وابستگی دمی برای میانگین موزون دو تابع مفصل

محمد امینی[۱]، هادی جباری نوقابی[۲]، مهلا قاسم نژادفرسنگی [۳]

چکیده:

در این مقاله نوعی از اندازه‌های وابستگی موسوم به اندازه وابستگی دمی که برای سنجش میزان وابستگی در دم توزیع‌ها به‌کار می‌رود، معرفی می‌شود. پس از معرفی میانگین‌های موزون توانی، حسابی، هندسی و هارمونیک دو تابع مفصل، پایایی اندازه‌های وابستگی دمی (قوی) را نسبت به این میانگین‌ها بررسی کرده و نشان می‌دهیم که اندازه وابستگی دمی پایین نسبت به تمامی این توابع پایا است. این در حالی است که اندازه وابستگی دمی بالا تنها نسبت به میانگین حسابی پایا می‌باشد. همچنین رابطه‌ای مشابه با رابطه‌ی بین میانگین توانی دو مفصل با سایر میانگین‌های ذکر شده را برای اندازه‌های دمی توابع مفصل به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: تابع مفصل، میانگین توانی، میانگین حسابی، میانگین هندسی، میانگین هارمونیک، اندازه دمی قوی، اندازه دمی ضعیف

۱ مقدمه

از میان میانگین‌های موزون دو مفصل(میانگین‌های توانی، هندسی، هارمونیک و توانی) میانگین توانی، یک حالت کلی از سایر میانگین‌ها است و به‌ازای مقادیر مختلفی که به پارامتر r در این میانگین می‌دهیم، می‌توانیم مابقی میانگین‌ها را به دست آوریم. در این تحقیق نوعی از اندازه‌های وابستگی به‌نام اندازه وابستگی دمی را معرفی کرده و ثابت می‌کنیم که اندازه وابستگی دمی(قوی) پایین، نسبت به همه‌ی میانگین‌های موزون ذکر شده پایاست. همچنین نشان می‌دهیم که اندازه‌های دمی پایین سایر میانگین‌ها، حالات خاصی از اندازه دمی پایین میانگین توانی است. اندازه‌های وابستگی دمی برای سنجش میزان وابستگی در دم توزیع به‌کار می‌روند. با استفاده از این اندازه‌ها می‌توان به سنجش وابستگی بین پیشامدهای فرین و پیشامدهای نادر(مانند وابستگی بین بازارهای تجاری جهانی هنگامی‌که یک شوک اقتصادی بزرگ رخ می‌دهد)، پرداخت. این اندازه‌ها در سال ۱۹۶۰، توسط ماسواکی سبوئیا معرفی شده و شکل متداول و امروزی‌شان را می‌توان در کتاب جو(۱۹۹۷)، یافت. اندازه‌های وابستگی دمی در مسایل کاربردی مربوط به مالیه در بازارهای تجاری (امبرتس و همکاران، ۲۰۰۳)، پیشنهاد یک اندازه ریسک برای سهام، بررسی پدیده سرایت شوک‌های مثبت و منفی در بازارهای بین المللی سهام (سان و همکاران، ۲۰۰۷) و ... به‌کار می‌روند. در سال ۲۰۰۵، کلایول و گاگن با برآورد این اندازه‌ها برای داده‌های نرخ ارز کشورهای تایلند، اندونزی و مالزی، بهترین مفصل مربوط به هر زوج از بازارهای این کشورها را تعیین کرده و از این طریق، تأثیر متقابل روند تجاری بازارهای آن‌ها را بر یکدیگر (در زمان وقوع بحران‌های اقتصادی)، مورد سنجش قرار دادند. در این تحقیق، اندازه‌های وابستگی دمی را برای میانگین‌های موزون دو تابع مفصل به دست آورده و روابط بین آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در راستای تحقیقات انجام شده، ساختار مقاله به شرح زیر است:

در بخش دوم پس از بیان خواص تابع مفصل، چند تابع حاصل از میانگین‌های موزون دو مفصل و همچنین خانواده مفصل‌های سری توانی را معرفی می‌کنیم و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش سوم مفهوم اندازه وابستگی دمی قوی [۴](کلین و همکاران،۲۰۱۱) و اندازه دمی باقی‌مانده یا ضعیف [۵] (فاک و همکاران، ۲۰۱۱ و کلین و همکاران، ۲۰۱۱) را هم از طریق

