

اندیشه آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۱، شماره پیاپی ۳۳

سال هفدهم شماره اول، ص ۵۵-۶۹

مقایسه‌ی سه روش برآوردیابی برای توزیع وایبل بر مبنای سانسور راست فزاینده‌ی نوع II

مریم رفیعی^۱، سیمیندخت براتپور باجگیران^۲

چکیده:

در این مقاله، ابتدا برآورد پارامترهای مقیاس و شکل توزیع وایبل به روش‌های درستنمایی ماکزیمم (MLE) و درستنمایی ماکزیمم تقریبی (AMLE)، بر اساس سانسور راست فزاینده‌ی نوع II به دست می‌آیند. سپس روش جدیدی به نام "برآورد وارون" یا IE جهت برآورد پارامترهای توزیع وایبل معرفی می‌گردد که در آن از خواص آماره‌های ترتیبی استفاده شده است. همچنین آریبی و MSE سه روش فوق به کمک شبیه سازی برای دو پارامتر محاسبه شده و مورد مقایسه قرار می‌گیرند که نتایج در جداولی درج شده اند. در پایان دو مثال عددی نیز برای تشریح روش‌های پیشنهاد شده بیان می‌گردند.

واژه‌های کلیدی: توزیع وایبل، سانسور راست فزاینده‌ی نوع II، برآوردگر وارون^۳، روش MLE، روش AMLE، شبیه سازی.

^۱نویسنده مسئول، کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

^۲دکترای آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

^۳Inverse Estimation

۱ مقدمه

$$R_m = \text{آن‌گاه}, R_2 = \dots = R_{m-1} = 0$$

$n - m$ ، که با طرح سانسور نوع II متناظر است.

$$\text{اگر } R_1 = R_2 = \dots = R_{m-1} = R_m = 0$$

به طوری که $m = n$ ، طرح سانسور راست فزاینده‌ی

نوع II به حالتی که هیچ سانسوری رخ نداده (حالت

نمونه‌ی کامل) تبدیل می‌شود. اشکالی که طرح

سانسور راست فزاینده‌ی نوع II دارد این است که

ممکن است زمان آزمایش به طول بیانجامد.

برای برآورد پارامترهای توزیع وایبل بر اساس سانسور

فزاینده‌ی نوع II نیاز به تابع چگالی احتمال توأم

زمان‌های شکست سانسور فزاینده‌ی نوع II،

$$X_{m:m:n}, \dots, X_{2:m:n}, X_{1:m:n}$$

داریم که عبارت است از (بالاکریشنان و آگاروالا

[۵] مطالعه شود)

$$f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{i:m:n}}(x_1, \dots, x_m) \\ = c \prod_{i=1}^m f(x_i)(1 - F(x_i))^{R_i}, \quad (1)$$

که در آن

$$c = n(n - R_1 - 1) \times \dots$$

$$\times (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1).$$

در این صورت، تابع چگالی احتمال و تابع توزیع

تجمعی متغیر تصادفی وایبل عبارت اند از

$$f(x; \lambda, \alpha) = \lambda \alpha (\alpha x)^{\lambda-1} e^{-(\alpha x)^\lambda}, \\ x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0, \quad (2)$$

بررسی‌های صورت گرفته بر روی سانسور فزاینده‌ی

به حدود ۵۴ سال پیش بر می‌گردد. هرد^۴ [۹]

نخستین کسی بود که سانسور فزاینده‌ی را مطرح

کرد و سپس دکتر کهن^۵ [۷] مقاله‌ای را در ارتباط

با این نوع سانسور ارائه داد. فرض کنید n واحد

در یک آزمون بقا قرار گیرند. پیش از آزمایش،

عدد m ($m < n$) و همچنین طرح سانسور

$R = (R_1, R_2, \dots, R_m)$ با شرط‌های $R_j \geq 0$ و

در $\sum_{j=1}^m R_j + m = n$ معلوم فرض شده‌اند. در

زمان نخستین شکست $X_{1:m:n}$ ، به طور تصادفی

R_1 واحد از $n-1$ واحد موجود حذف می‌شوند. در

زمان دومین شکست $X_{2:m:n}$ ، به طور تصادفی

واحد از $n-2-R_1$ واحد موجود حذف می‌شوند.

این آزمون تا زمان m امین شکست $X_{m:m:n}$ ادامه

پیدا می‌کند و در این زمان، تمام واحدهای باقیمانده

که تعداد آن‌ها برابر R_j برای $j=1, \dots, m-1$

است، حذف می‌شوند. مجموعه طول عمرهای مشاهده

شده‌ی $X = (X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$

یک نمونه‌ی سانسور راست فزاینده‌ی نوع II است.

