اندیشه آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۱، شماره پیاپی ۳۳

سال هفدهم شماره اول، ص ۴۴-۵۴

طرح تفکیک منجر به نمونه گیری تصادفی ساده

سمیرا جلایری [۱] ، عبدالحمید رضایی رکن آبادی [۲] ، غلام رضا محتشمی برزادران [۳]

چکیده:

اجرای نمونه گیری با احتمالات متغیر به شیوه بدون جایگذاری، علیرغم اهمیت آن بسیار پیچیده است و روش‌های متعددی برای اجرای آن پیشنهاد شده است ازجمله: طرح میدزونو وطرح سیستماتیک . یکی از روش‌هایی که در سال‌های اخیر توسط دویل و تایل (۱۹۹۸) [۴] معرفی شده است. روش تفکیکی منجر به نمونه گیری تصادفی ساده است که در این مقاله ضمن تشریح کامل این طرح، با بیان مثالی، نحوهٔ محاسبه احتمال هر یک از نمونه‌های ممکن را بیان نموده و با استفاده از نرم افزار R برنامهٔ اجرای آن را ارائه نموده ایم. شایان ذکر است این طرح را می توان با استفاده از برنامه مربوطه در جوامع مختلف پس از تعیین احتمالات شمول دلخواه، اجرانمود.

واژه‌های کلیدی: تفکیک کردن، برداراحتمال شمول، خروجی، درخت تفکیک، تابع احتمال .

[۱] دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد- دانشکده علوم- گروه آمار- $samirajalayeri@yahoo.com$

[۲] دانشگاه فردوسی مشهد- دانشکده علوم ریاضی- گروه آمار- $rezaei@um.ac.ir$

[۳] دانشگاه فردوسی مشهد- دانشکده علوم ریاضی- گروه آمار- $gmb1334@yahoo.com$

[۴] Devill and Tille

۱ مقدمه

هنسن و هارویتز [5] (۱۹۴۳) نظریه ی نمونه گیری با احتمالات متغیر را به منظور استفاده در طرح نمونه گیری خوشه ای متناسب با حجم (PPS) [6] ارائه نمود. در نمونه گیری با احتمالات متغیر، انتخاب واحدهای جامعه برای شرکت در نمونه، ثابت نیست و معمولاً از واحدی به واحد دیگر تغییر می‌کند. نمونه گیری تصادفی با احتمالات متغیر را می توان به دو روش باجایگذاری و بدون جایگذاری انجام داد. در روش باجایگذاری احتمال انتخاب واحد i -ام برای شرکت در نمونه به همان مقداری است که از قبل مشخص شده، زیرا در هر انتخاب با کل جامعه سروکار داریم، در حالی که در نمونه گیری بدون جایگذاری با وضعی پیچیده تر روبرو هستیم و با انتخاب هر واحد شانس انتخاب دیگر واحدها دائماً تغییر می‌کند. هارویتز و تامپسون [7] (۱۹۵۲) یک روش کلی برای استخراج این نوع نمونه در حالت بدون جایگذاری ارائه نموده و چگونگی یک تخصیص بهینه برای احتمال انتخاب هر یک از اعضا (احتمالات شمول) را مطرح نمودند. روش تفکیک، یک روش کلی برای به‌دست آوردن یک نمونه PPS می باشد که دویل و تایل (۱۹۹۶و۱۹۹۸) در این مورد اطلاعات بیشتری ارائه نمودند. بریور و حنیف [8] (۱۹۸۳) ، هجک[9] (۱۹۸۱) و تایل[10] (۲۰۰۶) نیز نمونه گیری با احتمالات نابرابر در جوامع متناهی را از دیدگاه نظریه اطلاع مورد بررسی قرار داده اند. پی[11] و همکاران (۲۰۰۷) طرح نمونه گیری حداقل پشتیبانی را بپس از مشخص کردن احتمالات شمول اولیه معرفی کردند. ماتئی و تایل[12] (۲۰۰۷) شیوه ای را ارائه نمودند که ترتیب انتخاب نمونه در آن حائز اهمیت است که آن را نمونه گیری PPS ترتیبی نامیدند. فرض کنید Q مجموعهٔ تمام زیر مجموعه‌های X و $P(X)$ توزیع احتمال تعریف شده در Q باشد. توزیع احتمال $\{P(X); X \in Q\}$ را طرح نمونه گیری گویند. در طرح نمونه گیری یک زیرمجموعهٔ X به عنوان یک نمونه تلقی می گردد و همواره $P(X > 0)$ و $\sum_{X\in Q} P(X) = 1$ است. مجموعهٔ کلیه‌ی نمونه‌هایی که احتمال مثبتی برای انتخاب شدن دارند را تکیه گاه طرح گویند. روشی که برای تولید یک نمونه تصادفی به کار می رود، الگوریتم نمونه گیری نامیده می‌شود. شایان ذکر است الگوریتم‌های متمایز می توانند مربوط به اجرای یک طرح نمونه گیری

