

## توزیع توانی دو طرفه

هژیر حومئی<sup>۱</sup>، مهناز غیور<sup>۲</sup>، لیلا حسن زاده<sup>۳</sup>

چکیده:

در این مقاله خانواده‌ای جدید از توزیع‌ها با کاربرد فراوان در مهندسی مالی، معرفی شده است. این توزیع شامل توزیع‌های مهم آماری مانند توزیع مثلی، توانی و یکنواخت است. ابتدا حالت خاصی از این توزیع در نظر گرفته شده و سپس ویژگی‌های مهم آن را بررسی نموده‌ایم. در پایان برآورد بیشینه درستنمایی را برای پارامترها به همراه مثال عددی ارائه می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** توزیع توانی، برآورد ماکسیمم تابع راستنمایی، آنتروپی.

### ۱ مقدمه

تحقیقات وسیع روی توزیع‌های چند ضابطه‌ای با تکیه‌گاه  $(0, 1)$  از کار ناداراجا (۲۰۰۵) آغاز گردید. در بین تمام کارهای بسیاری که در این باره انجام شده است به وان دورپ (۲۰۰۲) و پریز (۲۰۰۵) اشاره می‌کنیم. در این سری مقالات، کاربرد، انعطاف پذیری و کارایی این توزیع‌ها به‌طور کامل بررسی گردیده است.

اخیراً به دنبال چنین توزیع‌هایی، توزیع جدیدی با نام  $GTSP$  توسط سلطانی و حومئی (۲۰۰۹) معرفی گردیده است. شکل توزیع  $GTSP$  اگرچه پیچیده است ولی حالت‌های خاص آن شامل توزیع‌های مهم آماری دیگر است.

تابع چگالی  $GTSP$ ،  $f(x|\theta, n, k_1, k_2)$ ، به شکل زیر تعریف شده است

$$\begin{cases} k_2 \theta^{k_1-1} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{k_2-1} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-k_2} F_2, & 0 < x < \theta \\ k_1 (1 - \theta)^{n-k_2} \left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^{n-k_1} \left(\frac{x-\theta}{1-\theta}\right)^{k_1-1} F_1, & \theta < x < 1 \end{cases}$$

<sup>۱</sup> گروه آمار دانشگاه تبریز

<sup>۲</sup> گروه آمار دانشگاه تبریز

<sup>۳</sup> گروه آمار دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

که در آن  $F_1, F_2, \kappa_i$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$F_2 = F(k_2 - n, k_1, k_2; -\frac{x(1-\theta)}{\theta-x})$$

$$F_1 = F(1 - k_1, n - k_2 + 1, n - k_1 + 1; -\frac{\theta(1-x)}{x-\theta}),$$

$$F(a, b, c; z) = K \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt,$$

$$k_1 = 1 \text{ اگر } \kappa_i = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k_i)\Gamma(n-k_i+1)}, \quad k = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}.$$

و  $n = k_2$  باشد تابع چگالی  $f(x|\theta, n)$ ، که در مهندسی مالی کاربرد

فراوان دارد به شکل زیر خلاصه می‌شود

$$f(x|\theta, n) = \begin{cases} n \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} & 0 < x \leq \theta \\ n \left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^{n-1} & \theta \leq x < 1. \end{cases}$$

در این مقاله قصد داریم برخی خواص این تابع چگالی را بررسی کنیم.

در بخش ۲، توزیع توانی دو طرفه استاندارد  $STSP$  معرفی شده و

برخی از خواص مقدماتی این توزیع به‌طور خلاصه بررسی شده است. در

بخش ۳ در مورد برآورد  $MLE$  برای دو پارامتر توزیع  $STSP$  بحث

شده است.