برای جزئیات بیشتر می‌توان به بالاکریشنان و آگاروالا

^۶ [۵] و بالاکریشنان [۴] مراجعه کرد. اگر $R_1 =$

^۴ Herd

^۵ Cohen

^۶ Balakrishnan and Aggarwala

با مساوی صفر قرار دادن مشتقات تابع لگاریتم درستمایی نسبت به α و λ ، معادلات درستمایی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \ln L(\lambda, \alpha)}{\partial \alpha} \\ &= \frac{m\lambda}{\alpha} - \lambda\alpha^{\lambda-1} \sum_{i=1}^m (R_i + 1)x_i^\lambda \\ &= 0, \end{aligned} \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \ln L(\lambda, \alpha)}{\partial \lambda} \\ &= m \ln \alpha + \frac{m}{\lambda} + \sum_{i=1}^m \ln x_i \\ & \quad - \sum_{i=1}^m (R_i + 1)(\alpha x_i)^\lambda \ln(\alpha x_i) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (۵)$$

با حل معادله درستمایی (۴) بر حسب α ، داریم:

$$\alpha = \left(\frac{m}{\sum_{i=1}^m (R_i + 1)x_i^\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}}, \quad (۶)$$

با استفاده از جایگذاری (۶) در معادله درستمایی

(۵)، برآورد λ از معادله زیر به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & -\frac{m \sum_{i=1}^m (R_i + 1)x_i^\lambda \ln x_i}{\sum_{i=1}^m (R_i + 1)x_i^\lambda} \\ & + \frac{m}{\lambda} + \sum_{i=1}^m \ln x_i = 0. \end{aligned} \quad (۷)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، حل معادله (۷)

به منظور محاسبه برآورد λ کار دشواری است، بنابراین محاسبه $\hat{\lambda}$ توسط نرم‌افزار و به وسیله روش‌های حل عددی، به ویژه روش نیوتون رافسون صورت می‌گیرد. با جایگذاری $\hat{\lambda}$ در (۶) برآورد α به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} F(x; \lambda, \alpha) &= 1 - e^{-(\alpha x)^\lambda}, \\ x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0, \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن λ پارامتر شکل و α پارامتر مقیاس است. در این مقاله، در بخش دوم برآورد ML، در بخش سوم برآورد AML و در بخش چهارم برآورد وارون پارامترهای λ و α توزیع وایبل محاسبه شده‌اند. در بخش پنجم، به کمک روش‌های شبیه‌سازی‌های سه روش معرفی شده فوق مورد مقایسه قرار می‌گیرند و در پایان نیز مثال‌های عددی بیان می‌گردند.

۲ برآورد ML پارامترهای توزیع

وایبل بر مبنای سانسور راست

فزاینده نوع II

در این بخش، MLE پارامترهای شکل و مکان توزیع وایبل را بر مبنای سانسور راست پیشرونده نوع II، محاسبه خواهیم کرد. تابع چگالی احتمال توأم زمان‌های شکست در توزیع وایبل بر اساس روابط (۱)، (۲) و (۳) عبارت است از:

$$\begin{aligned} & f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, \dots, x_m) \\ &= c \alpha^{m\lambda} \lambda^m \left(\prod_{i=1}^m x_i \right)^{\lambda-1} \\ & \quad \times e^{-\sum_{i=1}^m (\alpha x_i)^\lambda} e^{-\sum_{i=1}^m R_i (\alpha x_i)^\lambda}. \end{aligned}$$

۳ برآورد AML پارامترهای توزیع می‌شود.

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \exp\left(-e^{\frac{y-\mu}{\sigma}}\right),$$

$$-\infty < y < +\infty, \mu \in R, \sigma > 0,$$

وایبل بر مبنای سانسور راست

فزاینده‌ی نوع II

$$F(y; \mu, \sigma) = 1 - \exp\left(-e^{\frac{y-\mu}{\sigma}}\right),$$

$$-\infty < y < +\infty, \mu \in R, \sigma > 0.$$

در این بخش با استفاده از روش AMLE پارامترهای

توزیع وایبل را برآورد می‌کنیم. این روش اولین بار

توسط بالا کریشن [۱، ۲ و ۳] معرفی گردید. برای

محاسبه‌ی برآورد پارامترهای توزیع وایبل به روش

AMLE، از تغییر متغیرهای زیر استفاده کرده و

توزیع وایبل را به توزیع کرانگین^۷ تبدیل می‌کنیم،

سپس برآورد AML پارامترهای توزیع کرانگین را

به دست آورده و با استفاده از تغییر متغیر اولیه، برآورد

AML پارامترهای توزیع وایبل را برآورد می‌کنیم.

در این زمینه به سلطان و همکاران^۸ [۱۲] مراجعه

شود. قرار می‌دهیم:

تابع درستنمایی بر مبنای نمونه‌ی

$$y_{m:m:n}, \dots, y_{2:m:n}, y_{1:m:n}$$

عبارت است از:

$$L(\mu, \sigma)$$

$$= f_{z_{1:m:n}, z_{2:m:n}, \dots, z_{m:m:n}}(z_1, z_2, \dots, z_m)$$

$$= c \left(\frac{1}{\sigma}\right)^m$$

$$\times \prod_{i=1}^m f(z_{i:m:n}) (1 - F(z_{i:m:n}))^{R_i}.$$

که در آن $z_{i:m:n} = \frac{y_{i:m:n} - \mu}{\sigma}$ بر مبنای مشتقات

جزئی لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به μ و σ ،

معادلات درستنمایی برای μ و σ به صورت زیر

حاصل می‌شوند.

$$Y = \ln X \rightarrow X = e^Y,$$

$$\mu = \ln \frac{1}{\alpha} \rightarrow \alpha = e^{-\mu},$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{1}{\sigma}.$$