[۱] عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

[۲] عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

[۳] کارشناس ارشد گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

[۴] Strong tail dependence

[۵] Strong tail dependence or Weak tail dependence

تابع توزیع و هم با استفاده از تابع مفصل بیان می‌کنیم. در بخش چهارم اندازه‌های وابستگی دمی(قوی) را برای میانگین‌های موزون ذکر شده به دست آورده و نشان می‌دهیم که با استفاده از اندازه دمی پایین مفصل حاصل از میانگین توانی دو مفصل، می‌توان به اندازه دمی پایین میانگین‌های حسابی، هندسی و هارمونیک آن‌ها دست یافت.

۲ میانگین موزون دو مفصل

تعریف ۱.۲. تابع $C(u,v): I^2 \to I$، را یک تابع مفصل (در حالت دو بعدی) است، هرگاه ویژگی‌های زیر باشد:

۱)

$$C(u,0)=C(0,v)=0\ ,\ C(u,1)=u\ ,\ C(1,v)=v.$$

۲) (شرط دو صعودی بودن)

برای هر u_1,u_2,v_1,v_2 در I، طوری‌که $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$ داریم:

$$C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1) \geq 0. \qquad (۱)$$

طبق قضیه اسکلار(۱۹۵۹)، اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع توأم H و توابع توزیع حاشیه‌ای F و G باشند، آنگاه مفصل C وجود خواهد داشت به قسمی که: $H(x,y)=C(F(x),G(y))$. همچنین در صورتی‌که توابع توزیع F و G مطلقاً پیوسته باشند، این مفصل یکتا است.

با توجه به مطالعات کوادراس (۲۰۰۹) و کلین و همکاران (۲۰۱۱)، اگر $C_1(u,v)$ و $C_2(u,v)$ دو تابع مفصل باشند، برای هر $\theta \in [0,1]$ و $r \in R$، میانگین‌های حسابی، هندسی، هارمونیک و توانی دو مفصل C_1 و C_2، به‌ترتیب عبارت از:

$$1)\qquad C_{1\theta}=\theta C_1+(1-\theta)C_2$$

$$2)\qquad C_{2\theta}=C_1^{\theta}C_2^{1-\theta}$$

$$3)\qquad C_{3\theta}=\{\theta C_1^{-1}+(1-\theta)C_2^{-1}\}^{-1}$$

$$4)\qquad C_{r,\theta}=(\theta C_1^{r}+(1-\theta)C_2^{r})^{\frac{1}{r}}$$

هستند.

پس از بررسی شرایط مفصل برای هر چهار تابع فوق، می‌توان گفت که میانگین حسابی دو مفصل هم‌چنان یک مفصل باقی می‌ماند، در حالی‌که میانگین‌های هارمونیک، هندسی و توانی وزنی دو مفصل در حالت کلی مفصل نیستند. به‌سادگی می‌توان نشان داد که سایر میانگین‌های ذکر شده، حالت‌هایی خاص از میانگین توانی دو مفصل می‌باشند، به‌عبارت دیگر با در نظر گرفتن دو مفصل $C_1(u,v)$ و $C_2(u,v)$، در صورتی‌که میانگین‌های موزون حسابی، هندسی، هارمونیک و توانی آن‌ها را به‌ترتیب با $C_{1\theta}$، $C_{2\theta}$، $C_{3\theta}$ و $C_{r,\theta}$ نمایش دهیم، برای هر $\theta \in [0,1]$

- اگر $r=1$، آن‌گاه $C_{r,\theta}=C_{1\theta}$
- اگر $r \to 0$، آن‌گاه $\lim_{r\to 0} C_{r,\theta}=C_{2\theta}$
- اگر $r=-1$، آن‌گاه $C_{r,\theta}=C_{3\theta}$

