مروری بر روش‌های عددی برای محاسبه برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای با استفاده از نرم‌افزار S-PLUS

موسی عبدی [۱] اکبر اصغرزاده [۲]

چکیده:

برای محاسبه برآوردهای نقطه‌ای از جمله برآورد گشتاوری و درستنمایی ماکزیمم و برآوردهای فاصله‌ای از جمله فاصله‌های اطمینان کلاسیک، کوتاهترین فاصله اطمینان، فاصله اطمینان نااریب و فاصله اطمینان بیزی با بالاترین چگالی پسین [۳] (HPD) ممکن است به معادلاتی برخورد کنیم که باید از روش‌های عددی حل شوند. در این مقاله روش‌های عددی برای حل این گونه معادلات در قالب نرم‌افزار آماری S-PLUS مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مثال‌های متنوعی برای تشریح روش‌های بیان شده ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: برآورد فاصله‌ای، برآورد نقطه‌ای، روش نقطه ثابت، روش نیوتن-رافسون، نرم‌افزار S-PLUS.

۱ مقدمه

حل عددی معادلات برای پیدا کردن برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای در آمار بسیار حائز اهمیت هستند. معادلات گشتاوری و درستنمایی ماکزیمم در برخی مسائل ممکن است منجر به جواب‌های صریحی برای برآوردهای گشتاوری و برآوردهای درستنمایی ماکزیمم (MLE) نشوند، بنابراین حل این‌گونه معادلات از روش‌های عددی حائز اهمیت است. برای پیدا کردن فواصل اطمینان مختلف از جمله فاصله اطمینان کلاسیک، کوتاهترین فاصله اطمینان، فاصله اطمینان نااریب و فاصله اطمینان بیزی HPD نیز ممکن است با معادلاتی مواجه شویم که باید از روش‌های عددی برای حل آنها استفاده کرد.

در بسیاری از کتاب‌های آمار ریاضی بر حل این‌گونه معادلات از روش‌های عددی تأکید شده است، اما به چگونگی انجام این روش‌های عددی اشاره‌ای نشده است (برای مثال مشکانی و همکاران (۱۳۸٤) و پارسیان (۱۳۸٦)). در این مقاله در بخش دوم چند روش عددی برای حل این معادلات ارائه می‌شود. در بخش سوم تعدادی از توابع مهم و پرکاربرد برای حل این‌گونه معادلات در نرم‌افزار آماری S-PLUS نسخه ۲۰۰۸ معرفی و در انتها در بخش چهار با ارائه مثال‌های متنوع روش‌ها و توابع اشاره شده در بخش‌های دوم و سوم تشریح می‌شود.

۲ روش‌های عددی حل معادلات

در این بخش مروری بر روش‌های تکراری نیوتن-رافسون و نقطه ثابت برای حل عددی معادلات ارائه می‌شود.

۱.۲ روش تکراری نیوتن- رافسون

روش نیوتن-رافسون یکی از معروف‌ترین روش‌های حل عددی معادلات به شکل $f(x)=0$ است که می‌توان این روش را برای توابع یک‌متغیره و چندمتغیره به کار برد. در این بخش بیان ساده‌ای از روش تکراری نیوتن-رافسون برای حل معادلات درستنمایی و محاسبه MLE ارائه می‌شود.

۱.۱.۲ روش نیوتن-رافسون یک متغیره

این روش یکی از سریع‌ترین و معروف‌ترین روش‌های عددی برای حل معادلات $f(x)=0$ است.

برای به دست آوردن فرمول تکرار این روش فرض کنید x_0 تقریبی نسبتاً دقیق از ریشه معادله باشد و همچنین $f'(x)\neq 0$. خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه $(x_0, f(x_0))$ رسم می‌شود و

[۱] عضو هیأت علمی مجتمع آموزش عالی بم، دانشکده ریاضی و محاسبات، me.abdi@bam.ac.ir

[۲] عضو هیأت علمی گروه آمار دانشگاه مازندران، a.asgharzadeh@umz.ac.ir

[۳] Density Posterior Highest

طول نقطه برخورد آن با محور xها x_1 نامیده می‌شود. معادله خط مماس بر منحنی در نقطه مذکور عبارت از مقدار زیر است:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

چون فرض بر این است که خط مماس، محور x- ها را در نقطه‌ای به طول x_1 قطع می‌کند، داریم:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

و بنابراین

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

حال خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول x_1 واقع بر منحنی رسم می‌شود و طول محل برخورد آن با محور x ها x_2 نامیده می‌شود. با ادامه این فرآیند یک دنباله متوالی از تقریبات ریشه معادله به صورت $x_0, x_1, x_2, \cdots$ به دست می‌آید که هر جمله از جمله پیشین خود به کمک فرمول تکرار

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{۱}$$

به دست می‌آید. رابطه فوق فرمول تکرار روش نیوتن- رافسون است که وقتی $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ همگرا می‌شود، که در آن $\epsilon > 0$ عدد دلخواه به اندازه کافی کوچک است. برای به دست آوردن یک مقدار اولیه برای ریشه معادله، فاصله $[a, b]$ را طوری در نظر می‌گیرند که $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ یا برعکس، یعنی حداقل یک ریشه در این فاصله وجود داشته باشد. حال می‌توان هر x_0-ای در فاصله $[a, b]$ را به عنوان یک مقدار اولیه برای ریشه معادله در نظر گرفت. برای مطالعه بیشتر در این خصوص می‌توان به وحیدی و قاسمی (۱۳۸۳) مراجعه کرد.

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی با تابع چگالی احتمال توأم $f(x; \theta)$ باشد، لذا $L(\theta) = f(\underline{x}; \theta)$ تابع درستنمایی نمونه باشد. فرض کنید برآورد MLE برای پارامتر θ که با $\widehat{\theta}$ نشان می‌دهیم از حل معادله درستنمایی

$$S(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} lnL(\theta) = 0$$

به دست آید. اگر $\widehat{\theta}^{(k)}$ برآورد پارامتر θ پس از k بار تکرار الگوریتم باشد، آن‌گاه

$$\widehat{\theta}^{(k+1)} = \widehat{\theta}^{(k)} + \frac{S(\widehat{\theta})}{H(\widehat{\theta})}, k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{۲}$$

که در آن $H(\theta) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(\theta)$، اطلاع فیشر مشاهده شده می‌باشد. این روند تا همگرایی ریشه‌ها (یعنی، وقتی $|S(\widehat{\theta}^{(k)})|$ یا $|\widehat{\theta}^{(k+1)} - \widehat{\theta}^{(k)}|$ به اندازه کافی کوچک باشد) تکرار می‌شود.

