درجات در درخت های بازگشتی تصادفی k-مینیمال برچسب

مهری جوانیان [۱]

چکیده:

در این مقاله به شرح محاسبهٔ توزیع حدی درجهٔ گره ها در نوعی درخت تصادفی به نام درخت بازگشتی تصادفی k-مینیمال برچسب، وقتی که اندازهٔ آن درخت به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، پرداخته شده است. درجهٔ خارجی یک گره در درخت بازگشتی تصادفی k-مینیمال برچسب، برابر با تعداد مشتریانی است که آن گره بدون واسطه در یک طرح هرمی بازاریابی جذب می کند.

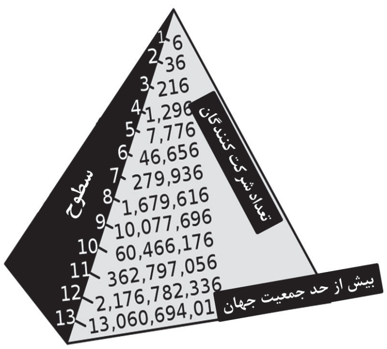
واژه‌های کلیدی: درخت، درخت بازگشتی تصادفی، توزیع حدی.

۱ ساختار های درختی متناظر با شرکت های هرمی

شاید ساختار شرکت های هرمی مثل گولد کوئست را دیده باشید، هسته کار به این شکل است که شما با پرداخت مبلغی (با هر عنوان) عضو شرکت شده و موظفید افرادی را به عضویت شرکت درآورید و این روند ادامه پیدا کرده و شما به ازای پولی که افراد زیرمجموعه به شرکت پرداخت می‌کنند پورسانتی را به عنوان سرگروه دریافت خواهید کرد.

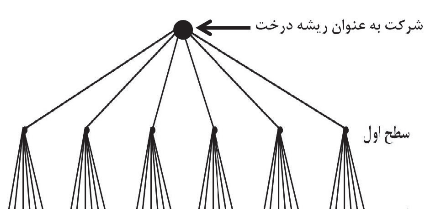
به طور مثال در شکل ۱ ملاحظه می‌کنید که ابتدا ٦ نفر عضو شرکت شده اند و هر یک برای دریافت پورسانت نیاز دارند که ٦ فرد جدید را به عضویت شرکت درآورند. یعنی در سطح دوم 6^2 عضو جدید برای رشد نیاز است. در سطح سوم 6^3 عضو جدید، پس از ده سطح 6^{10} عضو جدید و پس از سیزده سطح به بیش از سیزده میلیارد عضو جدید (6^{13}) یعنی بیش از کل جمعیت کره زمین برای رشد نیاز است. یعنی اعضای شرکت در سطح دوازده نمی توانند حداقل یک بار پورسانت دریافت کنند و حتی پولی که برای عضو شدن به شرکت پرداخته اند را به دست آورند. تنها چند نفر از اعضای سطوح بالای شرکت که زودتر عضو شده اند به درآمد کلانی می رسند.

به این ترتیب طرح هرمی نوعی کلاه‌برداری است که در بسیاری از کشورها از جمله ایران، ایالات متحده آمریکا، کانادا و کشورهای اروپایی و آسیایی قوانینی بر ضد فعالیت در عضو گیری برای این نوع شرکت ها وضع شده است.



شکل ۱: افزایش هرمی شکل اعضای شرکت

چگونگی الحاق هر عضو به یک شرکت هرمی را می توان با استفاده از یک درخت که نوعی گراف است، ترسیم کرد. به طور مثال در شکل (۲) شرکت به عنوان ریشه درخت و اعضای دیگر به عنوان گره های درخت در نظر گرفته شده است. ابتدا ٦ عضو (٦ مشتری بی واسطه برای شرکت) به وسیله ٦ گره به ریشه متصل شده اند و الی آخر.

