-optimal Supersaturated Designs, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 63, 621-632.

[7] Cela, R., Martines, E. and Carro, A.M. (2000), Supersaturated Designs. New Approaches to Building and Using it: Part I. Building Optimal Supersaturated Designs by means of Evolutionary Algorithms, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 52, 167-182.

[8] Cheng, C.S. (1997), $E(S^۲)$-optimal Supersaturated Designs, *Statistica Sinica*, 7, 929-939.

[9] Das, A., Dey, A., Chan, L.Y. and Chatterjee, K. (2008). On $E(S^۲)$-optimal Supersaturated Designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138, 3749-3757.

[10] Georgiou, S.D. (2008). On the Construction of $E(S^۲)$-optimal Supersaturated Designs, *Metrika*, 68, 189-198.

[11] Heredia-Langner, A., Carlyle, W.M., Mongomery, D.C., Borror, C.M. and Runger, G.C., (2003), Genetic Algorithms for the Construction of D-optimal Designs, *Journal of Quality Technology*, 35, 28-46.

[12] Koukouvinos, C., Mylona, K. and Simos, D.E. (2008). $E(S^{۲})$-optimal and Minimax-optimal Cyclic Supersaturated Designs via Multi-objective Simulated Annealing, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138, 1639-1646.

[13] Koukouvinos, C., Mylona, K. and Simos, D.E. (2009), A Hybrid SAGA Algorithm for the Construction of $E(S^{۲})$-optimal Cyclic Supersaturated Designs, *Statistical Planning and Inference*, 139, 478-485.

[14] Li, W.W. and Wu, C.F.J (1997), Columnwise-Pairwise Algrithms Applications to the Construction of Supersaturated Designs, *Technometrics*, 39, 171-179.

[15] Lin, D.K.J. (1993). A New Class of Supersaturated Designs, *Technometrics*, 35, 28-31.

[16] Liu, M.Q. and Zhang, R.C. (2000). Construction of $E(S^{۲})$-optimal Supersaturated Designs Using Cyclic BIBDs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 68, 189-198.

[17] Lu, X. and Meng, Y. (2000). A New Method in the Construction of Two-level Supersaturated Designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 86, 229-238.

[18] Nguyen, N.K. (1996), An Algorithmic Approach to Construction Supersaturated Designs, *Technometrics*, 38, 69-73.

[19] Nguyen, N.K. and Cheng, C.S. (2008). New $E(S^{۲})$-optimal Supersaturated Designs Obtained from Incomplete Block Designs, *Technometrics*, 50, 26-31.

[20] Ryan, K.J. and Bulutoglu, D.A. (2007). $E(S^{۲})$-optimal Supersaturated Designs with Good Minimax Proerties, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 2250-2262.

[21] Suen, C.Y. and Das, A. (2010). $E(S^{۲})$-optimal Supersaturated Designs with Odd Number of Runs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140(6), 1398-1409.

[22] Tang, B. and Wu, C.F.J. (1997). A Method for Construction Supersaturated Designs and it's $E(S^{۲})$-optimality, *Canadian Journal of Statistics*, 25, 191-201.

[23] Wu, C.F.J. (1993), Construction of Supersaturated Designs through Partially Aliased Interactions, *Biometrika*, 80, 661-669.