دقت کنید که برای استفاده از روش نیوتن- رافسون یک برآورد اولیه برای θ یعنی $\widehat{\theta}^{(0)}$ مورد نیاز است، که این مقدار از روش‌های دیگر برآوردیابی همچون برآورد گشتاوری یا برآورد درستنمایی ماکزیمم تقریبی محاسبه می‌شود. برای مطالعه بیشتر می‌توان به نایت (۲۰۰۰) مراجعه کرد.

۲.۱.۲ روش نیوتن- رافسون برای معادلات چند متغیره

الگوریتم نیوتن-رافسون را می‌توان برای حالت‌های چند پارامتری هم تعمیم داد. فرض کنید

$$\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p)^T$$

بردار پارامترهای مجهول باشد و برآورد درستنمای ماکزیمم $\widehat{\theta}$ برای θ از رابطه $S(\widehat{\underline{\theta}}) = 0$ به دست آید که در آن

$$S(\underline{\theta}) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \ln L(\underline{\theta}), \cdots, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \ln L(\underline{\theta}) \right)^T$$

در این صورت $\widehat{\theta}^{(k+1)}$ یعنی برآورد در مرحله $(k+1)$-ام از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{\theta}}^{(k+1)} &= \widehat{\underline{\theta}}^{(k)} + [H(\widehat{\underline{\theta}}^{(k)})]^{-1} S(\widehat{\underline{\theta}}^{(k)}), \\ & k = 0, 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$

که در آن $H(\underline{\theta}) = [h_{ij}]_{p \times p}$، ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده است که مؤلفه (i, j) ام ماتریس H به صورت

$$h_{ij}(\underline{\theta}) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln L(\underline{\theta})$$

تعریف می‌شود. این الگوریتم زمانی خاتمه می‌یابد که نرم $\|S(\widehat{\underline{\theta}})^{(k)}\|$ به اندازه کافی کوچک باشد. الگوریتم مربوط به روش نیوتن-رافسون در بخش ٤ در مثال‌های مختلف ارائه خواهد شد.

۲.۲ روش نقطه ثابت

روش نقطه ثابت منشأ بسیاری از روش‌های سریع برای به دست آوردن تقریبی از ریشه‌های حقیقی معادله $f(x) = 0$ است. فرض کنید معادله دارای ریشه α در بازه $[a, b]$ باشد و معادله $x = \varphi(x)$ از روی معادله $f(x) = 0$ ساخته شود و به علاوه فرض کنید

$\varphi(x)$ تابعی از $[a,b]$ به درون $[a,b]$ باشد و در این بازه داشته باشیم $|\varphi(x)| < 1$. در این صورت با در نظر گرفتن تقریبی مانند x_0 از α دنباله $\{x_n\}$، با ضابطه زیر ساخته می‌شوند

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

در این روش همگرایی زمانی که $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ رخ می‌دهد که در آن $\epsilon > 0$ یک عدد دلخواه به اندازه کافی کوچک است. توجه کنید که در این روش هر چه مقدار $\varphi'(x)$ به صفر نزدیک‌تر باشد، سرعت همگرایی بیشتر خواهد بود. الگوریتم مربوط به این روش در بخش ۴ در مثال‌های مختلف ارائه می‌شود.

۳ چند دستور مهم و پر کاربرد در نرم‌افزار $S-PLUS$

در این بخش چند دستور پرکاربرد در نرم‌افزار آماری S-PLUS که برای حل عددی معادلات خطی و غیرخطی به کار می‌روند، با ارائه مثال‌های مختلف معرفی می‌شوند.

۱.۳ دستور $uniroot$

دستور `uniroot` یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین توابع برای به دست آوردن ریشه یک تابع تک متغیره در نرم‌افزار S-PLUS می‌باشد. برای پیداکردن ریشه تابع تک‌متغیره $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ باید مطمئن باشیم که این تابع در این فاصله دارای ریشه است (یعنی $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ یا برعکس). این تابع به شکل زیر فراخوان می‌شود

```
uniroot(f, lower=a, upper=b)
```

که در آن f، یک تابع حقیقی مقدار به فرم (شناسه‌های تابع، $f(x$ است. x متغیر مورد بررسی، `lower`، کران پایین و `upper`، کران بالای فاصله $[a,b]$ است. قابل ذکر است که با قرار دادن `root` در انتهای دستور فوق می‌توان فقط ریشه معادله را مشاهده کرد.

پس از اجرای این دستور مقادیر زیر در خروجی مشاهده می‌شوند:

`root` : ریشه تابع در فاصله $[a,b]$.

`f.root`: مقدار تابع در ریشه.

برای مثال تابع $f(x) = x^3 - 6x + 4$ را در نظر بگیرید، برنامه زیر ریشه تابع را در فاصله $(0,1)$ که برابر 0.732 است، محاسبه می‌کند.

```
 f<- function(x){ x^3 - 6 * x + 4 }
#------------------------
 uniroot(f, lower=0, upper=1)
 root:
  [1] 0.7320518
 f.root:
  [1] -4.439658e-006
```

۲.۳ دستور $optimize$

برای پیدا کردن نقاط ماکزیمم یا مینیمم یک تابع تک متغیّره پیوسته در فاصله $[a,b]$ از این دستور به صورت زیر استفاده می‌شود

```
optimize(f, lower=a, upper=b,
maximum=F)
```

که در آن f، یک تابع حقیقی مقدار به فرم (شناسه‌های تابع، $f(x$ است. x متغیر مورد بررسی برای بهینه‌سازی تابع است. توجه کنید که از `maximum=F` برای پیدا کردن نقاط مینیمم تابع و از `maximum=T` برای پیدا کردن نقاط ماکزیمم تابع استفاده می‌شود.

پس از اجرای این دستور مقادیر زیر در خروجی مشاهده می‌شوند:

`maximum` یا `minimum` : نقطه ماکزیمم یا مینیمم موضعی

`objective` : مقدار `f` در نقاط اکسترمم موضعی

`interval`: کوچک‌ترین زیربازه شامل اکسترمم.

برنامه زیر نقطه مینیمم تابع $f(x)$ در مثال قبل را در فاصله $(1,2)$ که برابر 1.414 است، محاسبه می‌کند.

```
 f<- function(x){ x^3 - 6 * x + 4 }
#------------------------
optimize(f, lower=1, upper=2,
maximum = F)
 minimum:
  [1] 1.414227
 objective:
  [1] -1.656854
 interval:  [1] 1.414186     1.414267
```

۳.۳ دستور $nlmin$

از دستور nlmin می‌توان برای پیداکردن نقطه مینیمم موضعی یک تابع غیرخطی استفاده کرد. این دستور به صورت زیر فراخوان می‌شود:

پس از اجرای این دستور مقادیر زیر در خروجی مشاهده می‌شوند:

x: نقطه به همگرایی رسیدن بهینه‌سازی

Converged: در صورت همگرایی TRUE و در غیر این صورت FALSE را در خروجی می‌دهد.