[5] Hansen and Hurwitz

[6] Probability Proportional to Size

[7] Horvitz and Thompson

[8] Brewer and Hanif

[9] Hajek

[10] Tille

[11] Pea

[12] Matei and Tille

یکسان باشند. رهیافت کلی برای یافتن تابع احتمال یک طرح نمونه گیری در مورد الگوریتم‌هایی به کار می رود که شامل دنباله ای از تصمیم‌هایی هستند که در مورد آن‌ها احتمالات مسیر قابل محاسبه باشند. فرض کنید الگوریتم نمونه گیری متشکل از k تصمیم متوالی D_i، $(i = 1, ..., k)$ باشد. برآمدهای k تصمیم، یک مسیر $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_k)$ را تشکیل می دهند. احتمال چنین مسیری عبارت است از:

$$Pr(\mathbf{D}) = Pr(\mathbf{d}) = pr(D_1 = d_1)\times \prod_{i=2}^{k} Pr(D_i = d_i \mid D_1 = d_1, ..., D_{i-1} = d_{i-1})$$

اگر الگوریتم رد کننده نباشد یعنی هر مسیر به یک نمونه ی $X \in Q$ منجر شود، احتمال به‌دست آوردن X را می توان به صورت

$$P(X) = \sum_{\{\mathbf{d}:\mathbf{d}\Rightarrow X\}} Pr(\mathbf{d}) \ , X \in Q$$

نوشت که در آن جمع روی همه ی مسیرهای $\mathbf{d}$ که نمونه ی X را به‌دست می آورند، صورت گرفته است. اگر الگوریتم، یک شروع مجدد را دربرگیرد یا الگورتیم برطبق آن که تنها نمونه‌های معینی قابل پذیرش هستند، نمونه حاصل را رد کند، یعنی مسیر منجر به یک نمونه ی $X \in Q$ نشود، یک عامل ثابت مانند C برای تغییر مقیاس در اندازه احتمال به صورت $P(X) = C\sum_{\mathbf{d}:\ \mathbf{d}\Rightarrow X} Pr(\mathbf{d})$ مورد نیاز است، که مقدار C از تساوی

$$\sum_{X\in Q} P(X) = 1$$

حاصل می‌گردد. طرح تفکیک منجر به نمونه گیری تصادفی ساده اولین بار به وسیله ی دویل و تایل (۱۹۹۸) معرفی شده بود، سپس این طرح توسط گرفسترم[۱۳] (۲۰۱۰) مورد بررسی قرار گرفت. در این نوشتار نیز این طرح با انجام محاسبات عددی و نرم افزاری ارائه شده است و در مثالی عددی با ساختن درخت تفکیک، تابع احتمال نمونه ی مفروض، محاسبه خواهد شد.

۲ طرح تفکیک منجر به نمونه گیری تصادفی ساده

طرح تفکیک منجر به نمونه گیری تصادفی ساده[۱۴] $(SSRS)$، حالت خاصی از روش تفکیک کلی است. در این طرح بردار احتمال شمول یعنی برداری که احتمال عضویت یکایک اعضای جامعهٔ N عضوی در نمونه n تایی را مشخص می‌کند، به دو روش تفکیک می‌شود که تنها در یکی از آن‌ها، احتمالات شمول برای اجزاء برابر هستند. در روش اول به طور تصادفی انتخاب می‌شوند، اگر برداری که در آن احتمالات شمول برابر هستند انتخاب شود، آنگاه یک نمونه تصادفی ساده داریم و اگر بردار دیگر انتخاب شود، آنگاه یک تفکیک جدید

[۱۳] Grafstrom

[۱۴] Splitting into Simple Random Sampling (SSRS)

انجام می‌دهیم. این عمل را آنقدر ادامه می‌دهیم تا نمونهٔ حاصل یک نمونه تصادفی ساده باشد.