در این صورت توزیع وایبل به توزیع کرانگین با

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی زیر تبدیل

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma} \left[\sum_{i=1}^m \frac{f'(z_{i:m:n})}{f(z_{i:m:n})} \right]$$

$$- \sum_{i=1}^m R_i \frac{f(z_{i:m:n})}{1 - F(z_{i:m:n})}]$$

$$= 0, \quad (\lambda)$$

^۷Extreme Value

^۸Sultan et al

$$E(U_{i:m:n}) = 1 - \prod_{j=m-i+1}^m \alpha_j, \quad \text{و} \quad \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{m}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m \frac{f'(z_{i:m:n})}{f(z_{i:m:n})} (y_{i:m:n} - \mu) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m R_i \frac{f'(z_{i:m:n})}{1 - F(z_{i:m:n})} (y_{i:m:n} - \mu) = 0, \quad (9)$$

$$\alpha_j = \frac{j + \sum_{i=m-j+1}^m R_i}{1 + j + \sum_{i=m-j+1}^m R_i}, \quad \text{که در آن}$$

$$j = 1, \dots, m.$$

بنابراین تقریب‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{f'(z_{i:m:n})}{f(z_{i:m:n})} \approx a_i + b_i z_{i:m:n}, \quad (11)$$

$$\frac{f(z_{i:m:n})}{1 - F(z_{i:m:n})} \approx a_i + d_i z_{i:m:n}, \quad (12)$$

که در آن‌ها

$$a_i = 1 - e^{\xi_i} + \xi_i e^{\xi_i},$$

$$b_i = -e^{\xi_i},$$

$$c_i = e^{\xi_i} - \xi_i e^{\xi_i},$$

$$d_i = e^{\xi_i}.$$

با استفاده از (۸) و (۹) و همچنین روابط بالا، معادلات درست‌نمایی تقریبی برای μ و σ به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \mu} \approx -\frac{1}{\sigma} \left[\sum_{i=1}^m (a_i + b_i z_{i:m:n}) \right] + \frac{1}{\sigma} \left[\sum_{i=1}^m R_i (c_i + d_i z_{i:m:n}) \right] = 0, \quad (13)$$

$$f(z) = e^z \exp(-e^z),$$

$$F(z) = 1 - \exp(-e^z).$$

چون معادلات درست‌نمایی بالا پاسخ‌های صریحی

ندارند، پس از تقریب سری تیلور توابع $\frac{f'(z_{i:m:n})}{f(z_{i:m:n})}$ و

$\frac{f(z_{i:m:n})}{1 - F(z_{i:m:n})}$ حول نقطه‌ی ξ_i استفاده می‌کنیم به طوری که

$$\xi_i = F^{-1}(p_i) = \ln(-\ln(1 - p_i)), \quad (10)$$

و $p_i = 1 - q_i = 1 - \prod_{j=m-i+1}^m \alpha_j$ علت انتخاب p_i ها به صورت فوق در کتاب بالا کریشانان

و آگاروالا [۵] این گونه بیان گردیده است که:

اگر $U_{i:m:n}, i = 1, \dots, m$ یک نمونه سانسور

راست فزاینده‌ی نوع II از توزیع $U(0, 1)$ و با حجم

نمونه‌ی n و طرح سانسور R_1, R_2, \dots, R_m باشد،

در این صورت $V_i, i = 1, \dots, m$ متغیرهای

تصادفی مستقل از هم هستند و

$$V_i \sim \text{Beta}\left(i + \sum_{j=m-i+1}^m R_j, 1\right), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\begin{aligned}
 B &= \sum_{i=1}^m (a_i - R_i c_i)(y_{i:m:n} - W) - 2 \sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i)(y_{i:m:n} - W)U, \\
 C &= \sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i)(y_{i:m:n} - W)^2 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} &\simeq \frac{-1}{\sigma} \left[m + \sum_{i=1}^m (a_i + b_i z_{i:m:n}) z_{i:m:n} \right] \\
 &+ \frac{1}{\sigma} \left[\sum_{i=1}^m R_i (c_i + d_i z_{i:m:n}) z_{i:m:n} \right]
 \end{aligned}$$

$$\tag{۱۴}$$

به وسیله‌ی حل (۱۳)، برآورد AML پارامتر μ

عبارت است از:

از حل معادله‌ی درجه‌ی دوم (۱۴) دو ریشه به دست خواهد آمد که با توجه به شرط $C < 0$ تنها یکی از آن‌ها پذیرفتنی است، یعنی

$$\tilde{\mu} = \tilde{\sigma}U + W, \tag{۱۵}$$

که در آن

$$\tilde{\sigma} = \frac{\left(-B + (B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}} \right)}{2A}. \tag{۱۷}$$

۴ برآورد وارون پارامترهای λ

$$U = \frac{\sum_{i=1}^m (a_i - R_i c_i)}{\sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i)},$$

α و

$$W = \frac{\sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i) y_{i:m:n}}{\sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i)},$$

در این بخش، برآوردگرهای وارون برای هر دو پارامتر

شکل و مقیاس معرفی می‌شوند. برای برآورد پارامترهای

حال با جایگذاری (۱۵) در (۱۴) معادله‌ی زیر λ و α ، خواص شناخته شده‌ی زیر از آماره‌های