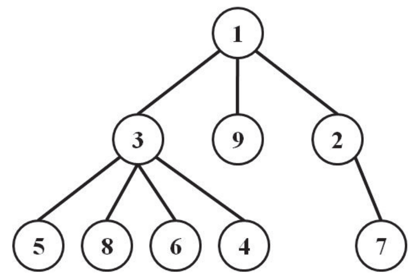


شکل ۲: نحوه عضویت در شرکت هرمی

حال شرکت هرمی را در نظر بگیرید که متناظر با درخت شکل ۳، به نام درخت بازگشتی، باشد. ابتدا شرکت هرمی به عنوان گره

[۱] گروه آمار دانشگاه زنجان

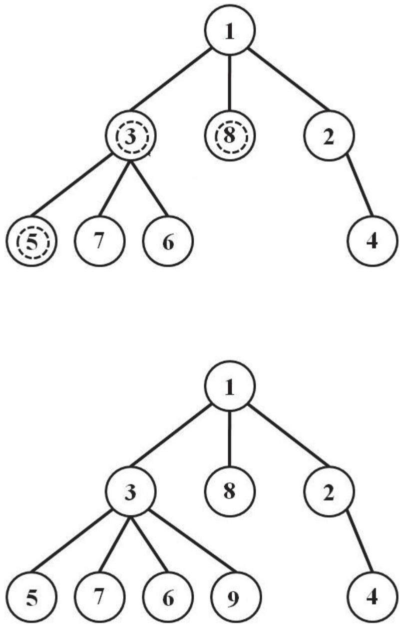
ریشهٔ درخت بازگشتی با برچسب ۱ در نظر گرفته می شود. سپس شرکت اولین عضو خود را پیدا می کند؛ یعنی این عضو که گره دوم درخت بازگشتی با برچسب ۲ است به گره ریشه متصل می شود. اینک شرکت و اولین عضو آن هر دو با شانس برابر، به رقابت برای پیدا کردن عضو می پردازند. عضو بعدی یعنی گره سوم درخت با احتمال برابر، توسط شرکت و یا گره دوم، به عضویت شرکت درآورده می شود. به همین ترتیب اعضای بعدی به این شرکت می پیوندند. تعداد گره های درخت بازگشتی شکل ۳ برابر با ۹ است که به آن اندازه درخت گویند. عضوشوندهٔ سوم (گره با برچسب ۳) در شکل ۳، چهار نفر را به عضویت شرکت درآورده است؛ یعنی گره سوم دارای درجهٔ چهار است. بنابراین درجهٔ گره i–ام برابر است با تعداد اعضایی که بدون واسطه به وسیله واردشوندهٔ i–ام، به عضویت شرکت درآورده شده اند. درجهٔ گره متناسب با میزان پورسانت آن گره است. یعنی هر چه قدر درجهٔ گره بزرگتر باشد، میزان پورسانت آن گره بیشتر است. هرگاه اندازه درخت خیلی بزرگ شود، بررسی درجهٔ گره i–ام از اهمیت زیادی برخوردار است که در [۲] به آن پرداخته شده است. در [۱] می توان نتایجی راجع به پارامترهای یک درخت بازگشتی را ملاحظه کرد. اگر در هر مرحله رشد درخت، گره جدید با شانس برابر به یکی از گره های درخت متصل شود، درخت حاصل را درخت بازگشتی یکنواخت می‌نامند.



شکل۳: درخت بازگشتی با اندازهٔ ۹

۲ درخت بازگشتی تصادفی k–مینیمال برچسب

درخت بازگشتی دلخواه با اندازهٔ k، T_k، را در نظر بگیرید. به ازای هر $i \geq 1$، k گره به تصادف و بدون جایگذاری از بین $k+i-1$ گره درخت T_{k+i-1}، انتخاب کرده و گره با برچسب $k+i$ را به گرهٔ با کوچکترین برچسب در بین k گره انتخابی، متصل می کنیم. درخت T_n با اندازهٔ n، $(n \geq k)$ را درخت بازگشتی تصادفی k–مینیمال برچسب با اندازهٔ n، می نامند. برای مثال در شکل ٤ سه گره ۳، ۵ و ۸ را انتخاب کرده و گره ۹ را به کوچکترین برچسب در بین آنها یعنی ۳ متصل نموده ایم. هرگاه $k=1$ باشد، درخت بازگشتی یکنواخت حاصل می شود.