## ۲ توزیع های توانی دو طرفه استاندارد

فرض کنید  $X$  متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشد

$$f(x|\theta, n) = \begin{cases} n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} & 0 < x \leq \theta \\ n\left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^{n-1} & \theta \leq x < 1. \end{cases} \quad (1)$$

آنگاه  $X$  را توزیع توانی دو طرفه استاندارد  $STSP(\theta, n)$ ،  $0 \leq \theta \leq 1$  و  $n > 0$  می نامیم که در آن  $n$  لزوماً عدد صحیح نیست. برای  $0 \leq \theta \leq 1$  و  $n > 0$ ، چگالی (۱) تک مدی و مد آن برابر  $\theta$  است. برای  $0 < \theta < 1$  و  $0 < n < 1$ ، شکل تابع چگالی،  $-U$  شکل و مد آن برابر صفر یا یک است. به ازای  $n = 1$  چگالی داده شده متناظر با توزیع یکنواخت  $[0, 1]$ ، به ازای  $n = 2$  متناظر با چگالی مثلثی در بازه  $[0, 1]$  و به ازای  $\theta = 1$  متناظر با توزیع توانی خواهد بود. با استفاده از (۱) تابع توزیع تجمعی توزیع  $STSP(\theta, n)$  به شکل زیر به دست آمده است.

$$F(x|\theta, n) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & 0 < x \leq \theta \\ 1 - (1-\theta)\left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^n & \theta \leq x < 1. \end{cases} \quad (2)$$

### ۱.۲ گشتاورها

$k$  امین گشتاور متغیر تصادفی  $STSP(\theta, n)$  به شکل ساده زیر به دست

آمده است

$$E(X^k) = \frac{n\theta^{k+1}}{n+k} + \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{k-i} \frac{n}{n+i} (1-\theta)^{i+1} \quad (3)$$

بنابراین

$$E(X) = \frac{(n-1)\theta + 1}{n+1}. \quad (4)$$

با استفاده از (۳) و (۴) نتیجه می شود که

$$Var(X) = \frac{n - 2(n-1)\theta(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2}. \quad (5)$$

میانگین توزیع  $STSP$ ، معدل وزنی از کران پایین  $0$  و پارامتر مکانی  $\theta$  و کران بالای  $1$  می باشد که در آن وزن ها فقط تابعی از  $n$  هستند. به ازای  $n = 1$ ، برابر  $\frac{1}{2}$  می شود که این همان میانگین توزیع یکنواخت  $[0, 1]$  می باشد و به ازای  $n > 1$ ، وزن بیشتر به مد  $\theta$  و با افزایش  $n$  وزن های کمتری به کران های پایین صفر و بالای یک اختصاص داده می شود. زمانی که  $n \rightarrow \infty$  میل می کند هیچ وزنی به کران ها اختصاص

داده نمی شود و میانگین برابر  $\theta$  می شود و برای  $n < 1$ ، با کم شدن  $n$  میانگین با دخالت  $\theta$  کاهش می یابد. در حالت های حدی،  $n \downarrow 0$ ، میانگین به  $1 - \theta$  میل می کند.

توضیحات بالا را می توان با قضیه زیر دنبال کرد. سلطانی و حومئی [۲۰۰۹] ثابت کردند که

**قضیه ۱.۰۲.** برای عدد صحیح  $n \geq 1$ ،  $X \sim STSP(\theta, n)$  است اگر و تنها اگر

$$X \stackrel{d}{=} U_{(1)} + \theta(U_{(n)} - U_{(1)}), \quad 0 < \theta < 1.$$

که در آن  $U_1, \dots, U_n$  متغیرهای تصادفی  $i.i.d$  توزیع یکنواخت  $[0, 1]$ ،  $U_{(n)} = \max(U_1, \dots, U_n)$  و  $U_{(1)} = \min(U_1, \dots, U_n)$ ، می باشد.

### ۲.۲ ویژگی های تابع توزیع تجمعی

مشابه توزیع بتا، توزیع  $STSP$  نیز دارای ویژگی های به طور تصادفی صعودی و نزولی<sup>۴</sup> است.

