تابع باور و مدل باور انتقال پذیر

محیا لطفی [۱] ، محمد حسین علامت‌ساز [۲]

چکیده:

در گذشته تنها راهکار در شرایط عدم اطمینان، نظریه احتمال بوده است. اما از چند دهه گذشته تا کنون، نظریه‌های گوناگون دیگری برای بررسی متغیرها و سیستم‌هایی که اطلاع نسبت به آنها کافی و دقیق نیست ارائه شده است. یکی از این راهکارها نظریه توابع باور یا نظریه دمپستر-شفر است. این نظریه به عنوان تعمیمی از نظریه احتمال مورد توجه قرار گرفته است که امکان نمایش حالت‌های مختلفی از اطلاعات، یقین کامل تا عدم آگاهی کامل را فراهم می‌کند. تابع باور یک روش برای استفاده احتمال ریاضی در قضاوت‌های ذهنی عرضه می‌کند. یک مدل برای نمایش توابع باور مدل باور انتقال‌پذیر است. این مدل از نظر مفهومی مانند مدل بیز است. در این مدل باورها در دو سطح قرار دارند، یکی سطح باوری که در آن باورها قبول می‌شوند توسط تابع باور اندازه‌گیری می‌شوند، و دیگری سطح شرط‌بندی که در آن باورها می‌توانند برای تصمیم‌گیری استفاده شوند و توسط توابع احتمال اندازه‌گیری شوند. تفاوت این مدل با مدل بیزی در حضور سطح باور است. مدل بیزی این سطح را ندارد.

واژه‌های کلیدی: تابع باور، تابع موجه نمایی،مدل باور انتقال پذیر .

۱ مقدمه

باورها هنگام وجود عدم اطمینان[۳] پدیدار می‌شوند. عدم اطمینان گاهی اوقات از یک فرایند تصادفی و گاهی به دلیل کمبود اطلاعات ایجاد می‌شود. لذا نظریه توابع باور یا نظریه دمپستر-شفر به عنوان تعمیمی از نظریه احتمال مورد توجه قرار گرفته است زیرا این نظریه امکان نمایش حالت‌های مختلفی از اطلاعات، یقین کامل تا عدم آگاهی کامل[٤] را فراهم می‌کند. به‌طورکلی در مسائل استنباط آماری وقتی مشاهده x را داشته باشیم، می‌توان توزیع شرطی $p(\theta|x)$ را با استفاده از قضیه بیز به دست آورد:

$$p(\theta|x)=\frac{p(\theta)f(x;\theta)}{\int p(\theta)f(x;\theta)d\theta}$$

از دید نظری استفاده از این رابطه کاملاً صحیح است. اما در عمل پیدا کردن احتمال پیشین $p(\theta)$ مشکل‌ساز می‌شد. برای غلبه بر این مشکل روش‌های گوناگونی در طی سال‌ها برای به دست آوردن احتمال پسین بدون استفاده از پیشین‌ها معرفی شد. به عنوان مثال می‌توان از روش‌های بحث اعتماد فیشر[٥] (۱۹۷۱)، احتمال‌های مستقیم[٦] دمپستر[٧] (۱۹۶۲) و احتمال‌های بالایی و پایینی دمپستر[٨] (۱۹۶۷) نام برد.

در این میان روش شفر[٩] (۱۹۷۱) کارآمدتر از سایر روش‌ها بود. شفر مجموعه کارهای خود را در کتاب نظریه ریاضی شواهد[١٠] گردآوری کرد، که این کتاب هنوز کامل‌ترین مرجع در زمینه تابع باور است. یک تابع باور روی دامنه Ω بر پایه یک تابع

[۱] کارشناس ارشد آمار، دانشگاه اصفهان

[۲] عضو هیئت علمی آمار، دانشگاه اصفهان

[۳] Uncertainty

[٤] Total ignorance

[٥] Fisher

[٦] Direct probabilities

[٧] Dempster

[٨] Upper and lower probabilities

[٩] Shafer

[١٠] A Mathematical Theory of Evidence

جرم قرار دارد که به هر زیر مجموعه Ω عددی بین صفر و یک اختصاص می‌دهد که آن را با Bel نشان می‌دهند. می‌توان گفت تابع باور توسعه طبیعی نظریه احتمال بیزی است. توابع باور کاربرد وسیعی در تجارت، مهندسی، مسائل پزشکی، کنترل کیفیت، تجارت الکترونیکی، آمار، طبقه بندی، خوشه‌بندی، داده‌کاوی، تحلیل تصمیم و استنباط علمی و ... دارد.

