

## فرآیندهای میانگین متحرک با واریانس نامتناهی

مهرناز محمدپور<sup>۱</sup> و سیده فرشته رضائزاد<sup>۲</sup>

چکیده:

در برازش الگوی مناسب به فرآیندهای ایستا<sup>۲</sup> باگشتاور مرتبه دوم متناهی، تابع خود همبستگی نمونه ای وسیله مهم در تشخیص نارسایی و بیان خواص یک فرآیند می باشد. اما در فرآیندهای سنگین دم، روش های کلاسیک برازش برپایه تابع خود همبستگی نمونه ای مفید نمی باشد و آنالیز آنها با سری های زمانی دیگر تفاوت عمده ایی دارد. این نوع سری را توسط فرآیندهای ARMA با نوفه سنگین دم مدل بندی می کنند و آن را سری زمانی پایدار می نامند. با استفاده از تابع هم تفاضلی به عنوان معیار وابستگی مناسب در این گونه فرآیندها، نشان داده می شود که این تابع می تواند ابزار مناسب جدیدی برای تشخیص مرتبه فرآیندهای میانگین متحرک پایدار باشد. بر اساس تابع مشخصه تجربی، برآورد سازگاری برای تابع هم تفاضلی<sup>۴</sup> بیان و توزیع حدی آن به طور کامل بررسی و در نهایت با مطالعه شبیه سازی نشان داده می شود که روش ارائه شده به خوبی بیانگر مطالب فوق می باشد.

واژه های کلیدی: توزیع  $\alpha$ -پایدار متقارن، فرآیند میانگین متحرک، تشخیص مرتبه، تابع هم تفاضلی، تابع مشخصه.

### ۱ مقدمه

برازش الگوی مناسب به یک فرآیند، مسئله ایی است که توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است و حل این مسئله در شاخه های مختلف علوم، کاربردهای فراوانی خواهد داشت. سعی در برازش الگوی مناسب به یک فرآیند برای پیش بینی رفتار آینده فرآیند مفید می باشد. در بسیاری از موارد، فرض نرمال بودن برای مشاهدات منطقی به نظر می رسد. از طرف دیگر اخیراً در بسیاری از تقاضاها، مانند فرآیندهای سیگنالی، مخابراتی، اقتصادی، شیمی و فیزیک، توجه بسیاری از آمار دانان در آنالیز سری زمانی متوجه داده هایی شده که دارای خواص خاصی مانند وابستگی های طولانی مدت، غیر خطی بودن و توزیع سنگین دم<sup>۵</sup> و غیره هستند. مهمترین کلاس از این توزیع ها، توزیع های پایدار<sup>۶</sup> هستند که کلاس انعطاف پذیری برای مدل بندی داده ها می باشد و توزیع نرمال نیز در این کلاس قرار دارد. اهمیت این کلاس از توزیع ها در قضیه حد مرکزی تعمیم یافته مشخص می شود، به طوری که نشان داده می شود که توزیع پایدار تنها توزیع حدی ممکن برای مجموع یک

<sup>۱</sup> عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه مازندران

<sup>۲</sup> کارشناس ارشد آمار دانشگاه مازندران

<sup>۳</sup> Stationary

<sup>۴</sup> Codifference Function

<sup>۵</sup> Heavy Tailed

<sup>۶</sup> Stable Distribution

صفر می باشد، تعیین شود.

بارتلت<sup>۹</sup> (۱۹۴۶) نشان داد که در فرآیندهای MA(q) با

نوفه سفید iid، با میانگین صفر و واریانس متناهی،

$$\sqrt{n}\hat{\rho}(k) \rightarrow^d \left(1 + 2 \sum_{j=1}^q \rho^2(j)\right)^{\frac{1}{2}} Z, \quad k > q \quad (1)$$

و در فرآیندهای MA(۰) یا فرآیندهای iid،

$$\sqrt{n}\hat{\rho}(k) \rightarrow^d Z, \quad k > 0 \quad (2)$$

که در آن Z یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

در حالتی که واریانس نامتناهی و فرآیند دارای توزیع

سنگین دم باشد تمرکز بر میانگین نمونه ای چندان معنی

دار نیست. با در نظر گرفتن تابع خود همبستگی نمونه ای

به صورت

$$\hat{\rho}_n(h) = \frac{\hat{\gamma}_n(h)}{\hat{\gamma}_n(0)}, \quad h = 0, 1, \dots$$

که در آن

$$\hat{\gamma}_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t X_{t+h}, \quad h = 0, 1, \dots$$

این سوال طبیعی است که آیا هنوز روش کلاسیک برازش

بر پایه تابع خود همبستگی نمونه در مدل سنگین دم قابل

استفاده می باشد؟ در بررسی تابع خود همبستگی نمونه

ای در فرآیندهای خطی با واریانس نامتناهی، داویز و

رسنیک<sup>۱۰</sup> (۱۹۸۶) نشان دادند که این تابع دارای توزیع

حدی می باشد و در ادامه کار آنها، در سال ۱۹۹۸ آدلر

<sup>۱۱</sup> با بررسی فرآیندهای MA(q)،  $\alpha$  - پایدار متقارن،

سری متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع (iid)<sup>۷</sup> می باشد.

در فرآیندهای ایستا با گشتاور مرتبه دوم متناهی، تابع

خود کوواریانس و خود همبستگی نمونه ای برای n نمونه

تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  به صورت زیر تعریف می شود

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (X_{t+|h|} - \bar{X})(X_t - \bar{X}), \quad |h| < n$$

و

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}.$$

که تابع خود همبستگی نمونه ای به تابع خود همبستگی

فرآیند

$$\rho(h) = \frac{\text{cov}(X_{t+h}, X_t)}{\gamma(0)}$$

همگرا است و به عنوان ابزار مناسبی برای برازش مدل و

بیان خواص یک فرآیند به کار می رود.