برای مثال، برنامه زیر نقطه مینیمم تابع $f(x)$ را با مقدار اولیه صفر، 1.333 محاسبه می‌کند.

```
func<-function(x){x^3-2*x^2+4}
#-----------------------
nlmin(func,0)
x:
[1] 1.333334
converged:
[1] T
```

توجه کنید که دستور nlmin را می‌توان برای حل دستگاه معادلات عددی نیز استفاده کرد. برای حل یک دستگاه معادلات، تابع را به صورت $f(\underline{x}) = \underline{y_0}$ می‌نویسند. برنامه زیر تابع nlmin برای حل دستگاه معادلات عددی را فراخوان می‌کند. در این برنامه $\underline{x}$ بردار مقادیر اولیه با بعد برابر با بعد $\underline{y_0}$ است:

```
solveNonlinear<-
function(f, y0, x, ...)
{
g<-function(x, y0, f)
sum((f(x)-y0)^2)
g$y0<-y0;   g$f<-f
nlmin(g, x, ...)
}
```

برای مثال، برنامه زیر دستگاه معادلات

$$\begin{cases} e^{x_1} = 3 \\ \sin(x_2) = 0.5 \end{cases}$$

را با مقادیر اولیه $x_1 = x_2 = 0.2$ و $y_0 = (3, 0.5)$ حل می‌کند.

```
f<-function(x)
{c(exp(x[1]), sin(x[2]))}
solveNonlinear
(f, c(3,0.5), c(0.2,0.2))
[1] 1.0986123   0.5235988
```

بنابراین جواب‌های دستگاه، $x_1 = 1.099$ و $x_2 = 0.524$ است.

۴.۳ دستور $optim$

از دستور optim می‌توان برای ماکزیمم یا مینیمم کردن یک تابع غیرخطی استفاده کرد. این تابع به صورت زیر فراخوان می‌شود

```
optim(par, f)
```

که در آن par، مقادیر اولیه پارامترها برای بهینه‌سازی و f یک تابع برای مینیمم‌سازی یا ماکزیمم‌سازی است.

پس از اجرای این دستور مقادیر زیر در خروجی مشاهده می‌شوند:

par: بهترین مجموعه مقادیر برای پارامترها

value: مقدار تابع f در par

برای مثال، برنامه زیر نقطه مینیمم تابع

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

را با مقادیر اولیه $(x, y) = (-1.2, 1)$ محاسبه می‌کند.

```
fr<-function(par)
{
    x<-par[1];  y<-par[2]
    100*(y-x^2)^2+(1-x)^2
}
 #-----------------------
optim(c(-1.2,1), fr)
par:
[1] 1.000260  1.000506
value:
[1] 8.825241e-008
```

مشاهده می‌گردد که تابع فوق در نقطه $(x, y) = (1.000260, 1.000506)$ مینیمم می‌گردد.

۴ کاربرد توابع و روش‌ها

در این بخش با استفاده از مثال‌های متنوع، روش‌های بیان شده در بخش‌های ۲ و ۳ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۴ برآوردهای نقطه‌ای

مثال ۱.۴. برآوردهای گشتاوری در توزیع وایبل

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی به حجم n از توزیع وایبل با پارامترهای θ و β با تابع توزیع

$$F(x;\theta,\beta)=1-e^{-(x/\theta)^{\beta}};x\geq 0,\ \theta\ ,\beta>0,$$

باشد، که در آن θ و β به ترتیب پارامترهای مقیاس و شکل باشد. برای پیدا کردن برآوردهای گشتاوری قرار می‌دهیم

$$E(X)=\theta\Gamma(1+\frac{1}{\beta})=\overline{X}$$

که نتیجه می‌شود

$$\theta=\frac{\overline{X}}{\Gamma(1+\frac{1}{\beta})} \quad (۳)$$

و

$$E(X^2)=\theta^2\Gamma(1+\frac{2}{\beta})=\overline{X^2} \quad (۴)$$

با جایگذاری θ از (؟؟) در معادله (؟؟) ، معادله زیر حاصل می‌شود

$$\overline{X}^2\Gamma(1+\frac{2}{\beta})-\overline{X^2}[\Gamma(1+\frac{1}{\beta})]^2=0 \quad (۵)$$

از آن‌جایی‌که معادله (؟؟) جواب صریحی برای β ارائه نمی‌دهد. بنابراین برای یافتن جواب معادله بایستی از روش‌های عددی با یک نمونه خاص این معادله را حل کرد. از روش‌های نیوتن-رافسون و یا دستور *uniroot* می‌توان برای حل این معادله استفاده کرد. داده‌های زیر مربوط به زمان‌های بین خرابی‌های متوالی در سیستم تهویه هوای مطبوع یک هواپیمای مسافربری بوئینگ ۷۲۰ است. این داده‌ها توسط لاولس (۱۹۸۲) برای توزیع وایبل استفاده شده است (لاولس ۱۹۸۲).

$$74, 57, 48, 29, 502, 12, 70, 21,$$

$$229, 386, 59, 27, 153, 26, 326$$

با استفاده از نمونه فوق برآوردهای گشتاوری به کمک دستور *uniroot* به صورت زیر محاسبه می‌شود.

```
 f1<-function(beta)
{
((mean(x))^2)*gamma(1+(2/beta))-
mean(x^2)*(gamma(1+1/beta))^2
}
#------------------------
beta.tild<-uniroot(f1, lower=0.5,
 upper=3,beta) root
beta.tild
[1] 0.81906
```

مشاهده می‌شود که $\widetilde{\beta}=0.81906$، که با جای‌گذاری در معادله (؟؟) برآورد گشتاوری پارامتر θ برابر با $\widetilde{\theta}=108.8027$ به دست می‌آید.

مثال ۲.۴. برآوردهای درستنمایی ماکزیمم در توزیع وایبل

بر اساس یک نمونه n تایی از توزیع وایبل با پارامترهای θ و β، در مثال قبل، لگاریتم تابع درستنمایی عبارت از مقدار زیر

$$\ln Ln \;=\; \ln\beta+\beta\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{x_i}{\theta})-\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\theta})^{\beta}$$

است که از آن معادلات درستنمایی به صورت زیر حاصل می‌شوند (بین و انگلهارت)

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L=-\frac{n\beta}{\theta}+\frac{\beta}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\theta})^{\beta}=0 \quad (۶)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\ln L=\frac{n}{\beta}+\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{x_i}{\theta})-\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{x_i}{\theta})^{\beta}\ln(\frac{x_i}{\theta})=0. \quad (۷)$$

از معادله (؟؟) نتیجه می‌شود

$$\theta=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (۸)$$

با جایگذاری θ از (؟؟) در معادله (؟؟) این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}-\frac{1}{\beta}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}=0. \quad (۹)$$

به دلیل این‌که معادله (؟؟) جواب صریحی برای β ارائه نمی‌دهد بنابراین بایستی از روش‌های عددی برای حل این معادله استفاده کرد. در این‌جا با روش‌های مختلفی از جمله نیوتن-رافسون ، نقطه ثابت و دستور uniroot می‌توان معادله را حل کرد.