تابع باور از روش‌های گوناگونی فرمول‌بندی شده است. این روش‌ها عبارت از نظریه شفر (١٩٧٦)، نگاشت چند مقداری دمپستر (١٩٦٧)، روابط سازگاری توسط شفر (١٩٨٧) و لورنس[١١] (١٩٨٨) ، زیرمجموعه تصادفی توسط انجوین[١٢] (١٩٨٥) و اندازه‌های درونی روسپینی[١٣] (١٩٨٧) است. نظریه تابع باور یک روش برای استفاده احتمال ریاضی در قضاوت‌های ذهنی عرضه می‌کند. به طور کلی، تابع باور می‌تواند به عنوان یک تابع احتمال باشد که اصل‌های کلموگروف به جز اصل جمع پذیری را دارا است. از این دیدگاه تابع باور به عنوان تعمیمی از تابع احتمال معرفی می‌شود. اما در ساختار کلاسیک، احتمال امکان نمایش مناسب عدم آگاهی را بفراهم نمی‌کند. در صورتی که حداقل در بیان احتمال شخصی و ذهنی[١٤] اکثراً با نوعی عدم آگاهی و نایقینی مواجه هستیم. به علاوه احتمال یک اندازه جمع پذیر است، درحالی‌که مطالعات تجربی چنین خاصیتی را در مورد احتمال شخصی و ذهنی نشان نمی‌دهد و بیشتر به نظر می‌آید احتمال ذهنی یک اندازه ترتیبی است. مدل باور انتقال پذیر[١٥] (TBM) مدلی برای نمایش باورهای کمی است. باورها توسط یک عامل در یک زمان نگهداری می‌شوند که با "شما" نشان‌گذاری می‌شود. "شما" می‌تواند انسان، رباط و یا برنامه کامپیوتری و ... باشد. مدل باور انتقال‌پذیر از نظر مفهومی با مدل بیزی یکسان است، با این تفاوت که روی تابع باور تعریف می‌شود. این مدل در مسائل تصمیم‌گیری و استدلال و استنباط در قالب نظریه شواهد کابردهای فراوانی دارد. مدل باور انتقال‌پذیر بر اساس یک مدل دوسطحی تعریف می‌شود. سطح باوری[١٦] که باورها در این سطح وارد می‌شوند، ترکیب شد. اصلاح می‌شوند و سطح شرطبندی[١٧] که باورها برای اتخاذ تصمیم استفاده می‌شوند. معتقدین به روش بیزی ادعا می‌کردند که باورها را می‌توان توسط اندازه احتمال اندازه‌گیری کرد. آن‌ها اطلاعات در دسترس را توسط احتمال خلاصه می‌کردند. به همین دلیل مدل احتمال قدیمی‌ترین مدل برای اندازه‌گیری باورها است. اما این مدل محدودیت‌هایی دارد (شامل سطح باوری نیست) که توسط مدل باور انتقال‌پذیر رفع می‌شود. مدل‌های گوناگونی برای اندازه‌گیری باور ارائه شده‌اند.

کیبرگ[١٨] (١٩٦١) و اسمیتز (١٩٦١) ثابت کردند که باورها توسط خانواده‌ای از اندازه‌های احتمال قابل اندازه‌گیری هستند.

والی[١٩] (١٩٩١) در مدلش فرض کرد باورهایی که توسط یک عامل (شما) نگاه داشته شده می‌تواند توسط یک اندازه احتمال اندازه‌گیری شود اما عامل نمی‌تواند مقدار این احتمال‌ها را بیان کند.

از دیگر مدل‌ها می‌توان از مدل اشاره کهلاس و مانی (١٩٩٤، ١٩٩٥) و باسک[٢٠] و پرد (١٩٩٥)، مدل باور انتقال‌پذیر اسمیتز و کنز[٢١] (١٩٩٤) و مهار عدم قطعیت با استفاده از مجموعه‌های ناهموار ترابی و همکاران (٢٠٠٧) نیز نام برد. تابع باور را به روش‌های گوناگون تعمیم داده‌اند. یکی از تعمیم‌های تابع باور تعمیم آن به

[١١] Lowrance
[١٢] Nguyen
[١٣] Ruspini
[١٤] Personal and subjective probability
[١٥] Transferable bilief model
[١٦] Credal level
[١٧] Pignistic level
[١٨] Kyburg
[١٩] Walley
[٢٠] Bosc
[٢١] Kenz
[٢٢] Zadeh

مجموعه‌های فازی بود که اولین بار توسط زاده[۲۲] (۱۹۷۹) صورت گرفت. بعد از زاده محققین زیادی در این زمینه کار کردند که از جمله آن می‌توان از اسمیتز (۱۹۸۱)، یاگر[۲۳] (۱۹۸۲)، ین[۲۴] (۱۹۹۰)، و لوکاس[۲۵] و اعرابی (۱۹۹۹) نام برد. یکی دیگر از تعمیم‌های تابع باور تعمیم آن به مجموعه اعداد حقیقی بود که حاصل تلاش‌های اسمیتز(۱۹۷۸)، استرات[۲۶] (۱۹۸٤) و ریستک[۲۷] و اسمیتز (۲۰۰٤) و اسمیتز (۲۰۰۵) است. اخیراً دنوکس[۲۸] (۲۰۰۹) تعمیم ترتیب‌های تصادفی به توابع باور روی خط حقیقی را بیان کرد.

۲ تابع باور

تعریف ۱.۲. تابع جرم: یک مجموعه غیر تهی متناهی در نظر بگیرید که آن را چارچوب تشخیص[۲۹] می‌نامند. تابع $m : 2^{\Omega} \longrightarrow [0,1]$ را تابع جرم یا تخصیص باور پایه[۳۰] گویند اگر دارای شرایط زیر باشد:

$$m_1) \;\; m(\emptyset) = 0.$$

$$m_2) \;\; \sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1.$$

که در آن 2^{Ω} به مفهوم تمام زیر مجموعه‌های ممکن Ω می‌باشد. کمیت $m(A)$، که آن را جرم A می‌نامند، درجه‌ی اطمینان از رخ داد خود پیشامد A (و نه هیچ زیر مجموعه‌ی مشخص دیگر از آن) است.

تعریف ۲.۲. عضو کانونی[۳۱]:

هر مجموعه $A \in \Omega$ که برای آن $m(A) > 0$ باشد، یک عضو کانونی m نامیده می‌شود.

اعضای کانونی، زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع (چارچوب تشخیص) هستند که اطلاعات و شواهد و گواه‌های موجود، بر آن‌ها تمرکز دارند. به‌ویژه، هنگامی‌که مجموعه مرجع متناهی باشد تابع m را می‌توان با فهرست اعضای کانونی و اندازه‌های آن‌ها مشخص کرد.