**قضیه ۲.۰۲.** الف) تابع توزیع تجمعی (۲) به ازای  $n > 1$ ، به طور تصادفی صعودی می باشد یعنی

$$\theta_1 < \theta_2, x \in (0, 1) \Rightarrow F(x | \theta_1, n) > F(x | \theta_2, n).$$

ب) تابع توزیع تجمعی (۲) به ازای  $0 < n < 1$ ، به طور تصادفی نزولی می باشد یعنی

$$\theta_1 < \theta_2, x \in (0, 1) \Rightarrow F(x | \theta_1, n) < F(x | \theta_2, n).$$

اثبات. الف) فرض کنید  $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$  و  $n > 1$  و  $x \in (0, 1)$ . آنگاه سه حالت زیر را در نظر می گیریم:

$$0 < x < \theta_1. \quad 1.$$

$$\theta_2 < x < 1. \quad 2.$$

$$\theta_1 < x < \theta_2. \quad 3.$$

دو حالت اول به آسانی اثبات می شود، بنابراین فقط حالت ۳ را بحث

می کنیم. از (۲) نتیجه می شود که

$$F(x | \theta_1, n) = 1 - \frac{(1-x)^n}{(1-\theta_1)^{n-1}}, F(x | \theta_2, n) = \frac{x^n}{\theta_2^{n-1}}.$$

<sup>4</sup>Increasing and Decreasing Stochastically

اینکه  $0 < \theta < 1$  و  $n \rightarrow \infty$  میل کند، توزیع  $X$  به توزیع تباهیده در  $\theta$  همگرا می‌شود. زمانی که  $n \downarrow 0$  و  $0 < \theta < 1$  باشد از (۳) نتیجه می‌شود که به ازای تمامی  $k$ ها  $E(X^k) = (1 - \theta)$ . در نتیجه زمانی که  $n \downarrow 0$ ،  $E(X^k)$  به گشتاورهای یک توزیع برنولی با جرم  $1 - \theta$  در یک همگرا می‌شود. هر دوی  $X$  و متغیر تصادفی برنولی تکیه گاه متناهی دارند، بنابراین با استفاده از قضیه یکتایی برای توزیع‌های با تکیه گاه متناهی نتیجه می‌شود که توزیع برنولی با جرم  $1 - \theta$  در یک، زمانی که  $n \downarrow 0$  و  $0 < \theta < 1$ ، توزیع حدی  $X$  است. این توزیع‌های حدی منطبق با توزیع‌های حدی توزیع بتا است و به عبارت دیگر انعطاف پذیری کلاس  $STSP(\theta, n)$  قابل مقایسه با خانواده بتا می‌باشد.

توزیع حدی جالب دیگری می‌تواند با استفاده از ویژگی خطی زیر به دست آید.

$$Y = (n - 1)A \left( \frac{X - \theta}{\theta} \right), \quad (8)$$

که در آن  $A > 0$  یک ثابت مثبت دلخواه می‌باشد. از (۱) و (۸) نتیجه می‌شود که به ازای  $n > 1$ ،  $f(y | \theta, n, A)$  به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{cases} \frac{n\theta}{(n-1)A} \left(1 + \frac{1}{(n-1)} \frac{Y}{A}\right)^{n-1} - (n-1)A < Y \leq 0 \\ \frac{n\theta}{(n-1)A} \left(1 - \frac{1}{(n-1)} \frac{\theta Y}{(1-\theta)A}\right)^{n-1} \leq Y < \frac{(1-\theta)(n-1)A}{\theta} \end{cases}$$

با فرض اینکه  $n \rightarrow \infty$  میل می‌کند، داریم:

$$f(y|\theta, A) = \begin{cases} \frac{\theta}{A} \exp\left(\frac{Y}{A}\right) & Y \leq 0 \\ \frac{\theta}{A} \exp\left(-\frac{\theta}{1-\theta} \frac{Y}{A}\right) & Y \geq 0. \end{cases}$$

در نتیجه  $f(y|\theta, n, A)$  به چگالی لاپلاس نامتقارن<sup>۶</sup> همگرا می‌شود که در آن جرم احتمالش صرف نظر از مقدار پارامتر  $A$ ، در  $0$  به  $\theta$  و  $1 - \theta$  جدا می‌شود.