برای به کار بردن روش نقطه ثابت معادله (؟؟) را به صورت

$$h(\beta) = \beta \qquad (۱۰)$$

می‌نویسیم که در آن

$$h(\beta) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \ln x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}\right]^{-1}.$$

با توجه به داده‌های مثال قبل برنامه زیر برآوردهای ML را به روش نقطه ثابت محاسبه می‌کند.

```
h<-function(beta)
{
((sum((x^beta)*log(x))/sum(x^beta))
-sum(log(x))/n)^(-1)
}
#------------------------
fixpoint<-function(beta0)
{
beta.old<-beta0
repeat
{
beta.new<-h(beta.old)
if(abs(beta.new-beta.old)<1e-005)
{break}
beta.old<-beta.new
}
beta.new
}
#------------------------
fixpoint(1)
[1] 0.8884917
```

لذا مشاهده می‌شود $\widehat{\beta} = 0.8884917$، که با جایگذاری در معادله (؟؟) برآورد ML پارامتر $\widehat{\theta} = 113.2999$ است.

لازم به ذکر است که برای حل معادله (؟؟) می‌توان از دستور uniroot نیز به صورت زیر استفاده کرد.

```
f1<-function(beta)
{
(sum((x^beta)*log(x))/sum(x^beta))
-(1/beta)-sum(log(x))/n
}
#------------------------
Beta.hat<-uniroot(f1, lower=0.01,
upper=5, beta) root
Beta.hat
[1] 0.8884888
```

در این‌جا مانند قسمت قبل مشاهده می‌شود $\widehat{\beta} = 0.8884888$، با جای‌گذاری این مقدار در معادله (؟؟) برآورد ML پارامتر $\widehat{\theta} = 111.2997$ به دست می‌آید که نزدیک به مقدار محاسبه شده از روش نقطه ثابت است.

مثال ۳.٤. برآورد درستنمایی ماکزیمم برای پارامتر شکل توزیع گاما

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی به حجم n از توزیع $\Gamma(\alpha, 1)$ با تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x;\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}; \quad x > 0, \alpha > 0.$$

لگاریتم تابع درستنمایی به صورت زیر است:

$$\ln L = -n \ln \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

بنابراین معادله درستنمایی به صورت زیر به دست می‌آید (پارسیان، ۱۳۸٦).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\alpha} \ln L &= -n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \\ &= -n\psi(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0 \qquad (۱۱) \end{aligned}$$

که در آن $\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$، تابع دای گاما می‌باشد و $\Gamma'(\alpha)$ برای $x > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\Gamma(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \ln x \, x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

چون معادله (؟؟) به طور مستقیم دارای جواب نیست. لذا از روش‌های عددی برای حل آن استفاده می‌کنیم. برای پیدا کردن MLE پارامتر α می‌توان از روش‌های مختلف استفاده کرد. می‌توان

به کمک تابع optimize، لگاریتم تابع درستنمایی را ماکزیمم کرد یا از روش‌های نیوتن-رافسون و uniroot معادله درستنمایی (؟؟) را به روش‌های عددی حل کرد.

برنامه زیر ضمن تولید نمونه ۱۰ تایی از توزیع $\Gamma(\alpha=\frac{1}{2},1)$ برآورد ML را با استفاده از دستور uniroot محاسبه می‌کند.

```
x<-rgamma(10, 1/2, 1)
 0.58080   0.06153   1.27370   2.54824   0.00082
0.07061  1.31839  0.16980 0.29846   0.29219
#------------------------
Loglike.dif<-function(alpha)
{ -n*digamma(alpha)+sum(log(x))}
#------------------------
uniroot(Loglike.dif, lower=0.001,
 upper=2) root
 [1] 0.5880865
```

بنابراین $\widehat{\alpha}=0.588$ به دست می‌آید. برنامه زیر چگونگی ماکزیمم کردن تابع لگاریتم درستنمایی با استفاده از دستور optimize را برای نمونه فوق نشان می‌دهد.

```
 Loglike<-function(alpha)
{-n*log(gamma(alpha))
+(alpha-1)*sum(log(x))-sum(x)}
 #------------------------
optimize(Loglike, lower=0.001,
 upper=2, maximum=T) maximum
[1] 0.5880758
```

مشاهده می‌شود با این روش نیز برآورد ML برای پارامتر 0.588 به دست می‌آید.

مثال ٤.٤. برآورد درستنمایی ماکزیمم برای پارامتر مکان توزیع کوشی

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی به حجم n از توزیع کوشی با پارامتر مکان θ با تابع چگالی زیر باشد.

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]};\quad x,\theta\in R$$

لگاریتم تابع درستنمایی و معادله درستنمایی به صورت زیر است:(جانسون و همکاران، ۱۹۹٤)

$$\ln L=-n\ln\pi-\sum_{i=1}^{n}\ln[1+(x_i-\theta)^2],$$

$$S(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L=2\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\theta}{1+(x_i-\theta)^2}=0 \quad (۱۲)$$

معادله (؟؟) به طور مستقیم قابل حل نیست. با تولید یک نمونه تصادفی از این توزیع با استفاده از روش نیوتن-رافسون برآورد پارامتر θ محاسبه می‌گردد. داده‌های زیر یک نمونه شبیه‌سازی شده ۱۰ تایی از توزیع کوشی با پارامتر $\theta=2$ می‌باشد.

$$1.71531,\ -1.74758,\ 2.18850,\ 2.66324,\ 3.16689,$$
$$-0.45627,\ 2.91033,\ 2.13182,\ 1.19956,\ -0.53720$$

برنامه زیر برآورد درستنمایی ماکزیمم پارامتر را به روش نیوتن-رافسون محاسبه می‌کند.

```
Loglike<-function(alpha)
{2*sum((x-alpha)/(1+(x-alpha)^2))}
Loglike.dif<-function(alpha)
{2*sum((-1+(x-alpha)^2)
    /(1+(x-alpha)^2)^2) }
#------------------------
newton<-function(alpha0) {
   m<-0
   continue <- T
   out<-c(rep(NA,21))
   out[1]<-alpha0
while(continue)
 {
if(m>0 && m%%20==0)
    out<-c(out, rep(NA,20))
    m<-m+1
 out[m+1]<-out[m]-Loglike(out[m])
       /Loglike.dif(out[m])
continue<-abs(out[m+1]-out[m])<10^{-5}
   }
   out<-out[1:(m+1)]
   estimate<-out[m+1]
   estimate
}
#------------------------
  newton(2)
```

```
[1] 2.026536
```

مشاهده می‌شود که $\widehat{\theta} = 2.027$ است که نزدیک به مقدار اولیه $\theta = 2$ است که برای تولید داده‌ها استفاده شده است.