تعریف ۳.۲. تابع باور: تابع مجموعه‌ای

$$Bel : 2^{\Omega} \longrightarrow [0,1]$$

تابع باور گویند اگر دارای شرایط زیر باشد:

$$B1) \;\; Bel(\emptyset) = 0$$

$$B2) \;\; Bel(\Omega) = 1$$

$$B3) \;\; (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geq \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}, I \neq \phi} (-1)^{(|I|+1)} Bel(\bigcap_{i \in I} A_i), \quad \forall A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$$

مقدار $Bel(A)$ درجه باوری است که بر پایه اطلاعات و شواهد موجود، به رخ دادن پیشامد A می‌دهند. اصل $B3$ حالت ضعیف تری از اصل جمع پذیری احتمال است.

تذکر ٤.۲. ممکن است $m(\emptyset)$ صفر نباشد و مقدار مثبتی بگیرد. وقتی $m(\emptyset) = 0$ $(Bel(\Omega) = 1)$ باشد، تابع باور را یک تابع باور نرمال‌سازی شده می‌نامند و در غیر این صورت آن را نرمال‌سازی نشده گویند و تابع باور را با

$$b(A) = Bel(A) + m(\emptyset)$$

نشان می‌دهند.

قضیه ۵.۲. تبدیل موبیوس[۳۲]: اگر m تخصیص باور پایه باشد، آنگاه برای هر زیر مجموعه A از Ω رابطه

$$Bel(A) = \sum_{X \subseteq A} m(X)$$

یک تابع باور است و رابطه زیر نیز برقرار است:

$$m(A) = \sum_{X} (-1)^{|A-X|} Bel(X)$$

که در آن $|A-X|$ اندازه مجموعه $A-X$ است.

[۲۳] Yager

[۲۴] Yen

[۲۵] Lucas

[۲۶] Start

[۲۷] Ristic

[۲۸] Denoeux

[۲۹] Frame ofdiscernment

[۳۰] Basicbelief assignment

[۳۱] Focal element

[۳۲] Mobius transformation

اثبات. کافی است ثابت کنیم که تعریف ارائه شده در قضیه دارای شرایط تعریف ۱.۲ است. داریم

$$m(\emptyset) = \sum_{X\subseteq\emptyset}(-1)^{|\emptyset-X|}Bel(X) = Bel(\emptyset)=0,$$

$$m(\Omega) = \sum_{X\subseteq\Omega}(-1)^{|\Omega-X|}Bel(X) = Bel(\Omega)=1.$$

□

تعریف ۶.۲. تابع موجه‌نمایی[۳۳] : تابع مجموعه‌ای $Pl : 2^{\Omega} \longrightarrow [0,1]$ را تابع موجه‌نمایی گویند اگر رابطه‌های زیر برقرار باشند:

$$Pl(\emptyset)=0.$$

$$Pl(\Omega)=1.$$

$$Pl(A_1\cap\cdots\cap A_n)\leq \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\},I\neq\emptyset}(-1)^{|I|+1}Pl(\bigcup_{i\in I}A_i), \quad \forall A_1,A_2,\ldots,A_n\subset\Omega.$$

به این ترتیب می‌توان نوشت

$$Pl(A)=1-Bel(\overline{A})$$

بنابراین تابع باور و موجه‌نمایی دوگان یکدیگرند.

با توجه به تعریف تابع باور و تابع موجه نمایی می‌توان نتیجه گرفت که رابطه زیر برقرار است

$$Pl(A)\geq Bel(A)$$

و با استفاده ازآن می‌توان روابط زیر را به دست آورد:

$$Pl(A)+Pl(\overline{A})\geq 1.Bel(A)+Bel(\overline{A})\leq 1$$

تعریف دیگر تابع موجه‌نمایی بر حسب تابع جرم به صورت زیر است:

$$Pl(A)=\sum_{X\cap A\neq\emptyset}m(X).$$

Pl(A) درجه اطمینانی است که برای رخ دادن دقیقاً پیشامد A و یا هر پیشامد دیگری که با A اشتراکی دارد، قائل می‌شوند. برای یک زیر مجموعه A اطلاعات مشمول در توابع شواهدی را توسط یک فاصله باور نمایش می‌دهند یعنی

$$[Bel(A),Pl(A)].$$

طول بازه یعنی $Pl(A)-Bel(A)$ میزان عدم ناآگاهی در مورد مجموعه A است.

تعریف ۷.۲. باور پوچ[۳۴] :یک تابع باور

$$Bel: 2^{\Omega}\longrightarrow[0,1]$$

را تابع باور پوچ می‌نامند اگر

$$Bel(\Omega)=1 \quad Bel(A)=0 \quad A\neq\Omega.$$

در نتیجه تابع تخصیص باور پایه آن به صورت زیر می‌شود:

$$m(\Omega)=1 \quad m(A)=0 \qquad A\neq\Omega$$

تابع باور پوچ برای مواقعی که هیچ‌گونه شواهدی نباشد استفاده می‌شود.

در این حالت خاص بیشترین میزان عدم اطمینان ممکن را در بیان احتمال پیشامد داریم و طول بازه عدم آگاهی برای تمامی‌پیشامدها، جز Ω و $\emptyset$، برابر با حداکثر ممکن یعنی یک است. این حالت را عدم آگاهی کامل می‌نامیم. تعبیر عدم آگاهی کامل حلاّل یکی از مشکلات نظریه بیز است. به این صورت که با استفاده از آن دیگر لازم نیست عدم اطلاعات را هم ارز با توزیع یکنواخت به عنوان مدل احتمال پیشین بدانیم، بلکه می‌توانیم به جای آن تعبیر عدم آگاهی کامل مطابق با تعریف ۷.۲ را جایگزین کنیم.