این روش را می توان به شرح زیر توصیف کرد :

فرض کنید $\underline{\pi} = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_N)$ بردار شمول اولیه باشد. در تفکیک اول دو بردار جدید ممکن عبارتند از :

$$\begin{aligned} \underline{\pi}^a &= (\pi_1^a, \pi_2^a, \dots, \pi_N^a) \\ &= (\frac{n}{N}, \frac{n}{N}, \dots, \frac{n}{N}) \end{aligned} \qquad (۱)$$

و

$$\underline{\pi}^b = (\pi_1^b, \pi_2^b, \dots, \pi_N^b) = \frac{\underline{\pi} - \alpha\ \underline{\pi}^a}{1-\alpha} \qquad (۲)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \alpha &= \min[\frac{N}{n}\min_i(\pi_i), \\ &\frac{N}{N-n}\min_i(1-\pi_i)]. \end{aligned} \qquad (۳)$$

$\underline{\pi}^a$ را با احتمال α و $\underline{\pi}^b$ با احتمال $(1-\alpha)$ انتخاب می کنیم. اگر $\underline{\pi}^a$ انتخاب شد، نمونه حاصل تصادفی ساده است و نمونه گیری پایان می پذیرد. در غیر این صورت، مؤلفه‌هایی از $\underline{\pi}^b$ را که دارای مقدار صفر یا یک باشند حذف نموده و تعداد مؤلفه‌های باقیمانده، N جدید را مشخص می‌کند و چون همواره باید $\sum_{i=1}^N \pi_i = n$ باشد، بنابراین n نیز بهنگام می گردد. حال با استفاده از N و n جدید $\underline{\pi}^a$ و $\underline{\pi}^b$ جدید را تشکیل داده و روش را تا حصول تصمیم نهایی برای تعیین شانس انتخاب همه ی واحدها ادامه می‌دهیم.

فرض کنید $E_k, ..., E_2, E_1$ تمامی خروجی‌های ممکن باشد، در این صورت تعداد تفکیک‌ها حداکثر $k-1$ خواهد بود.

حال اگر حداکثر تعداد تفکیک‌هایی که انجام شده است کم تر از N باشد، تابع احتمال طرح $SSRS$ به آسانی محاسبه خواهد شد. در این صورت تابع احتمال را می توان به صورت زیر نوشت:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{k} Pr(X \mid E_i)Pr(E_i) \qquad (۴)$$

حال اگر N_i و n_i به ترتیب حجم جامعه و نمونه در تفکیک (مرحله) i -ام باشد، یعنی

$N_i =$ مؤلفه‌های غیر صفر و یک بردار $\underline{\pi}^b$ در تفکیک i-ام

و

$n_i =$ مجموع مؤلفه‌های غیر صفر و یک بردار $\underline{\pi}^b$ درتفکیک i-ام

برای هر i، $(i = 1, ..., k-1)$ داریم :

$$Pr(X \mid E_i) = \begin{cases} \frac{1}{\binom{N_{i-1}}{n_{i-1}}}, & \text{اگر } X \text{ در خروجی } E_i \text{ قرار گیرد.} \\ 0, & \text{اگر } X \text{ در خروجی } E_i \text{ قرار نگیرد.} \end{cases} \qquad (۵)$$

که در آن N_0 و n_0 به ترتیب حجم جامعه و نمونه در بردار شمول اولیه است. همچنین $Pr(E_i)$ را با اختیار کردن حاصل ضرب احتمالاتی که به E_i منجر می‌شود، به صورت زیر به‌دست می‌آوریم که در آن α_i احتمال انتخاب $\underline{\pi}^a$ در تفکیک i –ام ، برای

$(i=1,...,k-1)$ است.

$$\Pr(E_i) = \begin{cases} \alpha_1 & i=1 \\ \alpha_i \prod_{j=1}^{i-1}(1-\alpha_j) & i=2,...,k-1 \\ \prod_{j=1}^{k-1}(1-\alpha_j) & i=k \end{cases} \tag{۶}$$