برای یافتن $\widehat{\theta}^{(0)}$ چون چگالی توزیع کوشی حول θ متقارن است، توجه کنید که می‌توان میانگین نمونه‌ای یا میانه نمونه‌ای را به عنوان یک برآورد اولیه برای پارامتر در نظر گرفت، اما چون میانگین توزیع کوشی وجود ندارد از میانه نمونه‌ای به عنوان برآورد اولیه استفاده شده است. در نمونه تولید شده میانه نمونه‌ای برابر با 1.924 است که با این مقدار اولیه، برآورد پارامتر θ عبارت است از $\widehat{\theta} = 2.030$ که با مقدار به دست آمده در قسمت قبل دارای تفاوت بسیار کمی است.

مثال ۵.۴. برآورد درستنمایی ماکزیمم پارامترهای مکان و مقیاس توزیع کوشی

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی به حجم n از توزیع کوشی با پارامتر مکان μ و پارامتر مقیاس σ با تابع چگالی زیر

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\pi\sigma[1+(\frac{x-\mu}{\sigma})^2]}; \quad x,\mu \in R,\ \sigma > 0.$$

باشد. لذا معادلات درستنمایی برای موقعی که هر دو پارامتر مجهول باشند، به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\mu}{\sigma^2+(x_i-\mu)^2} = 0 \qquad (۱۳)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L = \frac{n}{\sigma} - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma}{\sigma^2+(x_i-\mu)^2} = 0 \qquad (۱۴)$$

در اینجا نیز مستقیماً نمی‌توان دو معادله اخیر را به طور هم‌زمان بر حسب μ و σ حل کرد. لذا باید از روش‌های عددی این معادلات را حل کرد. در اینجا از روش `nlmin` برای حل این دستگاه استفاده شده است. برنامه زیر ضمن تولید یک نمونه شبیه‌سازی شده ۱۵ تایی از توزیع کوشی استاندارد $(\mu = 0, \sigma = 1)$ برآوردها را به کمک دستور `nlmin` محاسبه می‌کند.

```
Finv <- function(u, mu, sigma)
{mu + sigma * tan(pi * (u - 1/2))}
#------------------------
y <- function(n, mu, sigma){
 u <- runif(n);
x1 <- Finv(u, mu, sigma)
  x1
}
 n <- 15
 x <- y(15, 0, 1)
#------------------------
1.798856,   -0.762050,  1.755704,
2.011424,   -0.072618,  1.339761,
-0.328074,  -0.406638,  2.091615,
29.116600,   0.349064,  -0.958448,
0.349594,   -6.302089,   -0.080340
#------------------------
Loglike1<-function(par){
2*sum((x-par[1])/((par[2]^2)
+(x-par[1])^2))}
Loglike2<-function(par)
{  n/(par[2])-2*sum(par[2]/
((par[2]^2)+(x-par[1])^2)) }
#------------------------
solveNonlinear
<-function(f, y0, x, ...)
{
g<-function(x, y0, f)
sum((f(x)-y0)^2)
g$y0<-y0; g$f<-f
nlmin(g, x, ...)
}
f<-function(par)
c(Loglike1(par),Loglike2(par))
#------------------------
solveNonlinear(f,c(0,0),c(0,1)) x
```

```
[1] 0.2293699    0.9651796
```

بنابراین مشاهده می‌شود که $\widehat{\mu}=0.2294$ و $\widehat{\sigma}=0.9652$ است که نزدیک به مقادیر اولیه $\mu=0$ و $\sigma=1$ است که برای تولید داده‌ها استفاده شده‌اند.

مثال ٦.٤. محاسبه برآوردهای صدکی در توزیع وایبل معکوس

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی به حجم n از توزیع معکوس با تابع توزیع تجمعی زیر باشد.

$$F(x)=e^{-\lambda x^{-\beta}};\ x,\lambda,\beta>0 \qquad (۱۵)$$

برای توابع توزیع با فرم بسته، برخی اوقات پارامترهای نامعلوم را با برازش دادن یک خط راست به نقاط صدکی نظری به دست آمده از تابع توزیع و نقاط صدکی نمونه برآورد می‌کنند. در این بخش برای برآورد پارامترهای توزیع وایبل معکوس از این روش استفاده می‌شود. با توجه به تابع توزیع فوق، معکوس تابع عبارت از

$$x=\left(-\frac{1}{\lambda}\ln F(x)\right)^{-\frac{1}{\beta}}, \qquad (۱۶)$$

است. فرض کنید $X_{i:n}(i=1,2,\cdots)$، آماره‌های ترتیبی متناظر نمونه تصادفی با حجم n از توزیع (؟؟) باشد. اگر p_i نشان دهنده یک برآورد برای $F(x_{i:n})$ باشد آن‌گاه برآورد β و λ را می‌توان با مینیمم کردن رابطه

$$\sum_{i=1}^{n}\left[x_{i:n}-\left(-\frac{1}{\lambda}\ln p_i\right)^{-\frac{1}{\beta}}\right]^2 \qquad (۱۷)$$

نسبت به β و λ به دست آورد. برآوردگرهای بسیاری برای p_i مورد استفاده قرار می‌گیرند که در این مقاله $p_i=\frac{i}{n+1}$ استفاده می‌شود که مقدار مورد انتظار برای $F(X_{i:n})$ یعنی $E[F(X_{i:n})]$ است. در اینجا نیز برآوردها به طور مستقیم قابل محاسبه نیست لذا باید از روش‌های عددی برای به دست آوردن آنها استفاده کرد در این مثال برای مینیمم کردن رابطه (؟؟) از دستور optim استفاده خواهیم کرد.

داده‌های زیر مربوط به میزان حداکثر سطح سیلاب رودخانه‌ای در پنسیلوانیا است (ماسوداه، ۲۰۰۳). برنامه زیر نحوه محاسبه برآوردهای صدکی را با استفاده از دستور optim نشان می‌دهد.