مثال ۸.۲. با یک مثال عدم آگاهی کامل را بیان می‌کنیم. فرض کنید سه گزاره، که با A، B و C نشان داده شده است، وجود دارد و هیچ‌گونه اطلاعاتی درباره این که کدام درست هستند قرار دارید. شما فقط می‌دانید که تنها و تنها یکی از آن‌ها درست است و محتویات گزاره‌ها جز این نکته که می‌دانیم فقط و فقط یکی از آن‌ها صحیص است، نداریم. بنابراین هیچ دلیلی ندارد که یکی از آنها را بیشتر از بقیه باور کنیم. به این ترتیب باور ما درباره درستی

[۳۳] Plausibility function

[۳۴] Vacuous belief function

آن‌ها برابر با

$$Bel(A) = Bel(B) = Bel(C) = \alpha$$

است که در آن $\alpha \in [0, 1]$. علاوه بر این هیچ دلیلی نداریم که باور کمتری به $A \cup B$ در مقابل C داشته باشیم. در نتیجه:

$$Bel(A \cup B) = Bel(C) = \alpha.$$

تابع باور پوچ تنها تابع باوری است که این شرایط را دارا است زیرا

$$Bel(A \cup B) = Bel(A) = Bel(B) = \alpha$$

است و طبق تعریف ۳.۲ داریم:

$$Bel(A \cup B) \geq Bel(A) + Bel(B) - Bel(A \cap B).$$

اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، آنگاه $Bel(A \cap B) = 0$ می‌شود و نامساوی بالا تبدیل به $\alpha \geq 2\alpha$ می‌شود که تنها جواب آن $\alpha = 0$ است. در نتیجه تابع باور برای هر $A \subseteq \Omega$ برابر صفر است که همان تابع باور پوچ است.

تعریف ۹.۲. قانون ترکیب دمپستر شفر: توابع جرم m_1 و m_2 روی چارچوب یکسان Ω را در نظر بگیرید. فرض کنید رابطه

$$E = \sum_{X \cap Y = \emptyset} m_1(X) m_2(Y) < 1$$

برقرار است و قرار دهید

$$N = \sum_{X \cap Y = \emptyset} m_1(X) m_2(Y).$$

بنابراین تابع m یک تابع جرم است که آن را جمع متعامد[۳۵] m_1 و m_2 می‌نامند و با نماد $m_{1,2}$ یا $m_1 \oplus m_2$ نشان می‌دهند مشروط بر آن که دارای شرایط زیر باشد:

$$m(\emptyset) = 0,$$

$$m_{1,2}(A) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{X \cap Y = A \\ A \neq \emptyset}} m_1(X) m_2(Y),$$

اگر $N = 0$، در نتیجه جمع متعامد $m_1 \oplus m_2$ وجود ندارد و m_1 و m_2 در تناقض با یکدیگرند.

تعریف ۱۰.۲. به $K = \frac{1}{N}$ ثابت نرمال‌سازی جمع‌های متعامد m_1 و m_2 می‌گویند. ثابت نرمال‌سازی اختلاف بین دو تابع جرم را اندازه می‌گیرد و کمیت

$$log(\frac{1}{N} = -log(N) = -log(1 - E)$$

را اختلاف وزنی بین m_1 و m_2 می‌نامند و با

$$wett(m_1, m_2)$$

نشان می‌دهند.

۳ مدل باور انتقال‌پذیر

۱.۳ فضای گزاره‌ای[۳۶]

فرض کنید L یک زبان گزاره‌ای متناهی و

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

مجموعه جهان‌های متناظر با تعابیر L باشد. گزاره‌ها زیر مجموعه‌های Ω را شناسایی می‌کنند. برای هر گزاره X، فرض کنید $[[X]] \subseteq \Omega$ مجموعه جهان‌هایی باشد که توسط X معرفی می‌شود. A را زیر مجموعه‌ای از Ω در نظر بگیرید، آنگاه f_A هر گزاره‌ای است که A را مشخص می‌کند، بنابراین داریم

$$A = [[f_A]].$$

بر اساس تعریف، یک جهان واقعی[۳۷] ϖ وجود دارد که یک عضو از Ω است. دو گزاره A و B در L را به طور منطقی معادل گفته می‌شوند و با $A \equiv B$ نشان داده می‌شوند، اگر و فقط اگر $[[A]] = [[B]]$.

Π را یک افزار Ω (چارچوب تشخیص) قرار دهید. اعضای افراز Π، جبر بولی $\Re$ را می‌سازند. اعضای افراز Π را عنصر $\Re$ می‌نامند و با $At(\Re)$ نشان می‌دهند و زوج $(\Omega, \Re)$ را فضای گزاره‌ای می‌نامند. برای راحتی کار تفاوتی بین زیرمجموعه‌های Ω و گزاره‌های تعیین‌شده توسط آن‌ها قائل نمی‌شوند و از نمادگذاری یکسانی برای هر دو استفاده می‌کنند.

همه باورهای پذیرفته‌شده توسط شما در زمان t درباره این که

[۳۵] Orthogonal sum

[۳۶] Propositional space

[۳۷] Actual world

[۳۸] Evidential corpus

جهان، جهان واقعی $\overline{\varpi}$ است، توسط یک مجموعه شواهد[۳۸] (EC_t^y) معین می‌شوند. باورها در دو سطح فکری آشکار می‌شوند: سطح باوری که باورها در این سطح وارد می‌شوند، ترکیب می‌شوند و اصلاح می‌شوند و سطح شرط‌بندی که باورها برای گرفتن تصمیم استفاده می‌شوند. در واقع ذهنیت و قضاوت شخصی شما است که $\overline{\varpi} \in A$ برای هر $A \in \Re$ را توضیح می‌دهد.