نلسن (۲۰۰۶) و کوادراس (۲۰۰۹)، خواص میانگین‌های موزون چند نمونه از مفصل‌های خاص را مورد بررسی قرار داده‌اند. از میانگین هندسی وزنی دو خانواده فارلی-گامبل-مورجنسترن[۶] (مورجنسترن، ۱۹۵۶؛ گامبل، ۱۹۵۸ و فارلی، ۱۹۶۰) و علی-میخائیل-حق[۷] (هاچینسون و لای، ۱۹۹۰)، خانواده‌ای از مفصل‌ها با عنوان مفصل‌های سری توانی به دست می‌آید. از آن‌جایی که این طریقه‌ی ساخت یک بسط دو سری را ارایه می‌کند، نام سری توانی (PS)[۸] برای این خانواده انتخاب شده است.

تعریف ۲.۲. به ازای هر عدد $k \geq 0$ و $-1 \leq \alpha,\beta \leq 1$، مفصل سری توانی عبارت از:

$$PS_2(\alpha,\beta,\theta_1,\theta_2)=$$
$$uv[1+\alpha(1-u)(1-v)]^{\theta_1}[1+\beta(1-u)(1-v)]^{\theta_2}.$$

است که در آن $|\theta_1|+|\theta_2|=1$. مفصل استقلال یک حالت خاص از مفصل PS_2 به ازای $\alpha=\beta=0$ است.

تعریف ۳.۲. نلسن (۲۰۰۶)

مفصل دو متغیره C، یک مفصل مقدار فرین است اگر و تنها اگر رابطه‌ی زیر برای آن برقرار باشد:

$$C(u,v)=(uv)^{A(\ln(v)/\ln(uv))}\ ,\quad (u,v)\in(0,1]^2\setminus\{(1,1)\}$$

که در آن $A:[0,1]\to[\frac{1}{2},1]$ تابعی محدب است و برای هر $t\ \epsilon\ [0,1]$ داریم: $max\{t,1-t\}\leq A(t)\leq 1$، همچنین تساوی

[۶] $C_\theta(u,v)=uv[1+\theta(1-u)(1-v)]\ ,\ \ \theta\in[-1,1]$

[۸] Power Series

[۹] Pickand

$A(0) = A(1) = 1$، نیز برقرار می‌باشد. معمولاً تابع $A(.)$ در مدل فوق را تابع وابستگی پیکند[۹] می‌نامند.

تذکر ۴.۲. (کلین و همکاران، ۲۰۱۱): برای هر $r \geq 1$، اگر توابع مفصل C_1 و C_2 تعویض پذیر باشند، میانگین توانی وزنی آن‌ها یک مفصل است و برای $r < 1$ در حالت کلی نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت.

تذکر ۵.۲. (کلین و همکاران، ۲۰۱۱): اگر C_1 و C_2 متعلق به خانواده مفصل‌های مقدار فرین باشند، آن‌گاه میانگین توانی وزنی آن‌ها برای $r > 0$، یک مفصل است.

براساس مطالب ارائه شده، دو نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

- مفصل PS_2 با رابطه‌ی (؟؟) به‌دلیل برقراری تساوی $C(u,v) = C(v,u)$ یک مفصل تعویض‌پذیر است. بنابراین طبق نکته (؟؟)، اگر C_1 و C_2 دو مفصل از خانواده PS_2 باشند، میانگین توانی آن‌ها برای هر $r \geq 1$ یک مفصل است.

- اگر به ازای هر $(u,v) \in (0,1]^2 \setminus \{(1,1)\}$، C_1 و C_2 دو مفصل مقدار فرین با روابط

$$C_1(u,v) = (uv)^{D_1(\ln(v)/\ln(uv))}$$

و

$$C_2(u,v) = (uv)^{D_2(\ln(v)/\ln(uv))}$$

باشند، آن‌گاه میانگین هندسی وزنی C_1 و C_2 نیز یک مفصل مقدار فرین با رابطه‌ی

$$C(u,v) = (uv)^{D_3(\ln(v)/\ln(uv))},$$

است که در آن $D_3 = \theta D_1 + (1-\theta) D_2$.