## ۵.۲ رابطه آنتروپی

رابطه آنتروپی<sup>۷</sup> تابع چگالی احتمال پیوسته مطلق<sup>۸</sup> نسبت به تابع جرم احتمال  $g(x)$  به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$E(f : g|\Theta) = \int \log \frac{f(x|\Theta)}{g(x)} dF(y|\Theta), \quad (9)$$

<sup>5</sup>Distribution Degenerate

<sup>6</sup>Laplace Asymmetric

<sup>7</sup>Entropy Relative

<sup>8</sup>Continuous Absolute

برای  $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ ، داریم

$$\theta_1 < x < \theta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\theta_1}{\theta_2} < \frac{x}{\theta_2} < 1, \\ 1 > \frac{1-x}{1-\theta_1} > \frac{1-\theta_2}{1-\theta_1}. \end{cases} \quad (6)$$

با استفاده از (۶) به ازای  $x \in (0, 1)$ ،  $n > 1$ ، داریم

$$\begin{cases} 1 - x < 1 - x \left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{n-1}, \\ (1-x) \left(\frac{1-x}{1-\theta_1}\right)^{n-1} < (1-x). \end{cases} \quad (7)$$

بنابراین،

$$\frac{(1-x)^n}{(1-\theta_1)^{n-1}} < 1 - \frac{x^n}{\theta_2^{n-1}} \Leftrightarrow 1 - \frac{(1-x)^n}{(1-\theta_1)^{n-1}} > \frac{x^n}{\theta_2^{n-1}},$$

بنابراین اثبات قسمت الف کامل می‌شود. □

## ۳.۲ ویژگی‌های صدک

فرض کنید  $x_p$  صدک  $1-p$ ام باشد و  $F(x_p | \theta, n) = p$ . ویژگی‌های زیر می‌تواند برای برآورد پارامتر  $\theta$  مورد استفاده قرار گیرد. ویژگی‌های ۳ و ۴ شامل دو رابطه جالب بین  $x_p$  و  $x_{1-p}$  می‌باشد.

ویژگی ۱: از تابع توزیع (۲) نتیجه می‌شود که:  $x_p < p \Leftrightarrow p < \theta$

ویژگی ۲: به طور مشابه، با صرف نظر از مقدار  $n$ ،  $x_p = \theta \Leftrightarrow p = \theta$ . در نتیجه برای همه توزیع‌های  $STSP$  جرم احتمال در  $\theta$  و  $1 - \theta$  جدا می‌شود. ویژگی ۳: مقادیری از  $p$  را در نظر بگیرید که در آن

$$p < \min(\theta, 1 - \theta) \text{ باشد. با استفاده از (۲) و ویژگی ۱ داریم،}$$

$$\frac{x_p^n}{\theta^{n-1}} = \frac{(1 - x_{1-p})^n}{(1 - \theta)^{n-1}} \Leftrightarrow \frac{x_p}{1 - x_{1-p}} = \left(\frac{\theta}{1 - \theta}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

در نتیجه نسبت  $\frac{x_p}{1 - x_{1-p}}$  برای  $p < \min(\theta, 1 - \theta)$ ، به  $p$  وابسته نیست.

ویژگی ۴: به طور مشابه، برای  $p > \max(\theta, 1 - \theta)$

$$\frac{x_{1-p}}{1 - x_p} = \left(\frac{\theta}{1 - \theta}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

مستقل از  $p$  است.