روش متعددی برای تشخیص مرتبه فرآیندهای خود

بازگشتی میانگین متحرک (ARMA) ارائه شده است. [۴]

در حالت خاص، برای فرآیندهای میانگین متحرک از

مرتبه q (MA(q))، با واریانس متناهی با استفاده از این

واقعیت که تابع خود همبستگی  $\rho(\cdot)$  بعد از تاخیر q صفر

می باشد و بکارگیری تابع خود همبستگی نمونه ای

$\hat{\rho}(\cdot)$  به عنوان ابزاری در تشخیص مرتبه فرآیند در روش

باکس و جنکینز<sup>۸</sup>، تلاش می شود مرتبه فرآیندهای

میانگین متحرک با استفاده از رسم  $\hat{\rho}(h)$  در تاخیرهای

$h = 1, \dots, k$  و بررسی تاخیری که بعد از آن  $\hat{\rho}(\cdot)$  تقریباً

<sup>۷</sup>Independent and Identically Distribution

<sup>۸</sup>Box-Jenkins

<sup>۹</sup>Bartlett

<sup>۱۰</sup>Davis and Resnick

<sup>۱۱</sup>Adler

علت نامگذاری این گروه از توزیعها به توزیع های پایدار به دلیل خصوصیتی است که این گروه از متغیرهای تصادفی دارند که هر ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی پایدار، خود متغیر تصادفی پایدار است.

مطالعه روی این گروه از توزیع ها از سال ۱۹۲۰ توسط پائول لوی<sup>۱۵</sup> آغاز شد. محققان با مطالعه روی میدان جاذبه ستارگان، نوبه های موجود در وسایل ارتباطی و موارد تجربی مانند موارد مالی اقتصادی به خصوص در کشورهای دارای تورم به وجود چنین توزیع هایی پی بردند.

تاکنون چهار نوع پارامتر بندی برای این توزیع توسط افراد مختلف مطرح شده است. کاربرد بعضی از این انواع پارامتر بندی در موارد نظری و کاربرد بعضی دیگر در موارد عملی و شبیه سازی، پیچیدگی های موجود را می کاهد. در این مقاله پارامتر بندی که توسط ساموردینسکی

و تاکوارا<sup>۱۳</sup> ارائه شده بیان می شود.

توزیع  $\alpha$  - پایدار توسط چهار پارامتر مشخص می شود و به اختصار آن را به این صورت نمایش می دهیم.

$$X \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$$

$\alpha$ : شاخص پایداری و  $\alpha \in (0, 2]$

$\beta$ : پارامتر چولگی و  $\beta \in [-1, 1]$

$\sigma$ : پارامتر مقیاس و  $\sigma \in (0, \infty)$  و

$\mu$ : پارامتر مکان و  $\mu \in R$  می باشند.

توزیع حدی دقیق تابع خود همبستگی نمونه ای را به دست آورد و نشان داد که این تابع نمی تواند به عنوان ابزار مناسبی برای تشخیص مرتبه فرآیندهای میانگین متحرک  $\alpha$  - پایدار به کار رود.

تابع هم تفاضلی توسط ساموردینسکی و تاکو<sup>۱۲</sup> در سال ۱۹۹۴ به عنوان معیار وابستگی در سریهای زمانی سنگین دم معرفی شد که روسادی و دیستلر<sup>۱۳</sup> در سال ۲۰۰۹ با بکارگیری این تابع، از آن به عنوان ابزار مناسبی جهت تشخیص مرتبه فرآیند استفاده نمودند. همچنین با محاسبه این تابع در فرآیندهای  $MA(q)$ ، نشان داده می شود که در تاخیرهای بزرگتر از  $q$  صفر خواهد بود.

در این مقاله با معرفی برآوردگر سازگار برای تابع هم تفاضلی، توزیع حدی آن بررسی و از آن جهت تشخیص مرتبه فرآیندهای  $MA$  استفاده می شود.

تئوری تشخیص مرتبه فرآیندهای  $\alpha$  - پایدار، توسط راسنفلد<sup>۱۴</sup> در سال (۱۹۷۶) مطرح شد. اما نگرش اصلی این مقاله بر اساس نتایج روسادی و دیستلر (۲۰۰۹) می باشد.

## ۲ توزیع $\alpha$ - پایدار

توزیع های  $\alpha$  - پایدار کلاس وسیعی از توزیع را تشکیل می دهند و به علت جرم موجود در دمهای تابع چگالی، این گروه از توزیع ها به توزیع های سنگین دم معروف می باشند.

<sup>۱۲</sup> Samordinesky and Taqqu

<sup>۱۳</sup> Rosadi and Deistler

<sup>۱۴</sup> Rosenfeld

<sup>۱۵</sup> Paul levy

در توزیع  $\alpha$ -پایدار تنها در سه حالت فرم بسته تابع چگالی وجود دارد زمانی که  $\alpha = 2$ ، توزیع نرمال،  $\alpha = 1$ ، توزیع کوشی و زمانی که  $\alpha = \frac{1}{p}$  توزیع مربوطه لوی خواهد شد.

تعریف ۴ متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع  $\alpha$ -پایدار متقارن است هرگاه  $\beta = 0$  و  $\sigma = 1$  باشد.