0.654, 0.613, 0.315, 0.449, 0.297,

0.402, 0.379, 0.423, 0.379, 0.324,

0.269, 0.740, 0.418, 0.412, 0.494,

0.416, 0.338, 0.392, 0.484, 0.265.

```
fPCE<-function(par,n,x)
{
   beta<-par[1]
   lambda<-par[2]
   p<-(1:n)/(n+1)
sum((x-(-log(p)/lambda)
 ^(-1/beta) )^2)
}
#-----------------------
optim(c(4,1),fPCE,n=n,x=x) par
par:
[1] 4.056668 0.01564256
```

مشاهده می‌شود که $\widehat{\beta}=4.056668$ و $\widehat{\lambda}=0.015642$ به دست آمده است.

۲.٤ فواصل اطمینان

مثال ٧.٤. فاصله اطمینان برای پارامتر مقیاس توزیع نیمه‌لجستیک

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی به حجم n از توزیع نیمه‌لجستیک با تابع توزیع

$$F(x)=\frac{1-e^{-\frac{x}{\sigma}}}{1+e^{-\frac{x}{\sigma}}};\quad x>0,\ \sigma>0$$

باشد. می‌خواهیم یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای پارامتر مقیاس σ پیدا کنیم. با توجه به این‌که

$$F(X)\sim U(0,1),$$

و همچنین

$$-2\sum_{i=1}^{n}\ln[1-F(X_i)]\sim\chi^2_{(2n)},$$

کمیت محوری مناسب را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$Q(\sigma) = -2\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{2e^{-\frac{X_i}{\sigma}}}{1+e^{-\frac{X_i}{\sigma}}}\right),$$

که دارای توزیع کای-دو با $2n$ درجه آزادی است. با توجه به این که داریم

$$P\left(\chi^2_{((2n),\alpha/2)} < Q(\sigma) < \chi^2_{((2n),1-\alpha/2)}\right) = 1-\alpha \qquad (۱۸)$$

لذا یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای پارامتر مقیاس σ از حل نامساوی داخل پرانتز در (؟؟) بر حسب σ به دست می‌آید. از آنجا که این نامساوی به صورت مستقیم قابل حل نیست، بایستی از روش‌های عددی برای حل این نامساوی استفاده شود. ابتدا توجه کنید که داریم

$$\frac{d}{d\sigma}Q(\sigma) = -2\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{X_i}{\sigma^2}}{1+e^{-\frac{X_i}{\sigma}}} < 0,$$

بنابراین $Q(\sigma)$ یک تابع نزولی است. به علاوه داریم

$$\lim_{\sigma\to 0} Q(\sigma) = \infty, \quad \lim_{\sigma\to\infty} Q(\sigma) = 0$$

لذا برای هر $t > 0$ معادله $Q(\sigma) = t$ دارای یک جواب منحصر به فرد برای $\sigma > 0$ است. بنابراین از (؟؟) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} P\Big(\varphi(x_1,...,x_n,\chi^2_{((2n),1-\alpha/2)}) &< \sigma \\ &< \varphi(x_1,...,x_n,\chi^2_{((2n),\alpha/2)})\Big) \\ &= 1-\alpha \end{aligned}$$

که در آن $\varphi(x_1,...,x_n,t)$ حل معادله $Q(\sigma) = t$ بر حسب σ است، که بایستی از روش‌های عددی مانند `uniroot` محاسبه شود. برنامه زیر ضمن تولید یک نمونه شبیه‌سازی شده ۱۵ تایی از توزیع نیمه‌لجستیک استاندارد چگونگی محاسبه فاصله اطمینان ٪۹۵ فوق را به کمک دستور `uniroot` نشان می‌دهد.

```
Finv<-function(u,sigma)
{
 sigma*log((1+u)/(1-u))
}
#------------------------
data<-function(n,sigma)
{
    u<-runif(n)
    Finv(u,beta,lambda)
}
data(15,1)
#------------------------
0.8687873, 2.2326558, 0.3827091,
0.7943238, 0.7712106, 1.7864730,
0.5548257, 0.4657953, 2.6672471,
0.7486163, 0.8346238, 0.3793018,
2.8546017, 4.8726841, 0.5369112.
#------------------------
chi.squar.left<-qchisq(0.975,2*n)
chi.squar.right<-qchisq(0.025,2*n)
#------------------------
Q1<-function(sigma)
{
2*sum(log(1-(1-exp(-x/sigma))/
(1+exp(-x/sigma))))-chi.squar.left
}
#------------------------
Q2<-function(sigma)
{
-2*sum(log(1-(1-exp(-x/sigma))/
(1+exp(-x/sigma))))-chi.squar.right
}
#------------------------
uniroot(Q1, lower = 0.2,
upper = 2)root
[1] 0.6840422
uniroot(Q2, lower = 0.2,
upper = 2)root
[1] 1.634895
```

فاصله اطمینان به دست آمده براساس نمونه فوق با استفاده از دستور `uniroot`، عبارت از $(0.684, 1.635)$ است.

مثال ۸.۴. کوتاه‌ترین فاصله اطمینان برای پارامتر مقیاس توزیع گاما

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی به حجم n از توزیع $\Gamma(\theta, \beta)$ با تابع چگالی

$$f(x; \theta, \beta) = \frac{\beta^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-\beta x}; x, \theta, \beta > 0$$

باشد، که θ معلوم است. از روش کمیت محوری کوتاه‌ترین فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ را برای پارامتر مقیاس β پیدا می‌کنیم. می‌دانیم که

$$Q = 2\beta \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \chi^2_{2n\theta}$$

بنابراین داریم

$$P(a < Q < b) = 1 - \alpha$$

یا

$$P\left(\frac{a}{2\sum_{i=1}^n x_i} < \beta < \frac{b}{2\sum_{i=1}^n x_i}\right) = 1 - \alpha.$$

بنابراین کوتاهترین فاصله اطمینان بر پایه کمیت محوری Q، در سطح $1-\alpha$ با مینیمم کردن طول فاصله زیر،

$$l(a, b) = \frac{1}{2\sum_{i=1}^n x_i}(b - a)$$

با شرط جانبی

$$\int_a^b h_\nu(t) dt = 1 - \alpha$$

یا

$$P(a < Q < b) = 1 - \alpha$$

به دست می‌آید، که در آن $h_\nu(.)$ تابع چگالی احتمال توزیع کای دو با $\nu = 2n\theta$ درجه آزادی است. برای این منظور a و b باید به‌گونه‌ای اختیار شوند که همزمان در دو رابطه زیر صدق کنند (پارسیان، ۱۳۸۶).