## ۴.۲ توزیع‌های حدی

اگر  $X \sim STSP(\theta, n)$  باشد با فرض اینکه  $\theta = 0$  و  $n \rightarrow \infty$  میل کند، از (۴) و (۵) نتیجه می‌شود که توزیع  $X$  به توزیع تباهیده<sup>۵</sup> در صفر همگرا می‌شود. به طور مشابه، با فرض اینکه  $\theta = 1$  و  $n \rightarrow \infty$  میل کند، توزیع  $X$  به توزیع تباهیده در یک همگرا و بالاخره با فرض

آماره‌های ترتیبی  $X_{(1)} < \dots < X_{(s)}$  باشند. با استفاده از تعریف، تابع ماکسیم درستمایی برای  $X$  به صورت زیر خواهد بود

$$L(X; \theta, n) = n^s \left\{ \frac{\prod_{i=1}^r X_{(i)} \prod_{i=r+1}^s (1 - X_{(i)})}{\theta^r (1 - \theta)^{s-r}} \right\}^{n-1}, \quad (12)$$

که در آن  $X_{(s+1)} \equiv 1$  و  $X_{(0)} \equiv 0$  و  $X_r \leq \theta < X_{(r+1)}$  می‌باشد.

**قضیه ۱.۳.** فرض کنید  $X = (X_1, X_2, \dots, X_s)$  یک نمونه تصادفی *i.i.d* از توزیع  $STSP(\theta, n)$  باشد. برآوردگرهای *MLE*،  $\theta$  و  $n$  در (۱۲) به شکل زیر هستند

$$\begin{cases} \hat{\theta} = X_{(\hat{r})} \\ \hat{n} = -\frac{s}{\log \hat{M}(\hat{r})}, \end{cases} \quad (13)$$

که در آن  $\hat{r} = \arg \max_{r \in \{1, \dots, s\}} M(r)$

$$M(r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{X_{(i)}}{X_{(r)}} \prod_{i=r+1}^s \frac{1 - X_{(i)}}{1 - X_{(r)}}. \quad (14)$$

اثبات. با استفاده از (۱۲) داریم،

$$\max_{n > s, 0 \leq \theta \leq 1} L(X; \theta, n) = \max_{n > s} [n^s \cdot \hat{M}^{n-1}], \quad (15)$$

که در آن  $\hat{M}$  به شکل زیر است.

$$\hat{M} = \max_{0 \leq \theta \leq 1} \left[ \frac{\prod_{i=1}^r X_{(i)} \prod_{i=r+1}^s (1 - X_{(i)})}{\theta^r (1 - \theta)^{s-r}} \right], \quad (16)$$

و  $X_{(s+1)} \equiv 1$  و  $X_{(0)} \equiv 0$  و  $X_{(r)} \leq \theta < X_{(r+1)}$  و

$$\text{Log}[n^s \hat{M}^{n-1}] = (n-1) \text{Log} \hat{M} + s \text{Log} n, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dn} \log[n^s \hat{M}^{n-1}] = \log \hat{M} + \frac{s}{n}. \quad (18)$$

با برابر صفر قرار دادن معادله (۱۸)،  $\hat{n} = -\frac{s}{\log \hat{M}}$  می‌باشد. از

(۱۸) نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{dn} \log[n^s \hat{M}^{n-1}] > 0 \Leftrightarrow \hat{n} < -\frac{s}{\log \hat{M}}. \quad (19)$$

توجه کنید که به ازای  $i < r$ ،  $0 < \frac{X_{(i)}}{\theta} < 1$  و به ازای  $0 < \hat{M} < 1$ ، در نتیجه،  $0 < \frac{(1-X_{(i)})}{(1-\theta)} < 1$ ،  $i > r$

<sup>9</sup>Where Almost Every

<sup>10</sup>and Retzer Soofi

این رابطه یک معیار اندازه گیری برای مقایسه اطلاع واقع در توزیعها است.