۳ اندازه‌های وابستگی دمی

اندازه‌های وابستگی دمی که برای اندازه‌گیری میزان وابستگی بین متغیرها در دم توزیع به‌کار می‌روند، دو نوع هستند: اندازه‌های وابستگی دمی قوی (ماسواکی سبوئیا، ۱۹۶۰) و اندازه‌های وابستگی دمی ضعیف (کولز و همکاران، ۱۹۹۹). یکی از مزیت‌های این اندازه‌ها در این است که برای محاسبه آن‌ها نیاز به در دست داشتن توزیع جامعه نیست. اندازه‌های دمی قوی بالا و پایین به‌ترتیب میزان وابستگی بین متغیرها را در گوشه‌ی یک چهارم بالای سمت راست مربع I^2 و گوشه‌ی یک چهارم پایین سمت چپ آن، اندازه می‌گیرند. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع توأم H و توابع توزیع حاشیه‌ای F و G و مفصل متناظر C باشند، در صورت وجود حدهای زیر و طبق قضیه اسکلار(۱۹۵۹)، اندازه‌های وابستگی دمی(قوی) بالا و پایین که آن‌ها را به‌ترتیب با نمادهای λ_u و λ_l نشان می‌دهند، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \lim_{t\to 1} P[Y > G^{-1}(t) \mid X > F^{-1}(t)] \\ &= 2 - \lim_{t\to 1^-} \frac{1-C(t,t)}{1-t}, \end{aligned} \qquad (۲)$$

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \lim_{t\to 0} P[Y \leq G^{-1}(t) \mid X \leq F^{-1}(t)] \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{C(t,t)}{t}. \end{aligned} \qquad (۳)$$

با نزدیک شدن t به ۱، اندازه دمی(قوی) بالا برابراست با احتمال Y بزرگ‌تر از صدک t–ام توزیع G به‌شرط این که X بزرگ‌تر از صدک t–ام توزیع F باشد. اندازه دمی(قوی) پایین نیز به‌طریقی مشابه تعریف می‌شود. اندازه‌های دمی قوی در فاصله‌ی $[0,1]$ قرار می‌گیرند که مقدار صفر به معنای عدم وجود وابستگی و مقدار یک به معنای وابستگی کامل در دم توزیع است.

صفر بودن اندازه‌های وابستگی دمی قوی به معنای استقلال در دم توزیع است. اما در برخی موارد با وجود صفر بودن این اندازه‌ها، هنوز نوعی وابستگی در دم مشاهده می‌شود. فاک و همکاران (۲۰۱۱)، این نظریه را از طریق داده‌های توزیع نرمال استاندارد دومتغیره با مقادیر مختلف ضریب همبستگی ρ مورد بررسی قرار دادند.

برای اندازه‌گیری میزان وابستگی دمی باقی‌مانده بین متغیرها، از اندازه‌های وابستگی دمی باقی‌مانده (ضعیف) بالا و پایین استفاده می‌شود که آن‌ها را با نماد $\bar{\chi}_u$ و $\bar{\chi}_l$ نمایش می‌دهیم و توسط کولز و همکاران (۱۹۹۹)، معرفی شده‌اند. این اندازه‌ها زمانی جنبه‌ی کاربردی پیدا می‌کنند که اندازه‌های وابستگی دمی قوی برابر با صفر باشند و بخواهیم میزان وابستگی باقی‌مانده بین متغیرها را در حالت استقلال محاسبه کنیم. در این حالت، این اندازه‌ها متناسب با شدت وابستگی در ناحیه دم توزیع افزایش می‌یابند و در صورتی‌که $\lambda_l > 0$, $\lambda_u > 0$ باشند، این اندازه‌ها همیشه برابر با یک هستند. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع توأم $H(x,y)$ و توابع توزیع حاشیه‌ای F و G و تابع مفصل C باشند، آن‌گاه در صورت وجود حدهای زیر و با استفاده از قضیه اسکلار(۱۹۵۹)، اندازه‌های وابستگی دمی ضعیف بالا و پایین (χ_u و χ_l) عبارت از

مقادیر زیر هستند:

$$\begin{aligned}\chi_u &= \lim_{t\to 1}\frac{2\log P(X>F^{-1}(t))}{\log P(X>F^{-1}(t), Y>G^{-1}(t))}-1\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{2\log(1-t)}{\log \bar{C}(t,t))}-1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_l &= \lim_{t\to 0}\frac{2\log P(X\le F^{-1}(t))}{\log P(X\le F^{-1}(t), Y\le G^{-1}(t))}-1\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{2\log t}{\log C(t,t)}-1.\end{aligned}$$

اندازه‌های دمی ضعیف در فاصله $[-1,1]$ قرار دارند که مقادیر $+1$ و -1 در حالت وابستگی کامل رخ می‌دهد و مقدار صفر استقلال دمی کامل را نتیجه می‌دهد.