برای تشریح بیشتر توضیحات بالا، اینک با ارائه مثال زیر، تابع احتمال یک نمونه ی مفروض را محاسبه نموده و با استفاده از نرم افزار R برنامه ی اجرای آن را ارائه نماییم :

۳ مثال کاربردی

فرض کنید $N=8$، $n=4$ و بردار احتمالات شمول واحدهای جامعه به صورت

$$\underline{\pi}=(\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{3}{4})$$

باشد، که در آن شرط $\sum_{i=1}^{N}\pi_i=n$ برقرار است. جدول (۱) مقادیر N_i، n_i و α_i و محاسبات مربوط به مؤلفه‌های بردار $\underline{\pi}^b$ را در مراحل مختلف این مثال براساس الگوریتم فوق نشان می دهد همچنین در جدول (۲) خروجی‌های ممکن و مسیر منجر به آن‌ها را همراه با مؤلفه‌های بردارهای $\underline{\pi}^a$ و $\underline{\pi}^b$ در مراحل مختلف ملاحظه می نماییم. حال می‌توان احتمال انتخاب یک نمونه را در مثال (۱) با استفاده از رابطه (۲.۴) به شرح زیر محاسبه نمود :

$Q=$ {تمام نمونه‌های ۴ تایی از بین ۸ عضو جامعه}

و تعداد اعضاء Q عبارت است از :

$$\binom{8}{4}=70$$

به عنوان مثال یکی از این نمونه‌های ممکن عبارت است از :

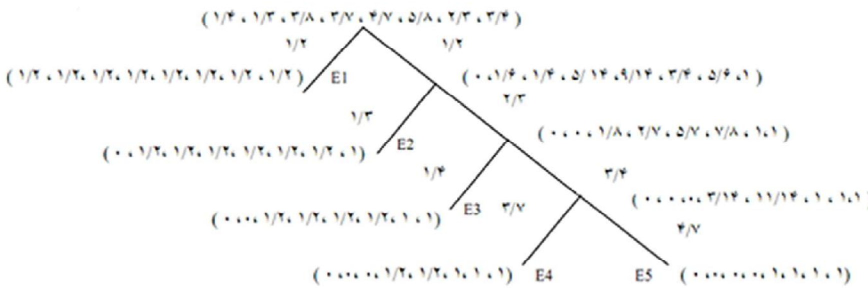
$$\{U_3,U_5,U_7,U_8\}$$

که شانس انتخاب آن در روش تفکیک منجر به نمونه گیری تصادفی ساده به صورت زیر محاسبه می گردد :

چون نمونه فوق متناظر با بردار احتمالات شمول $(0,0,1,0,1,0,1,1)$ است که آن را با X_{3578} نشان می‌دهیم. بدیهی است این

$$\begin{aligned} & P(X_{3578}) \\ = & \sum_{i=1}^{4} Pr(X_{3578} \mid E_i).Pr(E_i) \\ = & [\frac{1}{\binom{8}{4}}.\frac{1}{2}]+[\frac{1}{\binom{6}{3}}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}] \\ & +[\frac{1}{\binom{4}{2}}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\frac{1}{4}]+0+0+0 \\ = & \frac{37}{1260} \end{aligned}$$

براساس محاسبات مندرج در جدول (۲) می توان درخت تفکیک را در مثال (۱) به صورت زیر رسم نمود :