حاصل می‌گردد

ترتیبی مورد نیاز است:

$$A\sigma^2 + B\sigma + C = 0, \tag{۱۶}$$

اگر (I)

$$V_{i:m:n} = -\log(1 - F(X_{i:m:n}; \alpha, \lambda)),$$

که در آن

$$i = 1, \dots, m$$

آن‌گاه $V_{m:m:n}, \dots, V_{1:m:n}$ یک نمونه‌ی

سانسور راست فزاینده‌ی نوع II از توزیع

$$\begin{aligned}
 A &= m + \sum_{i=1}^m (a_i - R_i c_i)U \\
 &+ \sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i)U^2,
 \end{aligned}$$

نمایی استاندارد با اندازه‌ی نمونه‌ی n و طرح استفتزی^{۱۰} [۱۱] یافت کرد.
 سانسور $R = (R_1, \dots, R_m)$ است. توجه اکنون برای برآورد پارامتر λ ، به کمیت محوری زیر داشته باشید که در توزیع وایبل داریم: توجه کنید

$$V_{i:m:n} = (\alpha X_{i:m:n})^\lambda.$$

$$\begin{aligned} W(\lambda) & \quad (18) & \quad \text{اگر (II)} \\ & = \sum_{i=1}^{m-1} (-2 \log U_{(i)}) & W_1 = nV_{1:m:m}, \\ & = 2 \sum_{i=1}^{m-1} \log\left(\frac{S_m}{S_i}\right) & W_i = [n - \sum_{j=1}^{i-1} (R_j + 1)](V_{i:m:n} - V_{i-1:m:n}), \\ & = 2 \sum_{i=1}^{m-1} \log\left\{\left(\sum_{j=1}^m (R_j + 1)V_{j:m:n}\right) / \right. & \quad i = 2, \dots, m \\ & \quad \left. \left(\sum_{j=1}^i (R_j + 1)V_{j:m:n} + \right. \right. & \text{آن‌گاه } W_m, \dots, W_1 \text{ متغیرهای تصادفی} \\ & \quad \left. \left. [n - \sum_{j=1}^i (R_j + 1)]V_{i:m:n}\right)\right\} & \text{نمایی استاندارد مستقل از هم هستند.} \\ & = 2 \sum_{i=1}^{m-1} \log\left\{\left(\sum_{j=1}^m (R_j + 1)X_{j:m:n}^\lambda\right) / \right. & \quad \text{اگر (III)} \\ & \quad \left. \left(\sum_{j=1}^i (R_j + 1)X_{j:m:n}^\lambda + \right. \right. & S_i = \sum_{j=1}^i W_j, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \quad \left. \left. [n - \sum_{j=1}^i (R_j + 1)]X_{i:m:n}^\lambda\right)\right\}. & U_{(i)} = \frac{S_i}{S_m}, \quad i = 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

رابطه‌ی (۱۸) نشان می‌دهد که در توزیع وایبل، W تابعی از λ است و به α بستگی ندارد. واضح است که $W(\lambda)$ می‌تواند هر مقدار مثبتی را اختیار کند. علاوه بر این، $W(\lambda)$ دارای توزیع کیدو با

آن‌گاه $U_{(1)} < \dots < U_{(m-1)}$ آماره‌های ترتیبی از توزیع یکنواخت $(0, 1)$ با حجم نمونه‌ی $m - 1$ هستند. توجه کنید که

$$\begin{aligned} S_i & = \sum_{j=1}^i (R_j + 1)V_{j:m:n} \\ & \quad + [n - \sum_{j=1}^i (R_j + 1)]V_{i:m:n}, \\ & \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

مورد اول واضح است. مورد دوم را می‌توان در وایوروس^۹ و بالاکریشن^[۱۳] و مورد سوم را در

^{۱۰} Stephens

^۹ Viveros

۵ بررسی شبیه سازی

زیرا $2(m-1)$ درجه‌ی آزادی است.

برای ارزیابی خواص نمونه‌ی متناهی روش‌های پیشنهاد شده، مطالعه‌ای با استفاده از شبیه سازی برای مقایسه‌ی نحوه‌ی عمل کرد برآوردهای نقطه‌ای (IE) پارامترها

$$W(\lambda) = \sum_{i=1}^{m-1} (-2 \log U_{(i)}) \\ = \sum_{i=1}^{m-1} (-2 \log U_i)$$

با برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم و برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم تقریبی در مورد توزیع وایبل U_{m-1}, \dots, U_1 یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $(0, 1)$ است.

چون $W(\lambda)$ دارای توزیع χ^2 با $2(m-1)$ درجه‌ی آزادی است، $\frac{W(\lambda)}{2(m-2)}$ با احتمال یک به 1 همگرا می‌شود. بنابراین، می‌توانیم برای λ برآوردگر نقطه‌ای متناظر آن یعنی $\hat{\lambda}$ را با استفاده از معادله‌ی زیر به‌دست آوریم.

$$W(\hat{\lambda}) = 2(m-2). \quad (19)$$

نمونه‌های سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع II از توزیع وایبل، از الگوریتم معرفی شده در بالا کریشن و سندهو^{۱۳} [۶] استفاده می‌کنیم.