٤ اندازه‌های دمی قوی برای میانگین‌های موزون دو مفصل

در این بخش، اندازه‌های وابستگی دمی را برای میانگین‌های توانی، هندسی، هارمونیک و حسابی دو مفصل به دست می‌آوریم و به ذکر نتایجی در مورد رابطه‌ی بین این اندازه‌ها می‌پردازیم. طبق مطالعه‌ی کلین و همکاران(۲۰۱۱)، اگر C_1 و C_2 دو تابع مفصل با اندازه‌های وابستگی دمی λ_{l_1}، λ_{u_1} و λ_{l_2}، λ_{u_2} باشند، اندازه‌های وابستگی دمی (قوی) بالا و پایین برای میانگین توانی این دو مفصل از طریق روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\lambda_l(C_{r,\theta}) = (\theta\lambda_{l_1}^r+(1-\theta)\lambda_{l_2}^r)^{\frac{1}{r}}, \tag{٤}$$

$$\lambda_u(C_{r,\theta}) = \theta\lambda_{u_1}+(1-\theta)\lambda_{u_2} \tag{٥}$$

و می‌توان گفت اندازه وابستگی دمی پایین، نسبت به میانگین توانی دو مفصل پایا است، در حالی‌که این خاصیت برای اندازه دمی بالا برقرار نیست. همچنین در قضیه زیر ثابت می‌کنیم که اندازه وابستگی دمی پایین دو مفصل، نسبت به میانگین‌های حسابی، هندسی و هارمونیک دو مفصل پایاست و اندازه دمی بالا فقط نسبت به میانگین حسابی پایا است.

قضیه ۱.۴. فرض کنید C_1 و C_2 دو تابع مفصل با اندازه‌های وابستگی دمی λ_{l_1}، λ_{u_1} و λ_{l_2}، λ_{u_2} باشند. در صورتی‌که میانگین‌های موزون حسابی($C_{1\theta}$)، هندسی($C_{2\theta}$)، هارمونیک($C_{3\theta}$) و توانی($C_{r,\theta}$) آن‌ها مفصل باشند، آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned}\lambda_l(C_{1\theta}) &= \theta\lambda_{l_1}+(1-\theta)\lambda_{l_2},\\ \lambda_u(C_{1\theta}) &= \theta\lambda_{u_1}+(1-\theta)\lambda_{u_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_l(C_{2\theta}) &= \lambda_{l_1}^{\theta}\lambda_{l_2}^{1-\theta},\\ \lambda_u(C_{2\theta}) &= \theta\lambda_{u_1}+(1-\theta)\lambda_{u_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_l(C_{3\theta}) &= \frac{\lambda_{l_1}\lambda_{l_2}}{(1-\theta)\lambda_{l_1}+\theta\lambda_{l_2}},\\ \lambda_u(C_{3\theta}) &= \theta\lambda_{u_1}+(1-\theta)\lambda_{u_2}.\end{aligned}$$