شکل ۲: درخت تفکیک برای مثال فوق

برنامه انجام محاسبات فوق با استفاده از نرم افزار R که برای داده‌های مثال (۱) اجرا شده است، به شرح زیر است که خروجی آن به تفکیک بردارهای $\underline{\pi}^a$ و $\underline{\pi}^b$ در مراحل مختلف با محاسبات بالا منطبق است. که جدول بالایی و پایینی بترتیب خروجی نرم افزار در مورد مقادیر مؤلفه‌های بردارهای $\underline{\pi}^b$ و $\underline{\pi}^a$ طی مراحل مختلف روش تفکیکی منجر به نمونه گیری تصادفی ساده است.

```
f=function(M,m,x) {
        p=matrix(c(x,rep(0,m*M)),m+1,M,byrow = 1)
        pa=matrix(c(rep(m/M,M),rep(0,(m-1)*M)),m,M,byrow = 1)
        for(i in 1:(m-1)) {
              alpha=min(M/m*min(x),M/(M-m)*min(1-x))
          p[(i+1),]=round((p[i,]-alpha*pa[i,])/(1-alpha), digits = 10)
              k=0
              for(j in 1:M)
             if(p[(i+1),j]==0|p[(i+1),j]==1) {k=k+1; pa[(i+1),j]=p[(i+1),j]}
              N=M-k
              x=c(rep(0,N))
              n=0;k=1
              for(j in 1:M)
```

```
                    if(p[(i+1),j]!=0&p[(i+1),j]!=1)
                                {n=n+p[(i+1),j]; x[k]=p[(i+1),j];k=k+1 }
              for(j in 1:M)
                    if(p[(i+1),j]!=0&p[(i+1),j]!=1) pa[(i+1),j]=n/N
       }
       alpha=min(N/n*min(x),N/(N-n)*min(1-x))
      p[(m+1),]=round((p[m,]-alpha*pa[m,])/(1-alpha), digits = 10)
       print(p)
       print(pa)          }
x=c(1/4,1/3,3/8,3/7,4/7,5/8,2/3,3/4)
f(8,4,x)
```

p

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]
[1,]	0.25	0.3333	0.375	0.4285714	0.5714286	0.625	0.6667	0.75
[2,]	0.00	0.1667	0.250	0.3571429	0.6428571	0.750	0.8333	1.00
[3,]	0.00	0.0000	0.125	0.2857143	0.7142857	0.875	1.0000	1.00
[4,]	0.00	0.0000	0.000	0.2142857	0.7857143	1.000	1.0000	1.00
[5,]	0.00	0.0000	0.000	0.0000000	1.0000000	1.000	1.0000	1.00

pa

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]
[1,]	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
[2,]	0.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1.0
[3,]	0.0	0.0	0.5	0.5	0.5	0.5	1.0	1.0
[4,]	0.0	0.0	0.0	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0

۴ نتیجه گیری

طرح تفکیک در نمونه گیری تصادفی ساده، یکی از طرح‌های نمونه گیری با احتمالات متغیر است. با توجه به اینکه هر طرح نمونه گیری، متناظر با یک توزیع گسسته روی مجموعه ای از نمونه‌های ممکن است، هدف کلی یافتن این توزیع می باشد. برای این منظور این طرح را با انجام محاسبات عددی و نرم افزاری، ارائه نموده و با ساختن درخت تفکیک، چگونگی محاسبه ی تابع احتمال نمونه ی مفروض را شرح داده ایم. با استفاده از برنامه ارائه شده می توان این طرح را در جوامع مختلف پس از تعیین احتمالات شمول اولیه دلخواه اجرا کرد.

جدول ۱: مقادیر N_i، n_i و α_i همچنین مقادیر مؤلفه‌های بردار $\underline{\pi}^b$ در مراحل مختلف مثال (۱)

مؤلفه‌های بردار شمول اولیه	مؤلفه‌های بردار $\underline{\pi}^b$ در مرحله اول	مؤلفه‌های بردار $\underline{\pi}^b$ در مرحله دوم	مؤلفه‌های بردار $\underline{\pi}^b$ در مرحله سوم	مؤلفه‌های بردار $\underline{\pi}^b$ در مرحله چهارم
$\pi_1^b=\frac{1}{4}$ $\pi_2^b=\frac{1}{3}$ $\pi_3^b=\frac{3}{8}$ $\pi_4^b=\frac{3}{7}$ $\pi_5^b=\frac{4}{7}$ $\pi_6^b=\frac{5}{8}$ $\pi_7^b=\frac{2}{3}$ $\pi_8^b=\frac{3}{4}$	$\pi_1^b=\frac{\frac{1}{4}-\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{4}}=0$ $\pi_2^b=\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$ $\pi_3^b=\frac{\frac{3}{8}-\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$ $\pi_4^b=\frac{\frac{3}{7}-\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{5}{14}$ $\pi_5^b=\frac{\frac{4}{7}-\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{9}{14}$ $\pi_6^b=\frac{\frac{5}{8}-\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$ $\pi_7^b=\frac{\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{5}{6}$ $\pi_8^b=\frac{\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$	$\pi_1^b=\frac{\frac{1}{6}-\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{6}}=0$ $\pi_2^b=\frac{\frac{1}{4}-\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{6}}=\frac{1}{8}$ $\pi_3^b=\frac{\frac{5}{14}-\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{6}}=\frac{2}{7}$ $\pi_4^b=\frac{\frac{9}{14}-\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{6}}=\frac{5}{7}$ $\pi_5^b=\frac{\frac{3}{4}-\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{6}}=\frac{7}{8}$ $\pi_6^b=\frac{\frac{5}{6}-\frac{2}{6}\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{6}}=1$	$\pi_1^b=\frac{\frac{1}{8}-\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{8}}=0$ $\pi_2^b=\frac{\frac{2}{7}-\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{8}}=\frac{3}{14}$ $\pi_3^b=\frac{\frac{5}{7}-\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{8}}=\frac{11}{14}$ $\pi_4^b=\frac{\frac{7}{8}-\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{8}}=1$	$\pi_1^b=\frac{\frac{3}{14}-\frac{6}{14}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{6}{14}}=0$ $\pi_2^b=\frac{\frac{11}{14}-\frac{6}{14}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{6}{14}}=1$
$N=8$	$N_1=6$	$N_2=4$	$N_3=2$	
$n=4$	$n_1=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{5}{14}$ $+\frac{9}{14}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=3$	$n_2=\frac{1}{8}+\frac{2}{7}$ $+\frac{5}{7}+\frac{7}{8}=2$	$n_3=\frac{3}{14}+\frac{11}{14}=1$	
	$\alpha_1=\frac{1}{2}$	$\alpha_2=\frac{2}{6}$	$\alpha_3=\frac{2}{4}$	$\alpha_4=\frac{6}{14}$