با استفاده از نتایج به‌دست آمده از معادله‌ی (18)،

اریبی‌ها و میانگین مربع خطا (MSE) در برآورد نقطه‌ای λ و α برای بیش از 10000 بار تکرار محاسبه شده و نتایج آن در جداول ۱ تا ۴ نشان داده شده است. از بررسی این جداول، می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که: اربیبی‌ها و MSE‌های روش

معادله‌ی (19) پاسخ یکتایی دارد.

همچنین، بار دیگر با استفاده از این حقیقت که $2S_m$ دارای توزیع χ^2 با $2(m)$ درجه‌ی آزادی است، برآوردگر $\hat{\alpha}$ را برای α از معادله‌ی زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{m-1}{\sum_{j=1}^m (R_j + 1) X_{j:m:n}^{\hat{\lambda}}} \right)^{1/\hat{\lambda}}. \quad (20)$$

IE همواره کمتر از اربیبی‌ها و MSE‌های دو روش MLE و AMLE می‌باشد، همچنین در اغلب موارد

برآوردهای به‌دست آمده توسط (19) و (20)،

اریبی‌ها و MSE‌های روش MLE کمتر از روش AMLE است. بنابراین می‌توان این‌گونه نتیجه گرفت

[۱۴] () نامیده می‌شوند.

^{۱۱}Variant

^{۱۳}Sandhu

^{۱۱}Wang

که روش IE همواره بهتر از روش های MLE و برآوردهای حاصل از سه روش عبارت اند از:

$$\hat{\lambda}_{IE} = 0.7683 \quad \hat{\alpha}_{IE} = 0.0056, \quad \text{AMLE است.}$$

$$\hat{\lambda}_{MLE} = 1.7496 \quad \hat{\alpha}_{MLE} = 0.5716,$$

$$\hat{\lambda}_{AMLE} = 1.3962 \quad \hat{\alpha}_{AMLE} = 0.2569.$$

۱.۵ دو مثال تشریحی

کاملاً واضح است که برآوردهای واورن پارامترهای

در این جا برای بررسی بهتر نتایج فوق دو مثال زیر مطرح می گردد. α و λ از برآوردهای ML و AML نشان مناسب ترند و نسبت به آن ها برتری دارند زیرا برآوردهای واورن

به IE های مبتنی بر داده های کامل یعنی **مثال ۱.۵.** (لینهارت^{۱۴} و زوجینی^{۱۵} [۱۰]) مجموعه

$$\alpha_{IE} = 0.0178, \quad \lambda_{IE} = 0.8308$$

داده های زیر، زمان های شکست سیستم تهویه هوای یک هواپیما می باشد که این داده ها توسط گوپتا^{۱۶} و کوندو^{۱۷} [۸] نیز مورد بررسی قرار گرفته اند. کامل عبارت اند از:

$$\alpha_{MLE} = 0.0183 \quad \lambda_{MLE} = 0.8536, \quad 1, 3, 5, 7, 11, 11, 11, 12, 14, 14, 14, 16,$$

$$\alpha_{AMLE} = 1.2182 \quad \lambda_{AMLE} = 0.6313 \quad 16, 20, 21, 23, 42, 47, 52, 62, 71, 71, 87,$$

مثال ۲.۵. در این مثال یک نمونه ی سانسور فزاینده ی

نوع II با $n = 20$ و $m = 5$ با طرح سانسور نمونه ی سانسور راست فزاینده ی نوع II با $n = 30$ و $m = 10$ و طرح سانسور

$$R = (5, 0, 5, 0, 5)$$

شرط که $\lambda = 1.5$ و $\alpha = 1$ در این صورت نمونه ی

$$R = (10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 10)$$

$$0.3197 \quad 0.03211 \quad 0.4019 \quad 0.4290 \quad 0.7721$$

و برآوردهای حاصل از سه روش عبارت اند از:

$$\hat{\lambda}_{IE} = 1.8968 \quad \hat{\alpha}_{IE} = 0.8262,$$

$$\hat{\lambda}_{MLE} = 2.4763 \quad \hat{\alpha}_{MLE} = 1.0599,$$

$$\hat{\lambda}_{AMLE} = 2.1511 \quad \hat{\alpha}_{AMLE} = 0.2274.$$

^{۱۴}Linhart

^{۱۵}Zucchini

^{۱۶}Gupta

^{۱۷}Kundu

جدول ۱: اریبی‌های برآوردگرهای توزیع وایبل با پارامترهای $\alpha = 1$ و $\lambda = 1$