اثبات. برای هر $u\in[0,1]$ داریم:

$$\begin{aligned}\lambda_l(C_{1\theta}) &= \lim_{u\to 0}\frac{C(u,u)}{u}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{\theta C_1(u,u)+(1-\theta)C_2(u,u)}{u}\\ &= \theta\lim_{u\to 0}\frac{C_1(u,u)}{u}+(1-\theta)\lim_{t\to 0}\frac{C_2(u,u)}{u}\\ &= \theta\lambda_{l_1}+(1-\theta)\lambda_{l_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_u(C_{1\theta}) &= \lim_{u\to 1}\frac{1-2u+C(u,u)}{1-u}\\ &= \lim_{u\to 1}\frac{1-2u+\theta C_1(u,u)+(1-\theta)C_2(u,u)}{1-u}\\ &= \theta\lim_{u\to 1}\frac{1-2u+C_1(u,u)}{1-u}\\ &+ (1-\theta)\lim_{u\to 1}\frac{1-2u+C_2(u,u)}{1-u}\\ &= \theta\lambda_{u_1}+(1-\theta)\lambda_{u_2}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\lambda_l(C_{2\theta}) &= \lim_{u\to 0}\frac{C(u,u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{C_1^{\theta}(u,u)C_2^{1-\theta}(u,u)}{u}\\ &= \lim_{u\to 0}(\frac{C_1(u,u)}{u})^{\theta}\lim_{u\to 0}(\frac{C_2(u,u)}{u})^{1-\theta}=\lambda_{l_1}^{\theta}\lambda_{l_2}^{1-\theta}.\end{aligned}$$

$\lambda_u(C_{2\theta})$ به روشی مشابه با $\lambda_u(\bar{C}_r)$ در قضیه قبل با توجه به روابط

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{2\theta}(u,u)}{\partial u} &= [\theta(\frac{C_{2\theta}(u,u)}{C_1(u,u)})\frac{\partial C_1(u,u)}{\partial u}\\ &+ (1-\theta)(\frac{C_{2\theta}(u,u)}{C_2(u,u)})\frac{\partial C_2(u,u)}{\partial u}]\end{aligned}$$

و

$$\lim_{u\to 1}C(u,u)=1$$

به دست می‌آید. پس بنا به تعریف λ_u داریم:

$$\begin{aligned}
\lambda_u(C_{2\theta}) &= 2-\lim_{u\to1}\frac{1-C_{2\theta}(u,u)}{1-u}\\
&= 2-\lim_{u\to1}\frac{\partial C_{2\theta}(u,u)}{\partial u}\\
&= 2-\theta\lim_{u\to1}[\frac{C_{2\theta}(u,u)}{C_1(u,u)}\frac{\partial C_1(u,u)}{\partial u}]\\
&- (1-\theta)\lim_{u\to1}[\frac{C_{2\theta}(u,u)}{C_2(u,u)}\frac{\partial C_2(u,u)}{\partial u}]\\
&= 2-\theta\lim_{u\to1}\frac{\partial C_1(u,u)}{\partial u}\\
&- (1-\theta)\lim_{u\to1}\frac{\partial C_2(u,u)}{\partial u}\\
&= \theta[2-\lim_{u\to1}\frac{\partial C_1(u,u)}{\partial u}]\\
&+ (1-\theta)[2-\lim_{u\to1}\frac{\partial C_2(u,u)}{\partial u}]\\
&= \theta\lambda_{u_1}+(1-\theta)\lambda_{u_2}.
\end{aligned}$$

همچنین داریم

$$C_{3\theta}^{-1}(u,u)=\theta C_1^{-1}(u,u)+(1-\theta)C_2^{-1}(u,u).$$

و در نتیجه

$$C_{3\theta}(u,u)=\frac{C_1(u,u)C_2(u,u)}{(1-\theta)C_1(u,u)+\theta C_2(u,u)}.$$

بنابراین

$$\lambda_l(C_{3\theta})=\lim_{u\to0}\frac{C_{3\theta}(u,u)}{u}$$

$$=\lim_{u\to0}[\frac{\frac{C_1(u,u)}{u}\frac{C_2(u,u)}{u}\times u}{\frac{(1-\theta)C_1(u,u)+\theta C_2(u,u)}{u}\times u}]=\frac{\lambda_{l_1}\lambda_{l_2}}{(1-\theta)\lambda_{l_1}+\theta\lambda_{l_2}}$$