$$\int_a^b h_\nu(t) dt = 1 - \alpha,$$

$$h_\nu(a) = h_\nu(b).$$

معادلات فوق به طور مستقیم برای هر ν معلوم قابل حل نیستند لذا از روش‌های عددی برای حل دستگاه استفاده می‌کنیم. برنامه زیر ضمن تولید نمونه تصادفی شبیه‌سازی شده ۵ تایی از توزیع $\Gamma(\theta = 1, \beta = 0.5)$ روش حل دستگاه فوق را به کمک دستور `nlmin` نشان می‌دهد.

```
x=rgamma(5,1,0.5)
1.0849164, ~0.4055163, ~0.8452285,
0.4026239, ~1.0496008.
#------------------------
v=2*n*\theta=2*5*1=10
f1<-function(x){(1/(2^(v/2)
*gamma(v/2)))*(x^(n/2-1))*exp(-x/2)}
#------------------------
solveNonlinear<-function(f, y0, x, ...)
{ g<-function(x, y0, f)sum((f(x)-y0)^2)
 g$y0<-y0; g$f<-f
 nlmin(g, x, ...)
}
#------------------------
f<-function(par)
c(integrate(f1,lower=par[1],
upper=par[2]) integral,
dchisq(par[1],v)-dchisq(par[2],v))
#------------------------
solveNonlinear(f, c(0.95,0),
c(0.1,5)) x
[1] 0.01484753     4.51094482
```

بنابراین مقادیر a و b به ترتیب عبارت از 0.015 و 4.5 هستند. بنابراین با توجه به این که $\sum_{i=1}^5 x_i = 3.788$، کوتاه‌ترین فاصله اطمینان در سطح 95% به صورت

$$\left(\frac{a}{2\sum_{i=1}^n x_i}, \frac{b}{2\sum_{i=1}^n x_i}\right) = (0.002, 0.595)$$

به دست می‌آید.

مثال ۹.۴. فاصله اطمینان نااریب برای پارامتر مقیاس توزیع گاما

«یک فاصله اطمینان نااریب، پارامتر واقعی را با حداکثر احتمال در بر دارد.» با توجه به مثال ۸.۴، می‌توان ثابت‌های a و b را به‌گونه‌ای پیدا کرد که

$$P_\beta\left(\frac{a}{2\sum_{i=1}^n x_i} < \beta < \frac{b}{2\sum_{i=1}^n x_i}\right) = 1 - \alpha$$

لذا احتمال این که فاصله $(\frac{a}{2\sum_{i=1}^{n}x_i},\frac{b}{2\sum_{i=1}^{n}x_i})$ پارامتر غیرواقعی β' را در بر داشته باشد عبارت از

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= P_\beta(\frac{a}{2\sum_{i=1}^{n}x_i}<\beta'<\frac{b}{2\sum_{i=1}^{n}x_i}) \\ &= P(a\lambda<Q<b\lambda) \end{aligned}$$

است که در آن $\lambda=\frac{\beta}{\beta'}$. حال برای پیدا کردن فاصله اطمینان نااریب $100(1-\alpha)\%$ برای پارامتر β، باید a و b را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم (پارسیان، ۱۳۸٦)

$$H(\lambda)\begin{cases} =1-\alpha; & \beta'=\beta \\ <1-\alpha; & \beta'\neq\beta \end{cases}.$$

برای این منظور باید a و b را طوری پیدا کرد که همزمان در معادلات زیر صدق کنند

$$\begin{cases} \int_a^b h_\nu(t)dt=1-\alpha, \\ bh_\nu(b)=ah_\nu(a) \end{cases},$$

که در آن $h_\nu(.)$ تابع چگالی احتمال توزیع کای دو با $\nu=2n\theta$ درجه آزادی است. معادلات فوق برای هر ν داده شده به طور مستقیم قابل حل نیستند، لذا از روش‌های عددی برای حل این دستگاه استفاده می‌شود.

برنامه زیر با به‌کاربردن نمونه تصادفی 5 تایی شبیه‌سازی شده از توزیع $\Gamma(\theta=1,\beta=0.5)$، روش حل دستگاه فوق را به روش nlmin نشان می‌دهد.

$$0.4469,\ 0.11557,\ 0.49976,\ 0.00288,\ 0.03896$$

```
v=2*n*\theta=2*5*1=10
f1<-function(y){(1/(2^(v/2)
*gamma(v/2)))*(y^(v/2-1))*exp(-y/2)}
 #-----------------------
solveNonlinear <-
function(f, y0, x, ...){
g<-function(x, y0, f)
sum((f(x)-y0)^2)
g$y0<-y0;  g$f<-f
nlmin(g, x, ...)
}
f<-function(par)
{
c(integrate(f1,lower=par[1],
upper=par[2]) integral, par[1]*
dchisq(par[1],v)-par[2]*
dchisq(par[2],v))
}
 #-----------------------
solveNonlinear(f, c(0.95,0),
 c(0.1,5)) x
[1] 0.0495502   2.3430634
```

بنابراین $a=0.049$ و $b=2.343$. با توجه به این که $\sum_{i=1}^{5}x_i=1.104$، فاصله اطمینان نااریب در سطح 95% عبارت از $(0.022,1.061)$ است.

مثال ۴.۱۰. فاصله اطمینان بیزی HPD

فرض کنید $\pi(\theta|\underline{x})$ چگالی پسین پارامتر θ باشد. فاصله (I_1,I_2) یک فاصله اطمینان بیزی در سطح $1-\alpha$ برای پارامتر θ است اگر داشته باشیم

$$\int_{I_1}^{I_2}\pi(\theta|\underline{x})d\theta=1-\alpha.$$

فاصله (c,d) در فضای پارامتر Θ، یک فاصله اطمینان بیزی HPD در سطح $1-\alpha$ برای θ نامیده می‌شود، اگر

الف) $P(c<\theta<d|\underline{X}=\underline{x})=1-\alpha$

ب) به ازای هر $\theta_1\in(c,d)$ و $\theta_2\notin(c,d)$

$$\pi(\theta_1|\underline{x})\geq\pi(\theta_2|\underline{x})$$

اگر چگالی پسین تک‌مدی باشد، برای پیدا کردن فاصله اطمینان بیزی HPD در سطح $1-\alpha$، باید ثابت‌های c و d را به‌گونه‌ای پیدا کرد که هم‌زمان در معادلات زیر صدق کنند، (کسلا و برگر، ۲۰۰۲)

$$\begin{cases} \int_c^d \pi(\theta|\underline{x})d\theta=1-\alpha, \\ \pi(c|\underline{x})=\pi(d|\underline{x}) \end{cases} \qquad (۱۹)$$

فرض کنید $X_1,X_2,...,X_n$ نمونه‌ای تصادفی به حجم n از توزیع نمایی با تابع توزیع

$$F(x)=1-e^{-\theta x},\quad x,\theta>0,$$

باشد. بنابراین تابع درستنمایی نمونه عبارت از

$$L(\theta)=\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i} \quad (۲۰)$$

است. فرض کنید θ دارای چگالی پیشین $\Gamma(\lambda,\lambda)$ باشد یعنی

$$\pi(\theta)=\frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\theta^{\lambda-1}e^{-\theta\lambda};\ \theta>0 \quad (۲۱)$$