قضیه ۲ فرض کنید  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ ،  $0 < \alpha < 2$  در آن صورت

$$E|X|^p = \begin{cases} < \alpha, & 0 < p < \alpha \\ \alpha, & p \geq \alpha. \end{cases}$$

### ۳ تابع خود همبستگی نمونه ای در فرآیندهای میانگین متحرک پایدار متقارن

فرض کنید  $\{X_t, t \in Z\}$  یک فرآیند میانگین متحرک پایدار به صورت زیر باشد

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j}, \quad (3)$$

به طوری که  $\{\epsilon_t\}$  دنباله ای از متغیرهای تصادفی iid با توزیع  $\alpha$ -پایدار متقارن باشد و ضرایب حقیقی مقدار  $c_j$  ها در رابطه زیر صدق کنند،

$$|c_j| < cQ^{-j}, \quad \exists c > 0, Q > 1.$$

تعریف ۱ متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع پایدار است اگر به ازای هر ثابت مثبت  $A, B$ ، یک ثابت مثبت  $C$  و ثابت حقیقی  $D$  وجود داشته باشد به قسمی که

$$AX_1 + BX_2 =^d CX + D$$

زمانی که  $X_1, X_2$  متغیرهای تصادفی مستقل و یک کپی از  $X$  است. متغیر تصادفی  $X$  پایدار اکید نامیده می شود اگر رابطه بالا برقرار و  $D=0$  باشد.

قضیه ۱ برای هر متغیر تصادفی پایدار، ثابت  $\alpha \in (0, 2]$  وجود دارد به قسمی که ثابت  $C$  در تعریف بالا به صورت زیر می باشد [۶].

$$C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha.$$

تعریف ۲ متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع پایدار می باشد اگر تنها اگر به ازای هر  $n \geq 2$ ، ثابت  $C_n > 0$  و ثابت حقیقی  $D_n$  وجود داشته باشد به طوری که

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n =^d C_n X + D_n$$

که  $X_1, X_2, \dots, X_n$  متغیر تصادفی و یک کپی از  $X$  می باشند.

با مراجعه به قضیه ۵.۱.۱ فلر نشان داده می شود که لزوماً  $C_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$  می باشد [۶].

تعریف ۳ متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع  $\alpha$  پایدار می باشد هرگاه دارای تابع مشخصه ایی به صورت زیر باشد

$$E[e^{i\theta X}] = \begin{cases} e^{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 - i\beta(\text{sign}\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\theta}, & \alpha \neq 1 \\ e^{-\sigma|\theta| (1 + i\beta\frac{\pi}{2}(\text{sign}\theta)\ln|\theta|) + i\mu\theta}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

ابزار مناسبی جهت تشخیص مرتبه این گونه فرآیندها باشد.

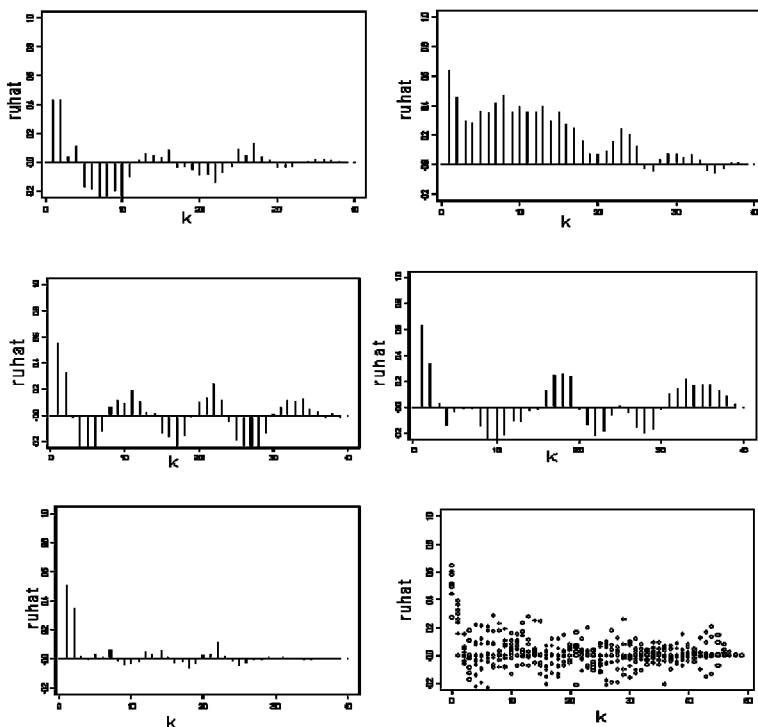
مثال ۱ فرض کنید  $\{X_t, t \in Z\}$  یک فرآیند میانگین متحرک  $\alpha$  پایدار متقارن باشد. با شبیه سازی و محاسبه ACF نشان داده می شود که این تابع شکل مطلوب همگرایی به مقدار ثابت را از دست می دهد و رفتاری تصادفی دارد. رسم  $\hat{\rho}(\cdot)$  در تاخیرهای مختلف پنج بار به طور مستقل و بر روی هم در شکل ۱ برای فرآیندهای  $MA(2)$ ، پایدار متقارن با  $\alpha = \frac{1}{2}$  نشان داده شده است.

داویز و رسنیک (۱۹۸۶) نشان دادند که در این فرآیند ها، توزیع حدی تابع خود همبستگی نمونه ای به صورت زیر می باشد

$$\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \hat{\rho}(h) \rightarrow^d \left(1 + 2 \sum_{j=1}^q |\rho(j)|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{S_1}{S_0} \quad (۴)$$

که در آن  $S_1, S_0$  متغیرهای تصادفی مستقل پایدار می باشند.