و برای محاسبه‌ی $\lambda_u(C_{3\theta})$ نیز داریم:

$$\lambda_u(C_{3\theta})=2-\lim_{u\to1}\frac{1-C_{3\theta}(u,u)}{1-u}$$

$$\frac{1-C_{3\theta}(u,u)}{1-u}=\frac{1-\frac{C_1(u,u)C_2(u,u)}{(1-\theta)C_1(u,u)+\theta C_2(u,u)}}{1-u}$$

$$=\frac{\theta(C_2(u,u)-C_1(u,u))+C_1(u,u)(1-C_2(u,u))}{(1-u)[\theta(C_2(u,u)-C_1(u,u))+C_1(u,u)]}$$

$$=\frac{\theta[\frac{1-C_1(u,u)}{1-u}-\frac{1-C_2(u,u)}{1-u}]+C_1(u,u)[\frac{1-C_2(u,u)}{1-u}]}{(1-u)[\theta(\frac{1-C_1(u,u)}{1-u}-\frac{1-C_2(u,u)}{1-u})]+C_1(u,u)}$$

$$=\frac{\theta[(2-\frac{1-C_2(u,u)}{1-u})-(2-\frac{1-C_1(u,u)}{1-u})]}{(1-u)[\theta(2-\frac{1-C_2(u,u)}{1-u}-(2-\frac{1-C_1(u,u)}{1-u}))]+C_1(u,u)}$$

$$+\frac{C_1(u,u)[2-(2-\frac{1-C_2(u,u)}{1-u})]}{(1-u)[\theta(2-\frac{1-C_2(u,u)}{1-u}-(2-\frac{1-C_1(u,u)}{1-u}))]+C_1(u,u)},$$

پس

$$\lim_{u\to1}\frac{1-C_{3\theta}(u,u)}{1-u}=\theta[\lambda_{u_2}-\lambda_{u_1}]+[2-\lambda_{u_2}]$$

و لذا

$$\lambda_u(C_{3\theta})=\theta\lambda_{u_1}+(1-\theta)\lambda_{u_2}.$$

با استفاده از قضیه ؟؟، به نتایج زیر می‌رسیم:

تذکر ۲.٤.

- اگر $r=1$ آن گاه $\lambda_l(C_{r,\theta})=\lambda_l(C_{1\theta})$
- اگر $r\to0$، آن گاه $\lambda_l(C_{r,\theta})\longrightarrow\lambda_l(C_{2\theta})$
- اگر $r=-1$، آن گاه $\lambda_l(C_{r,\theta})=\lambda_l(C_{3\theta})$

فیشر و هنزمن (۲۰۰۷) نشان دادند که میانگین توانی دو مفصل $C_1=\min(u,v)$ و $C_2(u,v)=uv$، برای هر $r\in R$ یک مفصل است. در مثال زیر با در نظر گرفتن این مفصل، روابط موجود در نکته (؟؟) را تأیید می‌کنیم.

مثال ۳.٤. اگر قرار دهیم

$$C_1(u,v)=\min(u,v)\ ,\ \ C_2(u,v)=uv$$

از این‌که $\lambda_{l_1}=1,\lambda_{u_1}=1$ و $\lambda_{l_2}=0,\lambda_{u_2}=0$، طبق رابطه‌ی(؟؟) و قضیه (؟؟)، داریم

$$\begin{aligned}
\lambda_u(C_{r,\theta}) &= \lambda_u(C_{1\theta})=\lambda_u(C_{2\theta})=\lambda_u(C_{3\theta})=\theta,\\
\lambda_l(C_{r,\theta}) &= \theta^{\frac{1}{r}}\ ,\ \lambda_l(C_{1\theta})=\theta\ ,\ \lambda_l(C_{2\theta})=0\ ,\ \lambda_l(C_{3\theta})=0.
\end{aligned}$$

بنابراین طبق نکته (؟؟)، به ترتیب با قرار دادن $(r=1)$، $(r\to0)$ و $r=-1$، می‌توان از $\lambda_l(C_{r,\theta})$ به $\lambda_l(C_{1\theta})$، $\lambda_l(C_{2\theta})$ و $\lambda_l(C_{3\theta})$ رسید.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از بیان خواص تابع مفصل، چهار تابع حاصل از میانگین‌های موزون دو مفصل (میانگین‌های موزون توانی، حسابی، هندسی و هارمونیک) را معرفی کردیم. از بین این چهار تابع تنها میانگین حسابی همیشه خواص تابع مفصل را دارد. سپس خانواده مفصل‌های سری توانی (PS_2) را بررسی کرده و به این نتیجه رسیدیم که این خانواده به دلیل دارا بودن خاصیت تعویض