(n,m)	(R_1, \dots, R_m)	α			λ		
		IE	MLE	AMLE	IE	MLE	AMLE
(10, 5)	$(0, \dots, 0, 5)$	-0.1142	0.4181	-0.8136	-0.0139	0.5543	-0.5576
	$(5, 0, \dots, 0)$	0.0318	0.2902	0.2116	-0.0325	0.2814	0.5765
	$(1, 1, \dots, 1)$	-0.0624	0.3604	-0.3541	-0.0111	0.4325	0.0767
(10, 8)	$(0, \dots, 0, 2)$	-0.0025	0.1550	-0.2690	-0.0060	0.2478	0.0158
	$(2, 0, \dots, 0)$	0.0491	0.1433	0.1978	-0.0179	0.1930	0.1758
(20, 10)	$(0, \dots, 0, 10)$	-0.0454	0.1836	-0.8938	-0.0042	0.2122	-0.1880
	$(10, 0, \dots, 0)$	0.0400	0.1250	0.0883	-0.0140	0.1151	0.2337
	$(1, 1, \dots, 1)$	-0.0123	0.1574	-0.4429	-0.1123	0.1640	-0.0482
(20, 15)	$(0, \dots, 0, 5)$	-0.0030	0.0806	-0.4649	-0.0014	0.1213	-0.1650
	$(5, 0, \dots, 0)$	0.0310	0.0698	0.1065	-0.0097	0.0915	0.0395
(30, 10)	$(0, \dots, 0, 20)$	-0.0926	0.2680	-0.3017	-0.0863	0.2243	-0.2355
	$(20, 0, \dots, 0)$	0.0513	0.1332	0.0569	-0.0131	0.0931	0.3147
	$(2, 2, \dots, 2)$	-0.0571	0.2073	-0.4568	-0.0154	0.1650	0.1476
(30, 15)	$(0, \dots, 0, 15)$	-0.0241	0.1196	-0.7803	-0.0029	0.1338	-0.2653
	$(15, 0, \dots, 0)$	0.0275	0.0770	0.0571	-0.0128	0.0764	0.1601
	$(1, 1, \dots, 1)$	-0.0046	0.1013	-0.4353	-0.0061	0.1047	0.0959
(30, 20)	$(0, \dots, 0, 10)$	-0.0083	0.0644	-0.7810	-0.0035	0.0913	-0.2664
	$(10, 0, \dots, 0)$	0.0244	0.0503	0.0598	-0.0078	0.0644	0.1589
	$(5, 0, \dots, 0, 5)$	0.0035	0.0501	-0.4721	-0.0075	0.0792	-0.1303
(50, 12)	$(0, \dots, 0, 38)$	-0.0376	0.2878	-0.5799	-0.0005	0.1831	-0.6489
	$(38, 0, \dots, 0)$	0.0313	0.1095	0.3547	-0.0165	0.0672	-0.5439
(50, 20)	$(0, \dots, 0, 30)$	-0.0176	0.1062	0.8528	-0.0026	0.0950	-0.6363
	$(30, 0, \dots, 0)$	0.0194	0.0552	0.2559	-0.0081	0.0525	-0.4147
(50, 25)	$(0, \dots, 0, 25)$	-0.0161	0.0668	0.8203	-0.0017	0.0758	0.3332
	$(25, 0, \dots, 0)$	0.0185	0.0413	0.0321	-0.0052	0.0450	0.0995
	$(1, 1, \dots, 1)$	-0.0011	0.0556	-0.4621	-0.0057	0.0580	0.0549

جدول ۲: MSE های برآوردگرهای توزیع وایبل با پارامترهای $\lambda = 1$ و $\alpha = 1$

(n,m)	(R_1, \dots, R_m)	α			λ		
		IE	MLE	AMLE	IE	MLE	AMLE
(10, 5)	(0, ..., 0, 5)	0.4746	0.9670	0.6986	0.3746	1.2764	0.3772
	(5, 0, ..., 0)	0.3580	0.6475	0.5354	0.1710	0.3780	1.1040
	(1, 1, ..., 1)	0.4030	0.7959	0.2695	0.2982	0.8030	0.3434
(10, 8)	(0, ..., 0, 2)	0.1669	0.2496	0.1642	0.1541	0.2771	0.1288
	(2, 0, ..., 0)	0.1915	0.2551	0.3262	0.1035	0.1871	0.2138
(20, 10)	(0, ..., 0, 10)	0.1626	0.2420	0.8053	0.1217	0.2311	0.4416
	(10, 0, ..., 0)	0.1458	0.1772	0.1713	0.0609	0.0935	0.1937
	(1, 1, ..., 1)	0.1435	0.1996	0.2397	0.0925	0.1503	0.0856
(20, 15)	(0, ..., 0, 5)	0.0781	0.0976	0.2418	0.0633	0.0940	0.0660
	(5, 0, ..., 0)	0.0897	0.0995	0.1181	0.0465	0.0633	0.0610
(30, 10)	(0, ..., 0, 20)	0.2626	0.4091	0.7651	0.1405	0.2524	0.1173
	(20, 0, ..., 0)	0.1589	0.1810	0.1592	0.2610	0.0742	0.2618
	(2, 2, ..., 2)	0.3487	0.2783	0.2460	0.0238	0.1514	0.1403
(30, 15)	(0, ..., 0, 15)	0.1004	0.1351	0.6176	0.0697	0.1082	0.1021
	(15, 0, ..., 0)	0.0858	0.0996	0.1017	0.0386	0.0512	0.0982
	(1, 1, ..., 1)	0.0864	0.1106	0.2158	0.0549	0.0741	0.0706
(30, 20)	(0, ..., 0, 10)	0.0569	0.0683	0.6119	0.0446	0.0641	0.1024
	(10, 0, ..., 0)	0.0628	0.0677	0.1029	0.0322	0.0401	0.0968
	(5, 0, ..., 0, 5)	0.0552	0.0652	0.2484	0.0389	0.0534	0.0597
(50, 12)	(0, ..., 0, 38)	0.2871	0.4530	0.8182	0.1051	0.1771	0.4303
	(38, 0, ..., 0)	0.1104	0.1395	0.8692	0.0390	0.0496	0.3217
(50, 20)	(0, ..., 0, 30)	0.0902	0.1136	0.7312	0.0547	0.0733	0.4099
	(30, 0, ..., 0)	0.0604	0.0675	0.2605	0.0274	0.0333	0.1975
(50, 25)	(0, ..., 0, 25)	0.0543	0.0647	0.6773	0.0393	0.0512	0.1266
	(25, 0, ..., 0)	0.0477	0.0510	0.0526	0.0233	0.0274	0.0459
	(1, 1, ..., 1)	0.0488	0.0521	0.2273	0.0286	0.0351	0.0333