از روی عبارت بالا به آسانی دیده می‌شود که  $E(f : g|\Theta) \geq 0$  است و برابری برقرار می‌باشد اگر و تنها اگر در همه جا،  $f(x|\Theta) = g(x)$  باشد.

ما اطلاعات واقع در توزیعهای  $STSP$  در بازه  $[0, 1]$  را با اطلاعات واقع در توزیع یکنواخت  $[0, 1]$  مقایسه می‌کنیم. رابطه آنتروپی توزیعهای بتا نسبت به توزیع یکنواخت  $[0, 1]$  قبلا به وسیله سوفی و ورتزر<sup>۹</sup> [۴] مطالعه و بررسی شده و به نتایج زیر دست یافتند.

$$E(f : g|\alpha, \beta) = \log(B(\alpha, \beta)) - (\alpha - 1)(\psi(\alpha) - \psi(\alpha + \beta)) - (\beta - 1)(\psi(\beta) - \psi(\alpha + \beta))$$

که در آن

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad (10)$$

و  $\alpha > 0$  و  $\beta > 0$  و  $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$  تابع چگالی احتمال یکنواخت  $[0, 1]$  و  $\psi(\cdot) = \Gamma'(\cdot)$  می‌باشد.

رابطه آنتروپی توزیعهای  $STSP$  نسبت به توزیع یکنواخت  $[0, 1]$  با استفاده از (۱) و (۹) به صورت زیر خواهد بود

$$E(f : g|\theta, n) = \log n - \frac{n-1}{n}, \quad (11)$$

که در آن  $f$  چگالی  $STSP$  داده شده با (۱) است. زمانی که  $n = 1$  است به حداقل مقدار صفر می‌رسد و به ازای  $n$  ثابت صرف نظر از مقدار  $\theta$  ثابت است یعنی هیچ اطلاعی از اطلاع واقع در توزیع  $STSP$  با تغییر مقدار  $\theta$  اضافه یا کم نشده است. در نتیجه رابطه آنتروپی توزیع مثلثی در بازه  $[0, 1]$  صرف نظر از موقعیت  $\theta$  برابر با  $\log(2) + \frac{1}{n}$  می‌باشد. این موضوع خیلی ارزشمند است با توجه به اینکه توزیع  $STSP$  به  $\theta$  وابسته می‌باشد.

### ۳ روش $MLE$ برای پارامترهای توزیع $STSP$

در این بخش روش  $MLE$  را برای برآورد پارامترهای  $STSP$  بحث می‌کنیم. فرض کنید برای یک نمونه تصادفی  $X = (X_1, \dots, X_s)$

$$0/420, 0/423, 0/413, 0/395, 0/340) \\ (0/588, 0/564, 0/513, 0/465, 0/429)$$

ماتریس  $A = [a_{i,r}]$  را در نظر بگیرید که در آن

$$a_{i,r} = \begin{cases} \frac{x(i)}{x(r)} & i < r \\ \frac{1-x(i)}{1-x(r)} & i \geq r. \end{cases}$$

جدول ۱ خلاصه‌ای از محاسبه ماتریس  $A$  را برای آماره‌های ترتیبی  $(X_{(1)}, \dots, X_{(s)})$  ارائه می‌دهد. ردیف آخر جدول شامل حاصلضرب عناصر واقع در  $r$  امین ستون ماتریس می‌باشد که برابر مقادیر  $M(r)$  داده شده بوسیله (۲۷) می‌باشند. محاسبات عددی نتیجه می‌دهد که

$$\hat{\mu} = 0/304, \hat{r} = 5$$

$$\hat{\theta} = X_{(\hat{r})} = 0/423$$

$$\hat{n} = \frac{-10}{\log(\hat{M})} = 8/399$$

برآورد ماکسیمم درستمنایی برای توزیع  $X \sim STSP(\theta, n)$  می‌تواند به برآورد ماکسیمم درستمنایی دو پارامتر برای  $Z \sim TSP(a, m, b, n)$  که در آن  $Z = (b-a)X + a$  می‌باشد، تبدیل شود. در اینجا پارامترهای  $a$  و  $b$  ثابت هستند و پارامتر  $m = (b-a)\theta + a$  است.