وقتی می‌گوییم " A درست است" یا "درستی در A است"همان معنی $\overline{\varpi} \in A$ می‌دهد. در سطح شرط‌بندی از باورها برای گرفتن تصمیم استفاده می‌شود. فرض بر این است که سطح‌های باور و سطح شرط‌بندی مجزا هستند. در سطح باور، باورها توسط توابع باور نمایش داده می‌شوند و در سطح شرط‌بندی، یک تابع احتمال را القا می‌کنند که برای تصمیم‌گیری استفاده می‌شود.

۲.۳ شرطی کردن

m را تخصیص باور پایه روی چارچوب تشخیص Ω در نظر بگیرید. فرض کنید که شواهد جدیدی می‌گوید که $\Omega \subseteq B$ درست است. تخصیص باور پایه m به

$$m_B(A) : \Re \longrightarrow [0,1]$$

تبدیل می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} m_B(A) &= c \sum_{x \subseteq \overline{B}} m(A \cup X) A \subseteq B \\ m_B(A) &= 0 \qquad\qquad A \not\subseteq B \\ m_B(\emptyset) &= 0 \quad c = \frac{1}{1 - \sum\limits_{x \subseteq \overline{B}} m(X)} \end{aligned}$$

مثال ۱.۳. فرض کنید در یک حادثه قتل شاهد معتمدی شهادت می‌دهد که قاتل یک مرد است و $\alpha = 0.7$ قابلیت اعتمادی است که شما به این شهادت می‌دهید. فرض کنید که شما از قبل یک باور برابری برای زن یا مرد بودن قاتل دارید. در روش کلاسیک احتمالی، احتمال اینکه قاتل مرد است، $P(M)$ را این گونه محاسبه می‌کند:

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M|Reliable)P(Reliabe) \\ &+ P(M|NotReliable) \\ & \quad P(NotReliable) \\ &= 1 \times 0.7 + 0.5 \times 0.3 = 0.85 \end{aligned}$$

$Reliable$ به قابلیت اعتماد شاهد برمی‌گردد. در مدل باور انتقال‌پذیر یک باور 0.7 به قاتل داده می‌شود یعنی $Bel(M)$ برابر 0.7 است. در روش احتمالی مقدار 0.7 به عنوان مؤلفه موجه و به مقدار 0.15 به عنوان مؤلفه بسته به بخت در نظر گرفته می‌شود. مدل باور انتقال‌پذیر فقط شامل مؤلفه‌های موجه است. حال فرض کنید که دو مرد مظنون وجود دارد: حسن و حسین. و همچنین می‌دانید که حسن قاتل نیست. بنابراین قابلیت اعتماد 0.7 شما طبق شهادت اولیه به "قاتل حسن یا حسین است" با اطلاعات جدید درباره حسن، حالا به "قاتل حسین است" دلالت می‌کند.

۳.۳ کاستن[۳۹]

فرض کنید شما هیچ باوری روی چارچوب تشخیص Ω ندارید، اما یک عامل قابل اعتمادی باورش روی Ω را به شما دیکته می‌کند که این باور را توسط تخصیص باور پایه m_Ω نشان داده می‌شود. عامل باید کاملاً قابل اعتماد باشد تا شما باورهایش را بپذیرید و به عنوان باورهای خودتان اتخاذ کنید. حال فرض کنید عامل کاملاً قابل اعتماد نیست. m_0 باور پیشین شما درباره قابلیت اعتماد این عامل است که در آن

$$\begin{aligned} m_0(\text{قابل اعتماد نبودن}) &= 1 - \alpha, \\ m_0(\text{قابل اعتماد بودن}) &= \alpha. \end{aligned}$$

ترکیب باور پیشین شما m_0 با m_Ω روی Ω منجر به یک باور کاسته شده Bel_Ω^α می‌شود (شفر، ۱۹۷۶).

بنابراین Bel_Ω^α برای هر $A \neq \Omega$ ،$A \subseteq \Omega$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} bel_\Omega^\alpha(A) &= \alpha bel_\Omega(A), \\ bel_\Omega^\alpha(\Omega) &= \alpha bel_\Omega(\Omega) + (1 - \alpha). \end{aligned}$$

[۳۹] Discounting

[۴۰] Least commeitment principle

۴.۳ اصل کم‌ترین تعهد[۴۰]

اصل کم‌ترین تعهد نقش مهمی در نظریه توابع باور ایفاء می‌کند و مانند اصل ماکسیمم آنتروپی در نظریه احتمال بیزی عمل می‌کند. اصل کمترین تعهد اظهار می‌دارد زمانی که دو تابع سازگار با یک مجموعه قیود در اختیار است، مناسب‌ترین آن‌ها تابع باور با آگاهی بخشی کم‌تر است.

می‌گوییم m متعهدتر از m' است اگر

$$Pl(A) \leq Pl'(A) \qquad \forall A \subseteq \Omega,$$

و یا به طور معادل

$$Bel(A) \geq Bel'(A) \qquad \forall A \subseteq \Omega,$$

باشد.