جدول ۳: اربیی‌های برآوردگرهای توزیع وایبل با پارامترهای $\lambda = 2$ و $\alpha = 1$

(n,m)	(R_1, \dots, R_m)	α			λ		
		IE	MLE	AMLE	IE	MLE	AMLE
(10, 5)	$(0, \dots, 0, 5)$	-0.1112	0.1471	-0.7958	-0.0550	0.5546	-0.9163
	$(5, 0, \dots, 0)$	-0.0212	0.0954	-0.3813	-0.0769	0.2817	-0.4303
	$(1, 1, \dots, 1)$	-0.0794	0.1277	-0.6356	-0.0493	0.4320	-0.5890
(10, 8)	$(0, \dots, 0, 2)$	-0.0162	0.0558	-0.6369	-0.0314	0.2443	-0.9789
	$(2, 0, \dots, 0)$	0.0025	0.0417	-0.4036	-0.0205	0.1952	-0.7658
(20, 10)	$(0, \dots, 0, 10)$	-0.0412	0.0611	-0.8682	-0.0068	0.2158	-1.1891
	$(10, 0, \dots, 0)$	0.0024	0.0437	-0.4549	-0.0334	0.1116	-0.7569
	$(1, 1, \dots, 1)$	-0.0267	0.0614	-0.6996	-0.0196	0.1683	-0.8484
(20, 15)	$(0, \dots, 0, 5)$	-0.0066	0.0330	-0.7325	-0.0069	0.1229	-0.5674
	$(5, 0, \dots, 0)$	0.0038	0.0254	0.4589	-0.0071	0.0913	-0.8839
(30, 10)	$(0, \dots, 0, 20)$	-0.0582	0.0961	-0.9251	-0.0124	0.2245	-1.2364
	$(20, 0, \dots, 0)$	0.0020	0.0497	-0.4768	-0.0440	0.0940	-0.6798
	$(2, 2, \dots, 2)$	-0.0391	0.0787	-0.7916	-0.0251	0.1634	-0.8523
(30, 15)	$(0, \dots, 0, 15)$	-0.0257	0.0441	-0.8906	-0.0043	0.1343	-1.2674
	$(15, 0, \dots, 0)$	0.0055	0.0463	-0.4693	-0.0191	0.0744	-0.8332
	$(1, 1, \dots, 1)$	-0.0151	0.0335	-0.7171	-0.0168	0.1191	-0.9084
(30, 20)	$(0, \dots, 0, 10)$	-0.0129	0.0216	-0.8111	-0.0014	0.0918	-1.0415
	$(10, 0, \dots, 0)$	0.0056	0.0196	0.4682	-0.0034	0.0632	-0.9043
	$(5, 0, \dots, 0, 5)$	-0.0029	0.0218	-0.7062	-0.0058	0.0741	-1.0500
(50, 12)	$(0, \dots, 0, 38)$	-0.0504	0.1064	-0.9672	-0.0022	0.1831	-1.0981
	$(38, 0, \dots, 0)$	0.0021	0.0422	-0.4943	-0.0389	0.0674	-0.6873
(50, 20)	$(0, \dots, 0, 30)$	-0.0230	0.0412	-0.9401	-0.0059	0.0636	-1.3382
	$(30, 0, \dots, 0)$	0.0034	0.0216	-0.4889	-0.0069	0.0521	-0.8581
(50, 25)	$(0, \dots, 0, 25)$	-0.0141	0.0236	-0.9301	-0.0036	0.0753	-1.3326
	$(25, 0, \dots, 0)$	0.0044	0.0148	-0.4864	-0.0064	0.0439	-0.9016
	$(1, 1, \dots, 1)$	-0.0091	0.0207	-0.7306	-0.0078	0.0566	-0.9476

جدول ۴: MSE های برآوردگرهای توزیع وایبل با پارامترهای $\lambda = 2$ و $\alpha = 1$