پذیری، نسبت به میانگین توانی دو مفصل از این خانواده، پایا است. همچنین نشان دادیم که میانگین هندسی وزنی دو مفصل مقدار فرین، یک مفصل مقدار فرین است. در ادامه پس از معرفی اندازه‌های وابستگی دمی، این اندازه‌ها (اندازه‌های دمی قوی) را برای میانگین‌های موزون دو مفصل محاسبه کرده و پایایی آن‌ها را نسبت به میانگین‌های ذکر شده تحلیل نمودیم. اندازه وابستگی دمی(قوی) پایین برای تمامی این توابع پایا است، در حالی‌که اندازه وابستگی دمی(قوی) بالا فقط نسبت به میانگین حسابی پایا است. همچنین ثابت کردیم که اندازه وابستگی دمی(قوی) پایین میانگین توانی دو مفصل یک حالت کلی از اندازه‌های وابستگی دمی(قوی) پایین سایر میانگین‌های ذکر شده است. به‌عبارت دیگر با قرار دادن مقادیر $r = 1$، $r \to 0$ و $r = -1$ در اندازه دمی(قوی) پایین میانگین توانی دو مفصل، به ترتیب می‌توان به اندازه دمی (قوی) پایین میانگین‌های حسابی، هندسی و هارمونیک آن‌ها رسید.

مراجع

[1] Cuadras,C.M.(2009), Constructing copula functions with weighted geometric means., *Journal of Statistical Planning and Inference* **139**, 3766-3772.

[2] Coles,S.G., Heffernan, J.E., Tawn, J.A.(1999), Dependence measure for extreme value analyses., *Extremes* **2**, 339-365.

[3] Druet-Mari,D., Kotz,S.(2001), *Correlation and dependence.*, Impirical College Press, London.

[4] Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D.(2002), Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls, in:M.A.H. Dempster(Ed), Risk management: Value at Risk and Beyond., *Cambridge University press*, 176-223.

[5] Embrechts,P., Lindskog,F., McNeil,A.(2003), *Modeling dependence with copulas and applications to risk management.*, Elsevier, Amesterdam.

[6] Falk,M., Husler,J., Reiss, R.D.(2011), *Laws of Small Numbers: Extremes and Rare Events.*, Springer Basel AG, Berlin.

[7] Fischer,M., Hinzmann,G.(2007), A new class of copulas with tail dependence and a generalized tail dependence estimator., Department of Erlangen-Nürnberg.

[8] Grobmab,T.(2007), *Copulae and tail dependence.*, Diploma thesis, Center for Applied Statistics and Economics, Berlin.

[9] Klein, L., Fischer, M., Pleier,T.(2011), Weighted power mean copulas: Theory and application., Discussion Papers, *Institut für Wirtschaftspolitik and Quantitative Wirtschaftsforschung* **1**.

[10] Joe, H.(1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts.*, Chapman and Hal,London.

[11] Nelsen, RB.(2006), *An Introduction to Copulas.*, Springer, Newyork.

[12] Poulin,A., Huard,D., Favre,A.C. and Pugin,S.(2007), Importance of tail Dependence in Bivariate Frequency Analysis, *Journal of Hydrologic Engineenng* **12**, 394-403.

[13] Sibuya, M.(1960), Bivariate extreme statistics., *Annals of the Institute of statistical Mathematics* **11(2)**, 195-210.

[14] Sklar,A.(1959), Fonctions de rèpartition à n dimensions et leurs marges, *Publ.Jnst.Statist.University Paris* **8**, 229-231.

[15] Song,P., gang,X.(2010), Research on the Tail Dependence of Agriculture Listed Companies., *Jurnal of Agricultural Science*, **2**, ISSN:1916-9752.

[16] Sun, W., Rachev, S., Fabozzi, F. and Kalev, P.(2007b), comovement of international equity markets: evidence of unconditional copula-based simulation of tail dependence., *Empirical Economics* **36**, 201-229.