جدول ۲ : خروجی‌های ممکن مقادیر مؤلفه‌های بردار $\underset{\sim}{\pi}^a$ و $\underset{\sim}{\pi}^b$ در مراحل مختلف

	$\underset{\sim}{\pi}$	$1/4$	$1/3$	$3/8$	$3/7$	$4/7$	$5/8$	$2/3$	$3/4$	خروجی‌ها
مرحله اول	$\underset{\sim}{\pi}^a$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	E_1
	$\underset{\sim}{\pi}^b$	0	$1/6$	$1/4$	$5/14$	$9/14$	$3/4$	$5/6$	1	
مرحله دوم	$\underset{\sim}{\pi}^a$	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	E_2
	$\underset{\sim}{\pi}^b$	0	0	$1/8$	$2/7$	$5/7$	$7/8$	1	1	
مرحله سوم	$\underset{\sim}{\pi}^a$	0	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	1	E_3
	$\underset{\sim}{\pi}^b$	0	0	0	$3/14$	$11/14$	1	1	1	
مرحله چهارم	$\underset{\sim}{\pi}^a$	0	0	0	$1/2$	$1/2$	1	1	1	E_4
	$\underset{\sim}{\pi}^b$	0	0	0	0	1	1	1	1	E_5

مراجع

[1] Brewer,K.R.W. and Hanif, M. (1983), Sampling with Unequal Probabilities in:*Lecture Notes in statistics*, vol 15, Springer-verlag, New York.

[2] Deville, J.-C. and Tille, Y. (1996), Unequal probability sampling without replacement through a splitting method, *SSC Annual Meeting*.

[3] Deville, J.-C. and Tille, Y. (1998), Unequal probability sampling without replacement through a splitting method,*Biometrika*- 85, 89-101.

[4] Grafstrom, A. (2010), Entropy of unequal probability sampling designs, *Statistical Methodology*-7, 84-97.

[5] Hajek, J. sampling from a finite population,*Marcel Dekker*, New York, (1981).

[6] Hansen M.M. and Hurwitz, W.N. (1943), On the theory of sampling from finite populations,*Annals of Mathematical Statistics*-14,333-362.

[7] Horvitz, D. and Thompson, D. A (1952), generalization of sampling without replacement from a finite universe,*Journal of the American Statistical Association*-47,663-685.

[8] Matei A. and Tille, Y. (2007), Computational aspects of order pps sampling schemes, *Computational Statistics and Data Analysis* 51,3703-3717 .

[9] Pea J. and, Qualite, L. and Tille, Y. (2007), Systematic sampling is a minimum support design,*Comput. Statist. Data Anal*-51, 5591-5602.

[10] Tille, Y. (2006), Sampling Algorithms, in : Springer Series in Statistics, Springer science + Business media, Inc., New York.