۵.۳ باورهای سازگار[۴۱] و تظریف شده[۴۲]

دو زبان گزاره‌ای L_1 و L_2 را در نظر بگیرید. همیشه می‌توان یک زبان گزاره‌ای مشترکی مانند L ساخت که در آن هر گزاره L_1 یا L_2 گزاره‌ای از L می‌باشد. Ω_1، Ω_2 و Ω را مجموعه‌های جهانی مرتبط با L_1 و L_2 و L قرار دهید. هر جهان Ω_1 با یک مجموعه از Ω مرتبط است. تصویر جهان‌های Ω_1 و Ω_2 افرازی از Ω را تشکیل می‌دهند. بنابراین هر جا دو فضای گزاره‌ای باشد، می‌توان از یک Ω مشترک بدون این که از کلیت کاسته شود استفاده کرد. در حقیقت در یک فضای گزاره‌ای $(\Omega, \Re)$ جزء مهم جبر بولی $\Re$ است. همه باورها روی جبر $\Re$ ساخته می‌شوند نه روی Ω. بنابراین تعریف دو فضای گزاره‌ای $(\Omega_i, \Re_i)$، $i = 1, 2$ با مجموعه‌های مختلف Ω_i با تعریف دو فضای گزاره‌ای $(\Omega, \Re_i)$ و $i = 1, 2$ برابر هستند.

دو فضای گزاره‌ای $(\Omega, \Re_1)$ و $(\Omega, \Re)$ را در نظر بگیرید. Λ_1 را یک نگاشت یک به چند مقداری از $\Re_1$ به $\Re$ قرار دهید که در آن هر عنصر $\Re_1$ روی یک گزاره $\Re$ نگاشته می‌شود. تصویر عنصرهای $\Re_1$ یک افراز از Ω را تشکیل می‌دهد. Λ_1 را تظریف $\Re_1$ به $\Re$ می‌نامند. $\Re_1$ را یک تظریف از $\Re$ و $\Re$ را ضخیم شده[۴۳] $\Re_1$ می‌نامند(شفر ۱۹۷۶). برای $B \in \Re$، قرار دهید:

$$\overline{\Lambda}_1^{-1}(B) = \cup\{A : A \in \Re_1, \Lambda_1(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

تعریف ۲.۳. فضای باور سازگار:

دو فضای گزاره‌ای $(\Omega, \Re_i)$، $i = 1, 2$ و دو تظریف Λ_i را در نظر بگیرید. طبق ساختار، اگر $B \in \Re$ درست باشد پس $\overline{\Lambda}_1^{-1}(B)$ و $\overline{\Lambda}_2^{-1}(B)$ نیزدرست هستند. دو فضای باور $(\Omega, \Re_i, Bel_i)$، $i = 1, 2$ را سازگار می‌نامند، اگر یک باور روی $\Re$ وجود داشته باشد که در آن رابطه

$$Bel_i(\overline{\Lambda}_i^{-1}(B)) = Bel(B)$$

برای هر $B \in \Re$، $i = 1, 2$ برقرار باشد.

تعریف ۳.۳. معادل اعتقادی [۴۴]

فرض کنید $[[EC_t^y]]$ نشان دهنده مجموعه جهان‌هایی در Ω است که در آن همه گزاره‌های القا شده روی Ω از EC_t^y درست باشد. همه جهان‌هایی در Ω که در $[[EC_t^y]]$ نیستند را به عنوان "غیرممکن" توسط شما در زمان t قبول می‌کنیم. دو گزاره A و B برای شما در زمان t را معادل اعتقادی گویند و با $A \cong B$ نشان می‌دهند اگر وفقط اگر

$$[[EC_t^y]] \cap [[A]] = [[EC_t^y]] \cap [[B]].$$

تعریف ۴.۳. اصل سازگاری:

دو فضای باور $(\Omega_i, \Re_i, Bel_i)$، $i = 1, 2$ را در نظر بگیرید که نمایش دهنده باور شما روی دو جبر $\Re_1$، $\Re_2$ القا شده توسط EC_t^y باشند. فرض کنید برای هر $A_1 \in \Re_1$ و $A_2 \in \Re_2$ اگر $A_1 \cong A_2$، آن‌گاه

$$Bel_1(A_1) = Bel_2(A_2)$$

برقرار می‌شود. این اصل به‌این معنی است که گزاره‌های معادل اعتقادی درجه باور یکسانی را دارند.

۶.۳ احتمال شرطبندی

یک فضای باور $(\Omega, \Re, Bel)$ را در نظر بگیرید که در آن Bel، باورهای شما را در سطح باور اندازه‌گیری می‌کند. وقتی که تصمیمی وابسته به ω_0 باید ساخته شود، باید یک تابع احتمالی روی $\Re$ برای اتخاذ تصمیم بهینه ایجاد کرد. فرض کنید تابع

[۴۱] Consistent

[۴۲] Refinment

[۴۳] Coarsenin

[۴۴] Doxastically Equivalent

احتمال تعریف شده روی $\Re$ یک تابعی از تابع باور Bel است. بنابراین باید Bel را به تابع احتمالی انتقال داد تا برای انتخاب بهترین تصمیم بتوان از آن استفاده کرد. $BetP$ این تابع احتمال را مشخص می‌کند. این انتقال را انتقال شرطبندی می‌نامند و با $\Gamma_{\Re}$ نشان می‌دهند. اندیس $\Re$ در $\Gamma_{\Re}$، جبر بولی را نشان می‌دهد که Bel و $BetP$ روی آن تعریف شده‌اند. بنابراین، داریم

$$BetP = \Gamma_{\Re}(Bel),$$

که در آن Bel و $BetP$ از $\Re$ به $[0,1]$ نگاشت می‌شوند. $BetP$ را یک احتمال شرطبندی می‌نامند که اندازه احتمال برای اتخاذ تصمیم است. $BetP$ یک اندازه احتمال کلاسیک است.
تحت فرضیات زیر می‌توان یک $\Gamma_{\Re}$ یکتا به دست آورد (اسمیتز ۱۹۹۰):