با توجه به توضیح حدی (۴)، در مثال زیر نشان داده می شود که تابع خود همبستگی نمونه ای در فرآیندهای میانگین متحرک  $-\alpha$  پایدار متقارن نمی تواند به عنوان



شکل ۱. نمودار تابع خود همبستگی نمونه ای در فرآیندهای  $S_{\frac{1}{2}}^{\vee}SMA(2)$

## ۴ تابع هم تفاضلی

تابع هم تفاضلی برای فرآیند ایستای  $\{X_t\}$  در تاخیر  $k$  - $\alpha$  پایدار متقارن به فرم برای  $s \in R, k \in Z$  بصورت

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j}$$

که در آن  $\epsilon_t$  دارای توزیع  $S\alpha S$  با تابع مشخصه

$$E \exp(is\epsilon_t) = \exp(-\sigma^\alpha |s|^\alpha) \quad (6)$$

باشد، آنگاه تابع هم تفاضلی، با این فرض که ضرایب حقیقی مقدار  $c_j$  ها در رابطه زیر صدق کنند

$$|c_j| < cQ^{-j}, \quad \exists c > 0, Q > 1$$

به صورت زیر خواهد بود

$$\tau(k) = \tau(k, s, -s) = \sigma^\alpha |s|^\alpha \left( \sum_{j=0}^{\infty} |c_{j+k} - c_j|^\alpha - |c_{j+k}|^\alpha - |c_j|^\alpha \right), \quad k \geq 0$$

اثبات: با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} & E \exp[is(X_{t+k} - X_t)] \\ &= E[\exp(is(\sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t+k-j} - \sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j}))] \\ &= E[\exp(is(\sum_{j=0}^{k-1} c_j \epsilon_{t+k-j} + \sum_{j=k}^{\infty} c_j \epsilon_{t+k-j} - \sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j}))] \\ &= E[\exp(is(\sum_{j=0}^{k-1} c_j \epsilon_{t+k-j}))] \\ &\quad \times E[\exp(is(\sum_{j=0}^{\infty} (c_{j+k} - c_j) \epsilon_{t-j}))] \\ &= \exp[-\sigma^\alpha |s|^\alpha \sum_{j=0}^{k-1} |c_j|^\alpha] \\ &\quad \times \exp[-\sigma^\alpha |s|^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} |c_{j+k} - c_j|^\alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(k) &= \tau(k, s, -s) = -\ln E \exp(is(X_{t+k} - X_t)) \\ &\quad + \ln E \exp(is(X_{t+k})) \\ &\quad + \ln E \exp(-is(X_t)), \end{aligned} \quad (5)$$

و تابع هم تفاضلی استاندارد شده (NCF)<sup>16</sup> به صورت

$$I(k) = \frac{\tau(k)}{\tau(0)}$$

تعریف می شود.

به علت وجود تابع مشخصه، تابع هم تفاضلی تابع خوش تعریف می باشد و نیازی به شرط وجود گشتاورها در فرآیند  $\{X_t\}$  نمی باشد. در این بخش به محاسبه و بررسی تابع هم تفاضلی در فرآیندهای میانگین متحرک  $\alpha$ -پایدار متقارن می پردازیم و نشان می دهیم که این تابع می تواند به عنوان ابزار مناسبی جهت تشخیص مرتبه این گونه فرآیندها بکار رود.

### ۱.۴ تابع هم تفاضلی و هم تفاضلی نمونه ای در فرآیندهای میانگین متحرک پایدار

در این بخش به محاسبه تابع هم تفاضلی برای فرآیندهای میانگین متحرک پایدار متقارن می پردازیم.

قضیه ۳ فرض کنید  $\{X_t\}$  یک فرآیند میانگین متحرک

<sup>16</sup> Normalized Coddifference Function

و در آن  $\gamma(k)$  تابع خود کواریانس می باشد. همچنین در این حالت تابع هم تفاضلی استاندارد شده دقیقاً با تابع خود همبستگی نمونه ای برابر است، یعنی

$$I(k) = \rho(k).$$

حال با بررسی روابط بالا به معرفی تابع هم تفاضلی نمونه ای با استفاده از تابع مشخصه می پردازیم. با در نظر گرفتن فرآیند میانگین متحرک  $\alpha$ -پایدار متقارن، تابع هم تفاضلی نمونه ای به صورت زیر می باشد،

$$\hat{\tau}_k(s, -s) = \sqrt{\frac{n}{n-k}} [-\ln \phi(s, -s, k) + \ln \phi(s, \circ, k) + \ln \phi(\circ, -s, k)],$$

زمانی که

$$\phi(u, v, k) = \begin{cases} \frac{1}{n-k} \sum_{t=0}^{n-k} \exp(i(uX_{t+k} + vX_t)), & k \geq 0 \\ \frac{1}{n+k} \sum_{t=0}^{n+k} \exp(i(uX_{t+k} + vX_t)), & k < 0 \end{cases}$$

و همچنین برآوردگر سازگار برای تابع هم تفاضلی استاندارد شده به صورت

$$\hat{I}(s, -s, k) = \frac{\hat{\tau}(s, -s, k)}{\hat{\tau}(s, -s, \circ)}$$

می باشد. همانطوری که مشاهده می شود این برآوردگرها در حقیقت علاوه بر  $X_t$  ها، وابسته به پارامترهای  $\{s_1, \dots, s_r\}$  است. نحوه انتخاب  $s$  در مثال ۲ شرح داده شده است.

در مثال بعد از طریق شبیه سازی،  $s$  بهینه را در فرآیندهای  $SaS MA(2)$  می یابیم.