تابع چگالی احتمال  $z$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$f(z|a, m, b, n) = \begin{cases} \frac{n}{(b-a)} \left(\frac{z-a}{m-a}\right)^{n-1} & a < z \leq m \\ \frac{n}{(b-a)} \left(\frac{b-z}{b-m}\right)^{n-1} & m \leq z \leq b. \end{cases} \quad (28)$$

برآوردگرهای ماکسیمم درستمنایی برای پارامترهای  $m$  و  $n$  در (۲۸) با استفاده از آماره‌های ترتیبی  $(Z_{(1)}, \dots, Z_{(s)})$  به شکل زیر به دست آمده است

$$\begin{cases} \hat{m}(a, b) = Z_{(\hat{r}(a,b))} \\ \hat{n}(a, b) = -\frac{s}{\log M(a, b, \hat{r}(a, b))}, \end{cases} \quad (29)$$

که در آن همانند بالا

$$\hat{r}(a, b) = \arg \max_{r \in \{1, \dots, s\}} M(a, b, r), \quad (30)$$

و

$$M(a, b, r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{Z(i) - a}{Z(r) - a} \prod_{i=r+1}^s \frac{b - Z(i)}{b - Z(r)}. \quad (31)$$

و بنابراین  $\hat{n} > 0$  می‌باشد. با استفاده از (۱۶) می‌توانیم بنویسیم

$$H(r) = \max_{X_{(r)} \leq \theta \leq X_{(r+1)}} \left[ \frac{\prod_{i=1}^r X(i) \prod_{i=r+1}^s (1 - X(i))}{\theta^r (1 - \theta)^{s-r}} \right]. \quad (20)$$

ما به طور مجزا روی سه حالت زیر بحث می‌کنیم:  $r \in \{1, \dots, s-1\}$  و  $r = 0$  و  $r = s$ .

حالت  $r \in \{1, \dots, s-1\}$ : اینجا  $X_{(r)} \leq \theta \leq X_{(r+1)}$  است. تابع  $g(\theta) = \theta^r (1 - \theta)^{s-r}$  متناسب با چگالی بتای تک مدی<sup>۱۱</sup> می‌باشد. بنابراین

$$\min_{X_{(r)} \leq \theta \leq X_{(r+1)}} g(\theta) = \min_{\theta \in \{X_{(r)}, X_{(r+1)}\}} g(\theta) \quad (21)$$

و از (۲۰) داریم،

$$H(r) = \max_{r' \in \{r, r+1\}} \prod_{i=1}^{r'-1} \frac{X(i)}{X(r')} \prod_{i=r'+1}^s \frac{1 - X(i)}{1 - X(r')}. \quad (22)$$

حالت  $r = 0$ : اینجا  $0 \leq \theta \leq X_{(1)}$  است. از (۲۰) داریم،

$$H(0) = \max_{0 \leq \theta \leq X_{(1)}} \left[ \prod_{i=1}^s \frac{1 - X(i)}{1 - \theta} \right]. \quad (23)$$

بنابراین

$$H(0) = \prod_{i=1}^s \frac{1 - X(i)}{1 - X_{(1)}} = \prod_{i=2}^s \frac{1 - X(i)}{1 - X_{(1)}}. \quad (24)$$

حالت  $r = s$ : اینجا  $X_{(s)} \leq \theta \leq 1$  است. از (۲۰) داریم،

$$H(s) = \max_{X_{(s)} \leq \theta \leq 1} \left[ \prod_{i=1}^s \frac{X(i)}{\theta} \right]. \quad (25)$$