از معادلات (؟؟ و ؟؟) می‌توان چگالی پسین θ را به صورت زیر به دست آورد

$$\pi(\theta|\underline{x})=\frac{[\lambda+\sum_{i=1}^n x_i]^{n+\lambda}}{\Gamma(n+\lambda)}\times\theta^{n+\lambda-1}e^{-\theta(\lambda+\sum_{i=1}^n x_i)}. \quad (۲۲)$$

به این ترتیب $\theta|\underline{x}\sim\Gamma(n+\lambda,\lambda+\sum_{i=1}^n x_i)$، بنابراین برای توزیع شرطی $\theta|\underline{x}$، می‌توان ثابت کرد رابطه زیر برقرار است.

$$2\theta[\lambda+\sum_{i=1}^n x_i]\sim\chi^2_{(2(n+\lambda))}.$$

بنابراین یک فاصله اطمینان بیزی در سطح $1-\alpha$، برای پارامتر θ عبارت از

$$\left(\frac{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},2(n+\lambda))}}{2[\lambda+\sum_{i=1}^n x_i]},\frac{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},2(n+\lambda))}}{2[\lambda+\sum_{i=1}^n x_i]}\right) \quad (۲۳)$$

است که در آن $\chi^2_{(\alpha,2(n+\lambda))}$ صدک α–ام توزیع کای دو با $2(n+\lambda)$ درجه آزادی است.

برای ساختن یک فاصله اطمینان بیزی HPD در سطح $1-\alpha$، چون چگالی پسین تک‌مدی است، پس از جای‌گذاری چگالی پسین (؟؟) در معادلات (؟؟) و ساده کردن معادلات نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}\Gamma_d(n+\lambda,\lambda+\sum_{i=1}^n x_i)-\\ \Gamma_c(n+\lambda,\lambda+\sum_{i=1}^n x_i)=1-\alpha,\\ (\frac{c}{d})^{n+\lambda-1}=e^{(c-d)(\lambda+\sum_{i=1}^n x_i)}\end{cases}$$

که در آن

$$\Gamma_x(r,t)=\int_0^x\frac{t^r}{\Gamma(r)}y^{r-1}e^{-ty}dy,$$

تابع توزیع تجمعی چگالی توزیع گاما با پارامترهای r و t است.

برنامه زیر با استفاده از مقدار معلوم $\lambda=4$ و با استفاده از (؟؟)، مقدار $\theta=1.1632$ را تولید می‌کند. همچنین ضمن تولید نمونه‌ای به حجم $n=20$ از توزیع نمایی با $\theta=1.1632$، روش حل دستگاه

$$\begin{cases}\Gamma_d(24,20.737\\ \Gamma_c(24,20.737)=0.95\\ (\frac{c}{d})^{23}=e^{20.737(c-d)}\end{cases}$$

را به روش nlmin را نشان می‌دهد.

```
lambda<-4
theta<-rgamma(1, lambda, lambda)
theta
[1] 1.163228
 #------------------------
n = 20
x<-rexp(n, theta)
 0.48728 1.37696 0.71071 0.00930
 1.39445 1.03495 0.58914 1.79244
 0.19559 1.16657 1.12994 0.03951
 0.55265 1.11496 0.11926 2.61085
 0.78845 0.91164 0.67986 0.03235
 #------------------------
a<-n+lambda
b<-lambda+sum(x)
 #------------------------
gamm.ab<-function(y)
{
((b^a)*(y^(a-1))*exp(-y*b))
/(gamma(a))
}
 #------------------------
Gamm.ab<-function(z)
{
integrate(gamm.ab, lower = 0,
upper = z) integral
}
 #------------------------
solveNonlinear<-
function(f, y0, x, ...)
{
g<-function(x, y0, f)
 sum((f(x)-y0)^2)
g$y0<-y0
g$f<-f
nlmin(g, x, ...)
}
f<-function(par)c(Gamm.ab(par[2])
-Gamm.ab(par[1]),
 (((par[1]/par[2])^(a-1))
```

```
-exp((par[1]-par[2])*b)))
 #-----------------------
solveNonlinear(f, c(0.95, 0),
c(0.741, 1.664)) x
[1] 0.7412955   1.6638267
```

لذا فاصله اطمینان بیزی از رابطه (؟؟)، به صورت $(0.741, 1.664)$ به دست می‌آید. با استفاده از این فاصله به عنوان مقادیر اولیه برای (c, d)، فاصله اطمینان بیزی HPD در سطح 95% برای پارامتر عبارت است از $(0.7412955, 1.6638267)$.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش‌های عددی مختلف برای به دست آوردن برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای مرور شده‌اند. پس از معرفی روش‌های عددی مختلف، از جمله روش نقطه ثابت و روش نیوتن- رافسون، برای حل عددی معادلات، نحوه محاسبه اکسترمم‌های نسبی در نرم‌افزار S_PLUS به کمک دستورهای مختلف ارائه گردید. در قالب مثال‌های مختلف ، کاربرد روشهای عددی و دستورات فوق برای محاسبه انواع برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای مورد بررسی قرار گرفته اند.

قدردانی

نویسندگان مقاله نهایت تشکر و قدردانی را از سردبیر محترم نشریه و داور محترم دارند که با پیشنهادات و رهنمودهای ارزشمند خویش باعث بهبود نسخه اولیه مقاله برای چاپ گردیدند.

مراجع

[۱] بین، لی، انگلهارت، ماکس، چاپ دوم، ۱۳۸۴، مقدمه‌ای بر احتمال و آمار ریاضی، مشکانی، علی، آذرنوش، حسنعلی و بزرگ نیا، ابوالقاسم، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

[۲] پارسیان، احمد، چاپ سوم، ۱۳۸۶، مبانی آمار ریاضی، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان.

[۳] وحیدی، جواد و قاسمی، صابر، ۱۳۸۳، روش‌های محاسبات عددی، انتشارات دانش نگار.

[4] Casella, G., and Berger, R. (2002). Statistical Inference. (2nd ed.). Pacific Grove, California: Wadsworth Brooks/Cole.

[5] Johnson, N.L., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1994). Continuous Univariate Distribution, vol. 1. John Wiley and Sons, Inc., New York

[6] Knight, K. (2000). Mathematical statistics. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, Florida.

[7] Lawless, J.F. (1982). Statistical Models and Methods for Lifetime Data, NewYork, Wiley.

[8] Maswadah, M. (2003). Conditional confidence interval estimation for the inverse weibull distribution based on censored generalized order statistics, Journal of Statistical Computation and Simulation, **73(12)**, 887-898.

[9] S-PLUS, (2007). version 8.0: http://www.insightful.com/, Insightful Corp.