(n,m)	(R_1, \dots, R_m)	α			λ		
		IE	MLE	AMLE	IE	MLE	AMLE
(10, 5)	(0, ..., 0, 5)	0.1065	0.1301	0.6547	0.3880	1.2749	1.2391
	(5, 0, ..., 0)	0.0655	0.0501	0.2874	0.1751	0.3791	0.9842
	(1, 1, ..., 1)	0.0819	0.1040	0.4532	0.1354	0.8039	0.9199
(10, 8)	(0, ..., 0, 2)	0.0359	0.0417	0.4285	0.1579	0.2794	1.0938
	(2, 0, ..., 0)	0.379	0.0428	0.2309	0.1024	0.1812	0.7715
(20, 10)	(0, ..., 0, 10)	0.0387	0.0463	0.7582	0.1247	0.2318	1.4767
	(10, 0, ..., 0)	0.0289	0.0346	0.2488	0.0651	0.0944	0.7127
	(1, 1, ..., 1)	0.0319	0.0392	0.5013	0.0934	0.1507	0.8394
(20, 15)	(0, ..., 0, 5)	0.0184	0.0214	0.5431	0.0727	0.0956	0.3767
	(5, 0, ..., 0)	0.0187	0.0203	0.2365	0.0483	0.0637	0.8459
(30, 10)	(0, ..., 0, 20)	0.0625	0.0691	0.8764	0.1518	0.2541	1.5861
	(20, 0, ..., 0)	0.0291	0.0331	0.2656	0.0547	0.0710	0.6262
	(2, 2, ..., 2)	0.0409	0.0463	0.6337	0.0869	0.1511	0.8412
(30, 15)	(0, ..., 0, 15)	0.0238	0.0232	0.7956	0.0784	0.1078	1.3904
	(15, 0, ..., 0)	0.0193	0.0219	0.2451	0.0354	0.0532	0.7717
	(1, 1, ..., 1)	0.0187	0.0257	0.5208	0.0539	0.0692	0.8882
(30, 20)	(0, ..., 0, 10)	0.0138	0.0239	0.6609	0.0558	0.0751	1.2656
	(10, 0, ..., 0)	0.0142	0.0149	0.2362	0.0295	0.0421	0.08642
	(5, 0, ..., 0, 5)	0.0133	0.0154	0.5042	0.0634	0.0532	1.1963
(50, 12)	(0, ..., 0, 38)	0.0690	0.0749	0.9360	0.1409	0.1765	1.2397
	(38, 0, ..., 0)	0.0233	0.0272	0.2727	0.0356	0.0478	0.5982
(50, 20)	(0, ..., 0, 30)	0.0221	0.0231	0.8846	0.0570	0.0719	1.6099
	(30, 0, ..., 0)	0.0139	0.0135	0.2557	0.0267	0.0324	0.7854
(50, 25)	(0, ..., 0, 25)	0.0133	0.0146	0.8297	0.0297	0.0333	1.5912
	(25, 0, ..., 0)	0.0112	0.0116	0.2495	0.0262	0.0289	0.8486
	(1, 1, ..., 1)	0.0111	0.0125	0.5372	0.0582	0.03414	0.9294

مراجع

- [1] Balakrishnan, N. (1989a), Approximate MLE of the Scale Parameter of the Rayleigh Distribution with Censoring, *IEEE Transactions on Rayleigh*, 38, 355-357.
- [2] Balakrishnan, N. (1989b), Approximate Maximum Likelihood Estimation of the Mean and Standard Deviation of the Normal Distribution based on Type II Censored Samples, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 32, 137-148.
- [3] Balakrishnan, N. (1990a), Maximum Likelihood Estimation based on Complete and Type II Censored Samples, *The Logistic Distribution*, (ed. Balakrishnan, N.), Marcel Dekker, New York.
- [4] Balakrishnan, N. (2007), Progressive censoring methodology: an appraisal, *Test*, 16, 211-259.
- [5] Balakrishnan, N., Aggarwala, R. (2000), *Progressive Censoring: Theory, Methods, and Applications*, Boston: Birkhauser
- [6] Balakrishnan, N., Sandhu R.A. (1995), A Simple Simulational Algorithm for Generating Progressive Type-II Censored Samples, *The American Statistician*, 49, 229-230.
- [7] Cohen, A.C. (1963), Progressively Censored Samples in Life Testing, *Technometrics*, 5, 327-329.
- [8] Gupta, R.D, Kundu, D. (2001), Exponentiated Exponential Family: An Alternative to Gamma and Weibull Distribution, *Biometrical Journal*, 43, 117-130.

- [9] Herd, R.G. (1956). *Estimation of the Parameters of a Population from a Multi-Censored Samples*, Ph.D. Thesis, Iowa State College, Ames, Iowa.
- [10] Linhart, H., Zucchini, W. (1986): *Model Selection*. Wiley, New York.
- [11] Stephens, M. (1986), *Tests for the Exponential Distribution*. In: D'Agostino R.B. and Stephens M. (Eds), *Goodness-of-fit techniques*, 421-459, Marcel Dekker, New York.
- [12] Sultan, K.S., Mahmoud, M.R., Saleh, H.M. (2007), Estimation of Parameters of the Weibull Distribution Based on Exponential Distribution from Censored Samples. *Technometrics*, 9, 279-292.
- [13] Viverose, R., Balakrishnan, N. (1994), Interval estimation of parameters of life from progressively censored data, *Technometrics*, 36, 84-91.
- [14] Wang, B.X. (1992), Statistical Inference for Weibull Distribution, *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 8, 357-364.