بنابراین

$$H(s) = \prod_{i=1}^s \frac{X(i)}{X_{(s)}} = \prod_{i=1}^{s-1} \frac{X(i)}{X_{(s)}}. \quad (26)$$

از (۲۲)، (۲۴) و (۲۶) نتیجه می‌شود که  $\hat{M}$

$\max_{r \in \{1, \dots, s\}} M(r)$  است، که در آن

$$M(r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{X(i)}{X(r)} \prod_{i=r+1}^s \frac{1 - X(i)}{1 - X(r)}. \quad (27)$$

باید به این نکته اشاره کنیم زمانی که  $\hat{\theta} = X_{(\hat{r})}$  به  $\hat{M}$  می‌رسد.

□

حال روش برآورد  $MLE$  برای توزیع  $STSP(\theta, n)$  را با استفاده از آماره‌های ترتیبی ساختگی  $(X_{(1)}, \dots, X_{(s)})$  زیر توضیح می‌دهیم.

جدول ۱. مثالی از برآورد  $MLE$  برای  $STSP(\theta, n)$ 

$r$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_{(r)}$		0.340	0.395	0.413	0.420	0.423	0.429	0.465	0.513	0.564	0.588
$i$	$X_{(i)}$										
1	0.340	1.000	0.861	0.823	0.810	0.804	0.793	0.731	0.663	0.603	0.578
2	0.395	0.917	1.000	0.956	0.940	0.934	0.921	0.849	0.770	0.700	0.672
3	0.413	0.889	0.970	1.000	0.983	0.976	0.963	0.888	0.805	0.732	0.702
4	0.420	0.879	0.959	0.988	1.000	0.993	0.979	0.903	0.819	0.745	0.714
5	0.423	0.874	0.954	0.983	0.995	1.000	0.986	0.910	0.825	0.750	0.719
6	0.429	0.865	0.944	0.973	0.984	0.990	1.000	0.923	0.836	0.761	0.730
7	0.465	0.811	0.884	0.911	0.922	0.927	0.937	1.000	0.906	0.824	0.791
8	0.513	0.738	0.805	0.830	0.840	0.844	0.853	0.910	1.000	0.910	0.872
9	0.564	0.661	0.721	0.743	0.752	0.756	0.764	0.815	0.895	1.000	0.959
10	0.588	0.624	0.681	0.702	0.710	0.714	0.722	0.770	0.846	0.945	1.000
$M_{(r)}$		0.134	0.252	0.293	0.303	0.304	0.299	0.239	0.159	0.093	0.068

## مراجع

- [1] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N.(1994). *Continuous univariate distribution- I* (2nd ed.), New York: Wiley.
- [2] Nadarajah, S.(2005). On the two-sided power distribution, *Metrika*, **61**, 309-321.
- [3] Perez, J.G., Rambaud, S.C., Garcia, L.G.(2005). The two-sided power distribution for the treatment of the uncertainty in PERT, *Stat. Methods Appl.*, **14**, 209-222.
- [4] Soofi, E.S. and Retzer, J.J.(2002). "Information indices: unification and applications," *Journal of Econometrics*, **107**, 17-40.
- [5] Soltani, A.R. and Homei, H.(2009). A generalization for two-sided power distributions and adjusted method of moments, *Statistics*, **43**, 611-620.
- [6] Van Dorp, J.R. and Kotz, S.(2002). The standard two-sided power distribution and its properties:with applications in financial engineering, *The Amer. Statist.*, **56**, 9099.
- [7] Van Dorp, J.R. and Kotz, S.(2002). A novel extension of the triangular distribution and its parameter estimation, *The Statistician*, **51**, 63-79.
- [8] Williams, T.M.(1992). "Practical use of distribution in network analysis, Practical use of distribution in network analysis," *Journal of Operations Research Society*, **43**, 265-270.