مثال ۲ فرآیند  $SaS MA(2)$  به صورت

$$X_t = \epsilon_t + 2\epsilon_{t-1} + 1.111\epsilon_{t-2}$$

و

$$\begin{aligned} E \exp(is X_{t+k}) &= E[\exp(is \sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t+k-j})] \\ &= E[\exp(is (\sum_{j=0}^{k-1} c_j \epsilon_{t+k-j} + \sum_{j=k}^{\infty} c_j \epsilon_{t+k-j}))] \\ &= E[\exp(is \sum_{j=0}^{k-1} c_j \epsilon_{t+k-j})] \times E[\exp(is \sum_{j=0}^{\infty} c_{j+k} \epsilon_{t-j})] \\ &= \exp(-\sigma^\alpha |s|^\alpha (\sum_{j=0}^{k-1} |c_j|^\alpha + \sum_{j=0}^{\infty} |c_{j+k}|^\alpha)), \end{aligned}$$

و بطور مشابه

$$E[\exp(-is X_t)] = \exp(-\sigma^\alpha |s|^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^\alpha).$$

بنابراین با استفاده از روابط بالا

$$\begin{aligned} \tau(k) &= \sigma^\alpha |s|^\alpha (\sum_{j=0}^{\infty} |c_{j+k} - c_j|^\alpha \\ &\quad - |c_{j+k}|^\alpha - |c_j|^\alpha), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

حالت خاص : در حالت فرآیند میانگین متحرک  $\alpha$ -پایدار متقارن از مرتبه  $q$ ، تابع هم تفاضلی برای  $k \leq q$  به صورت

$$\begin{aligned} \tau(k) &= \sigma^\alpha |s|^\alpha (\sum_{j=0}^{q-k} |c_{j+k} - c_j|^\alpha \\ &\quad - \sum_{j=0}^{q-k} |c_{j+k}|^\alpha - \sum_{j=0}^{q-k} |c_j|^\alpha), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

و برای  $k > q$  مقدار  $\tau(k)$  برابر صفر می باشد. [10]

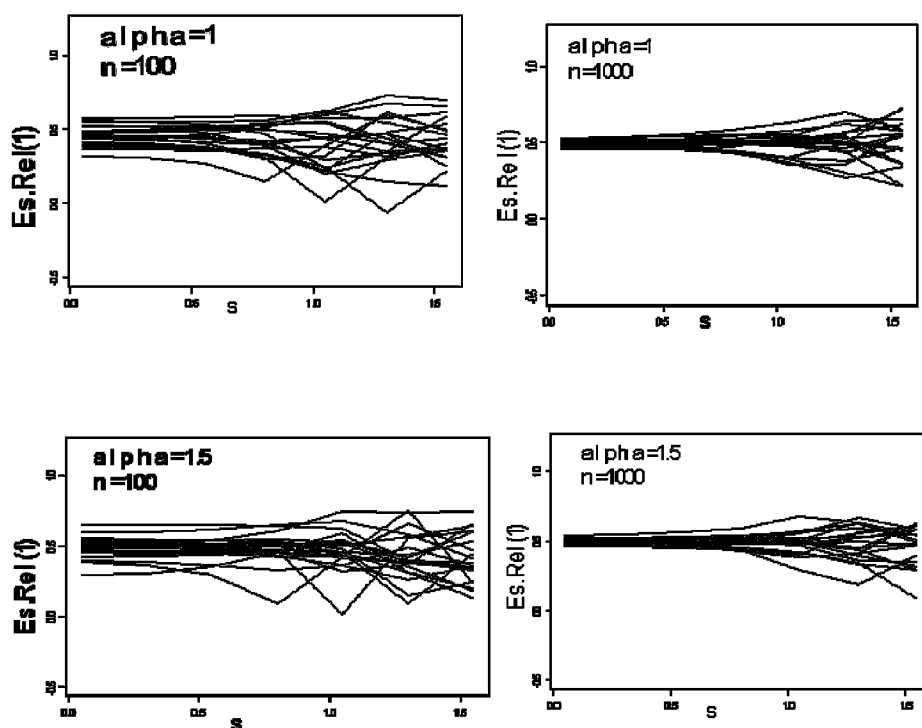
نکته ۱ اگر  $\{X_t\}$  یک فرآیند میانگین متحرک گوسی باشد

$$\tau(k) = -s^2 \gamma(k) \quad (7)$$

از این فرآیند،  $Re\hat{I}(1)$  را به ازای  $2 > s \geq 0$  و برای  $\alpha$  های مختلف رسم می کنیم. طبق شکل ۲ مشاهده می شود که نقطه  $s = 0.1$ ، نقطه بهینه ایی است که در آن  $Re\hat{I}(1)$  در چندین شبیه سازی تقریباً یکسان بوده، لذا نقطه  $s = 0.1$  را در برآورد  $Re\hat{I}(1)$  در نظر می گیریم.

را در نظر بگیرید. برای یافتن  $s$  بهینه در برآوردگر تابع هم تفاضلی استاندارد شده از طریق شبیه سازی به روش زیر عمل می کنیم.

با توجه به اینکه تابع هم تفاضلی در فرآیندهای  $S\alpha S MA(q)$ ، یک تابع حقیقی مقدار و برآوردگر آن مختلط می باشد، بنابراین تا حد امکان فقط از قسمت حقیقی برآوردگر استفاده می کنیم. با تولید داده هایی



شکل ۲. نمودار  $Re\hat{I}(1)$  در فرآیندهای  $S\alpha SMA(2)$

## ۲.۴ توزیع مجانبی تابع هم تفاضلی نمونه ای

$$f_{ij} = [(\exp(\sigma^\alpha(|s_i|^\alpha + |s_j|^\alpha - |s_i - s_j|^\alpha)) \times ((\frac{1}{\Gamma} \exp(\sigma^\alpha(|s_i|^\alpha + |s_j|^\alpha - |s_i - s_j|^\alpha)) - 1)) + (\exp(\sigma^\alpha(|s_i|^\alpha + |s_j|^\alpha - |s_i + s_j|^\alpha)) \times ((\frac{1}{\Gamma} \exp(\sigma^\alpha(|s_i|^\alpha + |s_j|^\alpha - |s_i + s_j|^\alpha)) - 1)) + 1]$$

در این بخش توزیع مجانبی تابع هم تفاضلی نمونه ای و تابع هم تفاضلی استاندارد شده نمونه ای را مورد بررسی قرار می دهیم.