شکل٤: نمایش اتصال گره ۹ به درخت بازگشتی ۳– مینیمال برچسب

در [۳]، توزیع حدی درجات برای درخت بازگشتی تصادفی k–مینیمال برچسب به دست آمده است. می توان در [۳] مشاهده کرد که اگر انتخاب به تصادف k گره در تعریف درخت بازگشتی تصادفی k–مینیمال برچسب، باجایگذاری نیز انجام شود، رفتار درخت به ازای n–های بزرگ تغییری نمی کند.

۳ توزیع حدی درجات

فرض کنید $D_{j,n-1}$ درجهٔ گره j در T_n، درختی بازگشتی تصادفی k–مینیمال برچسب با اندازهٔ n باشد. برای اتصال گره $n+1$ام به T_n، ابتدا k گره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. اگر گره j دارای مینیمم برچسب در بین k گرهٔ انتخاب شده از T_n باشد آنگاه گره $n+1$–ام به گره j متصل می شود و درجهٔ گره j یک واحد افزایش می یابد و در غیر این صورت درجهٔ گره j

تغییری نمی کند. بنابراین درجهٔ گره j، با احتمالی برابر با $\frac{\binom{n-j-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$ یک واحد افزایش می یابد و داریم

$$\begin{aligned} D_{j,n} &= D_{j,n-1} + B\left(\frac{\binom{n-j-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}\right) \\ &= D_{j,n-1} + B\left(k\frac{(n-j-1)_{k-1}}{(n)_k}\right), \end{aligned}$$

که در آن $B(p)$ متغیر تصادفی برنولی با احتمال پیروزی p است،

$$(x)_r = x(x-1)\cdots(x-r+1),$$

و $D_{j,n-1}$ از متغیر تصادفی برنولی مستقل است. بنابراین به روش بازگشتی، برای $n \geq j+k$ داریم

$$D_{j,n} = D_{j,j+k-1} + \sum_{i=j+k}^{n} B\left(k\frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k}\right),$$

با شرایط اولیه ای به این صورت که: اگر $j < k$، مقادیر ثابت $D_{j,j}$، $D_{j,j+1}$، ...، $D_{j,j+k-1}$ از درخت بازگشتی T_k که در تعریف درخت بازگشتی تصادفی k-مینیمال برچسب، درختی دلخواه و ثابت فرض شده است، به دست می آیند؛ و اگر $j \geq k$

$$D_{j,j} = D_{j,j+1} = \cdots = D_{j,j+k-1} = 1.$$

فرض کنید $\phi_{j,n}(t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی $D_{j,n}$ باشد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \phi_{j,n}(t) &= e^{D_{j,j+k-1}t} \times \prod_{i=j+k}^{n}\Big(1 - k\frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k} \\ &+ k\frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k}e^t\Big). \end{aligned} \quad (۱)$$

اگر $j = o(n)$، آنگاه با بسط دادن لگاریتم $\phi_{j,n}(t)$ به ازای tهای به اندازهٔ کافی کوچک داریم

$$\begin{aligned} \ln(\phi_{j,n}(t)) &= D_{j,j+k-1}t \\ &+ \sum_{i=j+k}^{n} \ln\Big(1 - k\frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k} + k\frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k}e^t\Big) \\ &= D_{j,j+k-1}t + \sum_{i=j+k}^{n} k\frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k}(e^t-1) \\ &+ \sum_{i=j+k}^{n} O\Big(\Big(\frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k}(e^t-1)\Big)^2\Big). \end{aligned}$$

از طرفی با محاسبهٔ تعیین مرتبهٔ عبارت $\frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k}$ به صورت زیر

$$\begin{aligned} \frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k} &= \frac{(i-j-1)\cdots(i-j-k+1)}{i\cdots(i-k+1)} \\ &= \frac{(i-j-1)^{k-1}\big(1+O(\frac{1}{i-j-1})\big)}{i^k\big(1+O(\frac{1}{i})\big)} \\ &= \frac{1}{i}\Big(1+O(\frac{j}{i})\Big)\Big(1+O(\frac{1}{i-j-1})\Big) \\ &= \frac{1}{i} + O(\frac{j}{i^2}), \end{aligned} \quad (۲)$$

و با جمع کردن بر روی i، $j+k \leq i \leq n$، از طرفین تساوی (۲) داریم

$$\sum_{i=j+k}^{n}\Big(\frac{1}{i} + O(\frac{j}{i^2})\Big) = H_n - H_{j+k-1} + O(1),$$

که در آن $H_n = \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} \sim \ln n$.