فرض۱: فرض کنید Bel_1 و Bel_2 دو تابع باور روی فضای گزاره‌ای $(\Omega, \Re)$ هستند و $\Gamma_{\Re}$ را یک انتقال شرطبندی در نظر بگیرید که یک تابع باور تحت $\Re$ را به یک تابع احتمال $BetP$ تحت $\Re$ انتقال می‌دهد. پس $\Gamma_{\Re}$ برای هر $\alpha \in [0,1]$ دارای خاصیت زیر است:

$$\Gamma_{\Re}(\alpha Bel_1 + (1-\alpha)Bel_2) = \alpha\Gamma_{\Re}(Bel_1) + (1-\alpha)\Gamma_{\Re}(Bel_2).$$

فرض ۲: احتمال شرطبندی مربوط به تصویر $A \in \Re$ بعد از جایگشت عضوهایی از $\Re$ با احتمال شرطبندی مربوط به A قبل از جایگشت برابر است.

فرض ۳: احتمال شرطبندی یک پیشامد غیرممکن برابر صفر است.

۷.۳ انتقال شرطبندی

فضای باور $(\Omega, \Re, Bel)$ در نظر بگیرید. قرار دهید

$$BetP = \Gamma_{\Re}(Bel).$$

تنها راه حلی که همه شرایط بالا را داشته باشد برای هر عضو ω از $\Re$ به صورت زیر است:

$$BetP(\omega) = \sum_{A:\omega\subseteq A\in\Re} \frac{m(A)}{|A|(1-m(\phi))}$$

که در آن $|A|$ تعداد عضوهای $\Re$ در A و m تخصیص باور پایه مرتبط با Bel است

$$BetP(A) \quad = \sum_{\omega:\omega\in At(\Re), \omega\subseteq A\in\Re} BetP(\omega) \qquad \forall A \in \Re$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $BetP$ تعیین شده از فرمول بالا یک تابع احتمال است و انتقال شرطبندی از یک تابع احتمال نیز تابع احتمال است.

مثال ۵.۳. هدف از مطرح‌کردن این مثال نشان‌دادن تفاوت راه حل مدل باور انتقال‌پذیر و روش بیزی است.
فرض کنید قاضی حکم داده است که آقای جعفری باید توسط یکی از سه نفری (مرتضی، مصطفی، مینا) که در اتاق انتظارش بوده‌اند به قتل رسیده باشد. قاضی قاتل فرضی را از پرتاب تاس انتخاب خواهد کرد و بدین گونه عمل می‌کند که اگر عدد زوج بیاید قاتل زن است و اگر عدد فرد بیاید قاتل مرد است. شما، کارشناس، از روند بالا اطلاع دارید، ولی نتیجه را نمی‌دانید و همچنین نمی‌دانید در صورت فرد آمدن تاس قاضی چگونه مرتضی یا مصطفی را انتخاب می‌کند. با توجه به اطلاعات موجود در زمان t_0 شما یک امتیاز ۱-۱ به جنسیت قاتل می‌دهید.
در زمان $t_0 < t_1$ شما می‌دانید که اگر قاضی مرتضی را به عنوان قاتل انتخاب نکرده است پس مرتضی حتماً به اداره پلیس رفته و توجیهی برای زمان قتل ارائه داده است. قابل ذکر است که این اطلاعات تنها این مفهوم را می‌رساند که

$$P(\text{مرتضی توجیهی کامل دارد}|\text{مرتضی قاتل نیست}) = 1$$

روش مدل باور انتقال‌پذیر:
k را قاتل در نظر بگیرید. اطلاعات در مورد اتاق انتظار E_0 و پرتاب تاس تخصیص باور پایه m_0 را القا می‌کند:

$$E_0 : k \in \Omega = \{\text{مرتضی، مصطفی، مینا}\},$$
$$\Re_0 = 2^{\Omega},$$
$$m_0\{\text{مرتضی، مصطفی مینا}\} = 1.$$

پرتاب تاس (شواهد E_1) تخصیص باور پایه زیر را القا می‌کند:

$$E_1 : \text{آزمون تاس،} \quad \Re_1 = \{\text{مرد، زن}\},$$
$$m_1\{\text{زن}\} = 0.5, \qquad m_1\{\text{مرد}\} = 0.5,$$

شرطی کردن m_0 روی E_1 توسط قانون دمپستر شرطی تخصیص

باور پایه $m_{0,1}$ را القا می‌کند:

$$E_{01}: E_0, E_1 \Re_{01} = 2^{\Omega}$$

$$m_{0,1}\{\text{مینا}\} = 0.5$$

$$m_{0,1}\{\text{مصطفی، مرتضی}\} = 0.5$$

جرم باور داده شده به {مصطفی ،مرتضی} مربوط به قسمتی از باور است که "مرتضی یا مصطفی" را تأکید می‌کند، امابه دلیل کمبود اطلاعات نمی‌تواند تمیز بیشتری بین مرتضی ومصطفی بدهد.