قضیه ۴ فرض کنید  $\{X_t, t \in Z\}$  یک فرآیند  $MA(q)$  - $\alpha$  پایدار متقارن به فرم

$$X_t = \sum_{j=0}^q c_j \epsilon_{t-j}$$

باشد، آنگاه برای  $h \in \{1, 2, \dots\}$

$$h_{ij} = [\exp(\sigma^\alpha(|s_i|^\alpha + |s_j|^\alpha - |s_i - s_j|^\alpha) \times ((\frac{1}{\Gamma} (\exp(\sigma^\alpha(|s_i|^\alpha + |s_j|^\alpha - (|s_i - s_j|^\alpha))) - 1)), g_{ij} = \Psi e^{\sigma^\alpha |s_i|^\alpha |s_j|^\alpha}.$$

$$\left[ \begin{pmatrix} Re\hat{I}(s, 1) \\ Im\hat{I}(s, 1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} Re\hat{I}(s, h) \\ Im\hat{I}(s, h) \end{pmatrix} \right]^T \sim$$

$$AN \left[ \left[ \begin{pmatrix} I(1) \\ \circ \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} I(h) \\ \circ \end{pmatrix} \right]^T, n^{-1}W \right] \quad (\text{A})$$

که ماتریس  $W$  در قسمت ضمیمه آورده شده است.

همچنین در رابطه بالا  $Re$  و  $Im$  به ترتیب قسمت حقیقی و موهومی تابع هم تفاضلی استاندارد شده نمونه ای می باشند.

با محاسبه توزیع مجانبی برای تابع هم تفاضلی نمونه ای برای فرآیندهای  $iid$  از آن جهت تشخیص مرتبه فرآیند استفاده می شود.

حالت خاص: فرض کنید به جای کار با  $s$  برداری در قضیه ۴ از یک بعدی استفاده شود، آنگاه برای یک سری از فرآیندهای میانگین متحرک مرتبه صفر  $\alpha -$  پایدار داریم

$$Re\hat{I}(s, k) \sim AN\left(\circ, \frac{c_1}{n}\right)$$

که در آن

$$c_1 = \frac{e^{\sigma^\alpha |s|^\alpha}}{\Psi \sigma^{2\alpha} |s|^{2\alpha}} \left\{ \frac{1}{\Gamma} e^{\sigma^\alpha |s|^\alpha} - 1 \right\} + \frac{e^{\sigma^\alpha (2|s|^\alpha - |2s|^\alpha)}}{\Psi \sigma^{2\alpha} |s|^{2\alpha}} \left\{ \frac{1}{\Gamma} e^{\sigma^\alpha (2|s|^\alpha - |2s|^\alpha)} - 1 \right\} + \frac{1}{\Psi \sigma^{2\alpha} |s|^{2\alpha}}$$

می باشد.

قضیه ۵ فرض کنید  $\{X_t, t \in Z\}$  یک دنباله  $iid$  باشد

آنگاه برای  $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$Re\hat{I}(s, k) \sim AN(\circ, n^{-1}W_1) \quad \text{الف)}$$

$$Im\hat{I}(s, k) \sim AN(\circ, n^{-1}W_2) \quad \text{ب)}$$

که  $(i, j)$  امین عنصر از ماتریس  $W_1$  و  $W_2$  به صورت

$$W_1(i, j) = \frac{f_{ij}}{g_{ij}}, \quad W_2(i, j) = \frac{h_{ij}}{g_{ij}}, \quad i, j = 1, \dots, r \quad (\text{A})$$

## ۵ تشخیص مرتبه فرآیندهای میانگین متحرک $\alpha$ - پایدار با استفاده از تابع هم تفاضلی

همانطور که در مورد فرآیندهای میانگین متحرک با گشتاور مرتبه دوم متناهی بحث شد، در چنین فرآیندهایی تابع خود همبستگی نمونه ای به عنوان ابزار مناسبی جهت تشخیص مرتبه فرآیند به کار می رود. در عمل  $\rho(j)$ ،  $j = 0, 1, \dots, q$  بنابراین برای تشخیص مرتبه  $q$ ، تابع خود همبستگی نمونه ای را با فاصله اطمینان  $\pm \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$  رسم کرده و تابع خود همبستگی نمونه ای را تقریباً صفر در نظر می گیریم هرگاه مقادیر آن در داخل باند قرار بگیرد. این فاصله اطمینان، در حقیقت فاصله اطمینان مجانبی تابع خود همبستگی نمونه ای در فرآیندهای iid می باشد.

حال زمانی که نوفه ها از توزیعی پیروی کنند که دارای واریانس نامتناهی باشد، نمی توان از تابع خود همبستگی نمونه ای جهت تشخیص مرتبه فرآیند استفاده کرد. به همین علت تابعی به نام تابع هم تفاضلی معرفی و نشان داده شد که این تابع می تواند به عنوان ابزار مناسبی جهت تشخیص مرتبه فرآیندها باشد و همچنین توزیع حدی برآوردگر آنرا به دست آوردیم و دیدیم که توزیع حدی آن نرمال می شود. بنابراین می توان گفت تابع هم تفاضلی به عنوان ابزار مناسبی جهت تشخیص مرتبه مدل استفاده می شود. از آنجا که در فرآیندهای  $SaSMA(q)$ ، تابع هم تفاضلی حقیقی مقدار می باشد ولی برآوردگر تابع هم تفاضلی مختلط بوده لذا تا حد امکان از قسمت حقیقی برآوردگر هم تفاضلی استفاده

می شود. رفتار مجانبی تابع هم تفاضلی نمونه ای در فرآیندهای  $SaSMA(q)$ ، در بخش چهارم مورد بررسی و نشان دادیم که  $\sqrt{n}Re\hat{I}(k)$  برای  $|k| > q$  دارای توزیع نرمال مجانبی با میانگین صفر است و واریانس مجانبی آن بستگی به پارامترهای مجهول  $\{c_j, j = 1, \dots, q\}$  دارد.