بنابراین به ازای هر u ثابت داریم

$$\begin{aligned} \phi_{j,n}\Big(\frac{u}{\sqrt{\ln\frac{n}{j}}}\Big) &= \exp\Big(D_{j,j+k-1}\frac{u}{\sqrt{\ln\frac{n}{j}}} \\ &+k\big(H_n - H_{j+k} + O(1)\big)\big(e^{\frac{u}{\sqrt{\ln\frac{n}{j}}}}-1\big) \\ &+\sum_{i=j+k}^{n} O\Big(\frac{(i-j-1)_{k-1}}{(i)_k}\big(e^{\frac{u}{\sqrt{\ln\frac{n}{j}}}}-1\big)^2\Big)\Big) \\ &= \exp\Big(D_{j,j+k-1}\frac{u}{\sqrt{\ln\frac{n}{j}}} \\ &+\big(k\ln\frac{n}{j} + O(1)\big)\Big(\Big[1 + \frac{u}{\sqrt{\ln\frac{n}{j}}} + \frac{u^2}{2\ln\frac{n}{j}} \\ &+O\Big(\frac{1}{\ln^{\frac{3}{2}}\frac{n}{j}}\Big)\Big] - 1\Big) \\ &+O\Big(\Big(\Big[1 + \frac{u}{\ln\frac{n}{j}} + \frac{u^2}{2\ln\frac{n}{j}} \\ &+O\Big(\frac{1}{\ln^{\frac{3}{2}}\frac{n}{j}}\Big)\Big] - 1\Big)^2\Big)\Big). \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \phi_{j,n}\Big(\frac{u}{\sqrt{\ln\frac{n}{j}}}\Big)\exp\Big(-ku\sqrt{\ln\frac{n}{j}}\Big) \\ = \exp\Big(\frac{ku^2}{2} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{n}{j}}}\Big)\Big) \to e^{\frac{k}{2}u^2}. \end{aligned}$$

پس به ازای $j = o(n)$، داریم

$$\frac{D_{j,n} - k\ln\frac{n}{j}}{\sqrt{\ln\frac{n}{j}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,k),$$

که در آن $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ علامت همگرایی در توزیع را نشان می دهد. حال اگر $j = c_n n$، به طوری که $c_n \to c$ و $c \in (0,1]$، آنگاه اولاً $D_{j,j+k-1} = 1$، ثانیاً طبق (۱)، (۲)، و تقریب استرلینگ برای تابع گاما $\Gamma(.)$ داریم

$$\phi_{j,n}(t) \sim e^t \prod_{i=j+k}^{n}\Big(1 + \frac{k}{i}(e^t-1)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= e^t \frac{\Gamma(n+1+k(e^t-1))\Gamma(j+k)}{\Gamma(j+k+k(e^t-1))\Gamma(n+1)} \\
&\sim e^t \Big(\frac{n}{j}\Big)^{k(e^t-1)} \\
&= e^t e^{k(e^t-1)\ln\frac{n}{j}} \\
&\to e^t e^{k\ln\frac{1}{c}(e^t-1)}.
\end{aligned}
$$

بنابراین به ازای $j = c_n n$، به طوری که $c_n \to c$ و $c \in (0,1]$، داریم

$$D_{j,n} \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 + Poi\Big(k \ln\frac{1}{c}\Big),$$

که در آن $Poi(\lambda)$ متغیر تصادفی پواسن با میانگین λ است.

مراجع

[1] Drmota, M. (2009), *Random trees: an interplay between combinatorics and probability*, Springer.

[2] Kuba, M. and Panholzer, A. (2007), on the degree distribution of the nodes in increasing trees, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, 114, 597–618.

[3] Mahmoud, H. (2012), The degree profile in some classes of random graphs that generalize recursive tree. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 16, 527–538.