توجیه مرتضی (شواهد E_2) تخصیص باور پایه m_2 را القا می‌کند:

$$\begin{aligned} E_2 : A &= \text{"مرتضی توجیهی دارد"} \\ &= \text{"مرتضی به اداره پلیس رفته است"}, \\ E_2 : &\quad k \in \{\text{مینا، مصطفی}\}, \Re_2 = 2^{\Omega}, \\ &\quad m_2\{\text{مصطفی، مینا}\} = 1. \end{aligned}$$

شرطی کردن $m_{0,1}$ روی E_2 توسط قانون دمپستر شرطی منجر به $m_{0,1,2}$ می‌شود:

$$E_{012}: E_{01}, E_2 \Re_{012} = 2^{\Omega}$$

$$m_{0,1,2}\{\text{مینا}\} = m_{0,1,2}\{\text{مصطفی}\} = 0.5$$

جرم باور پایه‌ای که به "مرتضی یا مصطفی" داده شده بود به مصطفی انتقال یافت. نسبت شرط شما روی مرد در مقابل زن هنوز مانند قبل ۱ به ۱ است.

روش بیزی:

برای استفاده از روش بیزی درجه باورها توسط توزیع احتمال اندازه‌گیری می‌شود.

E_1 داده شده است، شما یک توزیع احتمال P_1 روی

$$\Omega = \{\text{مینا ، مصطفی ،مرتضی}\}$$

می‌سازید:

$$P_1(k \in \{\text{مینا}\}) = 0.5,$$

$$P_1(k \in \{\text{مصطفی ، مرتضی}\}) = 0.5,$$

شما روی مرد یا زن بودن قاتل با نسبت ۱ به ۱ شرط می‌بندید.

وقتی که E_2 را می‌دانید، شما P_{12} که احتمال شرطی P_1 روی {مینا ، مصطفی} را به دست می‌آورید:

$$\begin{aligned} & P_{12}(k \in \{\text{مینا}\}) \\ = \; & P_1(k \in \{\text{مینا}\} | k \in \{\text{مصطفی ، مینا}\}) \\ = \; & \frac{P_1(k \in \{\text{مینا}\})}{P_1(k \in \{\text{مینا}\}) + P_1(k \in \{\text{مصطفی}\})} \\ = \; & \frac{0.5}{0.5 + x}, \end{aligned}$$

که ذر رابطه بالا x نامعلوم است.

در نتیجه در روش بیزی به یک مقدار نامعلومی برخورد کردیم در صورتی که درمورد روش مدل باور انتقال پذیر به یک جواب نهایی رسیدیم که این مزیت نشان‌دهنده مدل باور انتقال پذیر نسبت به روش بیزی را است.

مراجع

[1] Bosc, P. and Prade, H. (1995). *An introduction to fuzzy set and possibility theory-based approaches to the treatment of uncertainty and imprecision in data base management systems*,Puerto Andraix, 2.

[2] Dempster, A.P. (1962).On direct probabilities, *J. the Royal Statistical Society*, **25**, 100–110.

[3] Dempster, A.P. (1967).Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping, *Annals of Mathematical Statistics*, **38**, 325–339.

[4] Denoeux, T. (2009). Extending stochastic ordering to belief functions on the real line, *Information Sciences*, **179**, 1362-1376.

[5] Fisher, R. A. (1930). Inverse probability. *Proc. Camb. Phil. Soc*, **26,** 154–57.172–173. Reprinted in Bennett, J. H. (1971). Collected Papers of R. A. Fisher 2, Univ. of Adelaide

[6] Kohlas, J. and Monney, P.A. (1994). *Representation of Evidence by Hints*. In: R. R. Yager, M. Fedrizzi, J. Kacprzyk (eds.) Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence. Wiley, 473-492.

[7] Kohlas, J. and Monney, P. A. (1995). *A mathematical theory of hints: An approach to dempster-shafer theory of evidence. Economics and Mathematical Systems* , 425, Springer-Verlag.

[8] Kyburg, H. E. Jr. (1961). *Probability and the logic of rational belief.* Wesleyan Univ. Press.

[9] Lucas, C. and Araabi, BN. (1999). Generalization of the Dempster-Shafer theory: A fuzzy valuedmeasure, *IEEE Trans Fuzzy Syst*,**7**,255–270.

[10] Nguyen, Hung T. (1978). On random sets and belief functions, *J. Mathematical Analysis and Applications*, **65**,531-542.

[11] Ristic, B. and Smets, P. (2004). Belief function theory on the continuous space with an application to model based classification, *In IPMU-2004 (Ed.),Information processing and management of uncertainty*, 1119–1126.

[12] Ruspini, Enrique H. (1987). Epistemic logics, probability, and the calculus of evidence, *IJCAI*, **87**, 924-931.

[13] Shafer, G. (1976). *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

[14] Shafer, G. (1987). Belief functions and possibility measures of The Analysis of Fuzzy Information, **1**, 51-84.

[15] Smets, P. (1961). Consistency in statistical inference and decision, J. *Roy. Statist.Soc*, **23**,1-37.

[16] Smets, P. (2005). Belief functions on real numbers, *International J. Approximate Reasoning,* **40**, 181–223.

[17] Smets, P. and Kennes, R. (1994). The Transferable Belief Model, *Artificial Intelligence,* **66**, 191–243.

[18] Strat, T. H. (1984). Continuous belief functions for evidential reasoning, *National conference on artificial intelligence*, 308–313.

[19] Torabi, H. Davvaz, B and. Behboodian, J.(2007). Inclusiveness measurement of random events using rough set theory, *International J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **15**, 483-491.

[20] Walley, P. (1991). *Statistical reasoning with imprecise probabilities*. Chapman and Hall,London.

[21] Yager, R. (1986). The entailment principle for Dempster-Shafer granules, *Int. J. Intell. Systems,* **1**, 247-262.

[22] Yen, J. (1990). Generalizing the Dempster-Shafer theory to fuzzy sets, *IEEE Trans Syst Man Cybern*, **20**, 559 –570.