از آنجا که برای یک دنباله iid، باتوزیع  $SaS$ ، برای  $k \neq 0, s \in R$

$$c_1 = \frac{e^{2\sigma^\alpha |s|^\alpha}}{4\sigma^{2\alpha} |s|^{2\alpha}} \left\{ \frac{1}{2} e^{2\sigma^\alpha |s|^\alpha} - 1 \right\} + \frac{e^{\sigma^\alpha (2|s|^\alpha - |2s|^\alpha)}}{4\sigma^{2\alpha} |s|^{2\alpha}} \left\{ \frac{1}{2} e^{\sigma^\alpha (2|s|^\alpha - |2s|^\alpha)} - 1 \right\} + \frac{1}{4\sigma^{2\alpha} |s|^{2\alpha}}$$

لذا جهت تشخیص مرتبه فرآیندهای  $SaSMA(q)$ ، قسمت حقیقی  $\hat{I}(k)$  را با باندهای  $\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{c_1}{n}}$  رسم می شود و قسمت حقیقی  $\hat{I}(k)$  بطور تقریبی صفر در نظر گرفته می شود اگر مقدار آن در تاخیر معین داخل باند قرار بگیرد و آن تاخیر مرتبه فرآیند رامشخص می کند.

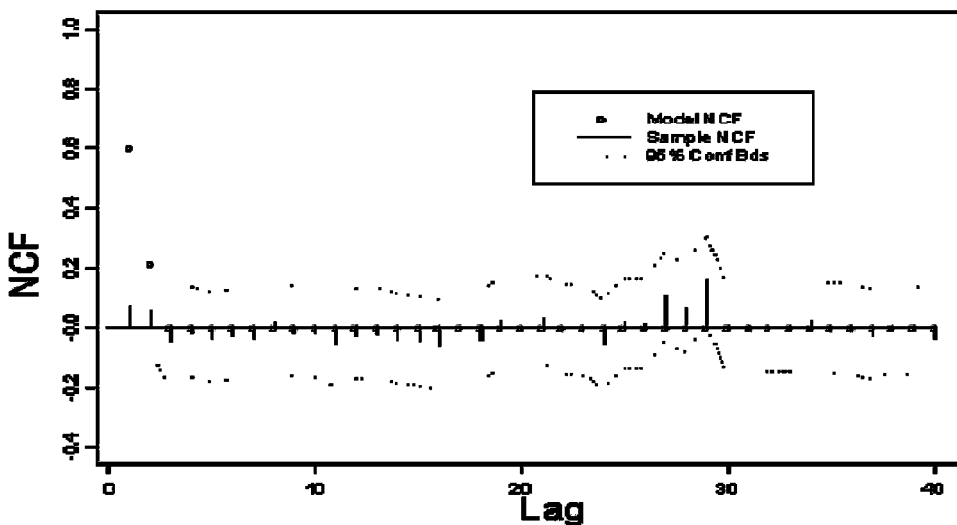
مثال ۳ فرض کنید  $\{X_t, t \in Z\}$  یک فرآیند  $SMA(2)$  به صورت

$$X_t = \epsilon_t + 2\epsilon_{t-1} + 1.111\epsilon_{t-2}$$

باشد. توزیع حدی قسمت حقیقی تابع هم تفاضلی استاندارد شده نمونه ای به صورت

$$Re\hat{I}(k) \sim AN(0, 0.006163948)$$

می باشد. در شکل ۳، تابع هم تفاضلی استاندارد شده نمونه ای با فاصله اطمینان ۹۵٪ برای



شکل ۳. نموداری از تابع هم تفاضلی استاندارد شده مدل و نمونه ای با باند های  $Re\hat{I}(k) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_k}{n}}$

## ۶ ضمیمه

ماتریس واریانس کوواریانس ارائه شده در قضیه ۴ و  $(i, j)$  -امین عنصر از  $W$  به صورت

$$\begin{pmatrix} cov(Re\hat{I}(s, i), Re\hat{I}(s, j)) & cov(Re\hat{I}(s, i), Im\hat{I}(s, j)) \\ cov(Im\hat{I}(s, i), Re\hat{I}(s, j)) & cov(Im\hat{I}(s, i), Im\hat{I}(s, j)) \end{pmatrix}$$

بخش ۲.۴، به صورت زیر می باشد

$$= D_{i\setminus} m_{\circ\circ} D_{j\setminus} + D_{i(i+1)} m_{i\circ} D_{j\setminus}$$

$$W = DMD^T$$

$$+ D_{i\setminus} m_{\circ j} D_{j(j+1)} + D_{i(i+1)} m_{ij} D_{j(j+1)}$$

$$= \begin{bmatrix} D_{i\setminus} m_{\circ\circ}^{RR} D_{j\setminus} + D_{i(i+1)} m_{i\circ}^{RR} D_{j\setminus} & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_r \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} D_{i\setminus} m_{\circ j}^{RR} D_{j(j+1)} & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_r \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} D_{i(i+1)} m_{ij}^{RR} D_{j(j+1)} & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_r & D_{i(i+1)} m_{ij}^{II} D_{j(j+1)} \end{bmatrix}$$

جایی که برای  $i = 1, \dots, h$

که در آن

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & \dots & \mathbf{0} \\ D_{21} & 0 & D_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ D_{31} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ D_{h1} & 0 & 0 & \dots & D_{h(h+1)} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{\circ\circ} & m_{\circ 1} & m_{\circ 2} & \dots & m_{\circ h} \\ m_{1\circ} & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1h} \\ m_{2\circ} & m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{h\circ} & m_{h1} & m_{h2} & \dots & m_{hh} \end{pmatrix}$$

و بطور مشابه، عناصر دیگر از ماتریس  $V_{pq}$  به دست می آید. در رابطه بالا  $\phi_1, \phi_2$  و  $\phi_3$  به صورت زیر می باشند.

$$\phi_1(s_i, p) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \exp(-is_i X_t),$$

$$\phi_2(s_i, p) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \exp(is_i X_{t+p}),$$

$$\phi_3(s_i, p) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \exp(is_i (X_{t+p} - X_t)).$$

همچنین در رابطه  $m_{pq}$  ماتریس  $L_p^p$  به صورت

$$L_p^p = \begin{pmatrix} I_r \otimes d^p & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_r & I_r \otimes d^p \end{pmatrix}$$

بوده که  $(d^p)^T = [d_1^p, d_2^p, \dots, d_r^p]$  و عناصر  $d_i^p$

به فرم زیر می باشند  $i = 1, 2, \dots, r$

$$d_i^p(1, 1) = (Re\Phi(\circ, -s_i; p))^{-1},$$

$$d_i^p(2, 2) = (Re\Phi(s_i, \circ; p))^{-1},$$

$$d_i^p(3, 3) = (Re\Phi(s_i, -s_i; p))^{-1}.$$

که در آن

$$\Phi(u, v; p) = E[\exp(i(uX_{t+p} + vX_t))], \quad u, v \in R$$

می باشد.

تعریف ۵ اگر  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$  و  $B = (b_1 \quad b_2)$

باشد، ضرب کرونگر این دو ماتریس برابر است با

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_2 b_1 & a_2 b_2 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_4 b_1 & a_4 b_2 \end{pmatrix}$$

$$D_{l1} = \begin{bmatrix} D_{l1}^{(1)} & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_r \end{bmatrix},$$

$$D_{l(l+1)} = \begin{bmatrix} D_{l(l+1)}^{(1)} & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_r & D_{l(l+1)}^{(1)} \end{bmatrix},$$

که  $D_{l1}^{(1)}$  برابر است با

$$\begin{bmatrix} \frac{-I(l)}{\tau(s_1, -s_1, \circ)} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \frac{-I(l)}{\tau(s_2, -s_2, \circ)} & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \frac{-I(l)}{\tau(s_r, -s_r, \circ)} \end{bmatrix}$$

و  $D_{l(l+1)}^{(1)}$  برابر است با

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\tau(s_1, -s_1, \circ)} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \frac{1}{\tau(s_2, -s_2, \circ)} & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \frac{1}{\tau(s_r, -s_r, \circ)} \end{bmatrix}.$$

در ضمن  $m_{pq}$  امین عنصر از ماتریس  $M$  برابر

است با

$$\begin{pmatrix} cov(Re\hat{\tau}(s, p), Re\hat{\tau}(s, q)) & cov(Re\hat{\tau}(s, p), Im\hat{\tau}(s, q)) \\ cov(Im\hat{\tau}(s, p), Re\hat{\tau}(s, q)) & cov(Im\hat{\tau}(s, p), Im\hat{\tau}(s, q)) \end{pmatrix} = \lambda L_p^p V_{pq} L_p^q \lambda^T,$$

جایی که

$$\lambda = \begin{pmatrix} I_r \otimes \lambda_1 & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_r & I_r \otimes \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = (1 \quad 1 \quad -1),$$

و  $\otimes$  ضرب کرونگر می باشد و برای  $p, q \geq 0$

$$V_{pq} = \begin{pmatrix} V_{pq}^{RR} & V_{pq}^{RI} \\ V_{pq}^{IR} & V_{pq}^{II} \end{pmatrix}$$

و همچنین برای  $i = 1, \dots, r$  برابر است با

$$cov \left[ Re \begin{pmatrix} \phi_1(s_i, p) \\ \phi_2(s_i, p) \\ \phi_3(s_i, p) \end{pmatrix}, Re \begin{pmatrix} \phi_1(s_i, q) \\ \phi_2(s_i, q) \\ \phi_3(s_i, q) \end{pmatrix} \right]$$

## مراجع

- [1] Adler, R. J., Feldman, R. E. and Gallagher C. M. (1998). Analyzing stable time series. A practical guide to heavy tails. *In Statistical Techniques and Applications* (Adler, R. J. Feldman, R. E. and Taqqu, M. S., Eds.). pp. 133-158. Birkhauser. Boston.
- [2] Bartlett, M. s. (1946). On the theoretical specification of sampling properties of autocorrelated time series. *J. R. Statist. Soc. B*, 8, 24-42.
- [3] Brockwell, P., Davis, R., (1991). *Time Series: Theory and Methods*, 2nd ed, Springer, NewYork.
- [4] Choi, B. S., (1992). *ARMA Model Identification*, Springer, New York.
- [5] Davis, R. A., Resnick, S. I., (1986). Limit theory for the sample correlation function of moving average. *Ann. Statist.* 14, 533-558.
- [6] Feller, W., (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 2nd ed. Wiley, New York.
- [7] Holt, D. and Crow, E. , (1973). Tables and graphs of the stable probability density function, *J. Research Nat. Bureau of Standard, B. Math. Sci.*, 77B, pp. 143-198.
- [8] Kokoszka, P. S. and Taqqu, M. S. (1994). Infinite variance stable ARMA processes. *Journal of Time Series Analysis*, 15, 203-220.
- [9] Levy, P., (1924). Theorie de L addition des Variables Aleatoires, *Bulletin de la Societe de France* 52, pp. 49-85.
- [10] Rosadi, D., Deistler, M., (2009). Estimating the codifference function of linear time Series models with infinite variance, *Metrika*(In Press).
- [11] Rosadi, D. (2007). Identification of moving average process with infinite variance, *Stat Probab. Lett.*, 77, 1490-1496.

- [12] Rosenfeld, G., (1976). Identification of time series with infinite variance. *Appl. Statist.* 25, 147-153.
- [13] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. S. (1994). *Stable Non-Gaussian Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman and Hall. New York.