معرفی کلاس‌های جدیدی از مدل ضربه‌ی نهایی

راضیه انصاری [۱]

چکیده:

در طبیعت یا صنعت سیستم‌هایی وجود دارند که در معرض ضربه‌های تصادفی هستند، این ضربه‌ها موجب سالخوردگی یا از کار افتادن سیستم می‌شود. بر حسب نوع ضربه‌ها، مدل‌های ضربه را به دو نوع اصلی دسته بندی می‌کنند، مدل ضربه نهایی و مدل ضربه تجمعی. در مدل ضربه نهایی تنها اثر آخرین ضربه که ضربه کشنده نام دارد مورد بررسی قرار می‌گیرد و در مدل ضربه تجمعی اثر ضربه‌های رخ داده با هم جمع می شود.

در واقعیت ممکن است اثر ضربه‌ها به روی سیستم منطبق با هیچ کدام از انواع این دو مدل نباشد لذا معرفی انواع دیگری از مدل‌های ضربه و بررسی سالخوردگی سیستم در این حالات ضروری به نظر می‌رسد. در این مقاله چند مدل جدید از انواع مدل‌های ضربه را معرفی کرده و سپس در هر یک از این مدل‌ها، به بررسی تابع بقا و نرخ شکست می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: مدل‌های شوکی، مدل ضربه تجمعی، مدل ضربه نهایی، مدل ضربه آمیخته، فرسایش

۱ مقدمه

در کتب فرایندهای تصادفی با فرایند پواسون همگن آشنا شده‌اید. فرایند مهم دیگری از فرایندهای شمارشی، فرایند پواسون ناهمگن است.

تعریف ۱.۱. فرایند شمارشی N را یک فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $\nu(t)$ می‌گوییم هرگاه در چهار شرط زیر صدق کند.

۱. $N(0)=0$.

۲. $N(t), t\geq 0$ دارای نموهای مستقل باشد.

۳. $P(N(t+h)-N(t)\geq 2)=o(h)$

٤. $P(N(t+h)-N(t)=1)=\lambda(t)h+o(h)$

یکی از مفاهیم پرکاربرد در قابلیت اعتماد، تابع بقا است.

تعریف ۲.۱. فرض کنید X طول عمر یک سیستم را نشان می‌دهد که متغیر تصادفی نامنفی با تابع توزیع $F(x)$ است. احتمال $\overline{F}(x)=P(X>x)$ را تابع بقا و نسبت $r(t)=\frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$ را تابع نرخ شکست X می‌نامیم.

حال سیستم در معرض ضربه‌های تصادفی را در نظر بگیرید که ضربه ها طبق فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $\nu(t)$ وارد می شوند. فرض کنید هر ضربه با احتمال $p(t)$ باعث شکست سیستم (و بنابراین خاتمه فرایند وقوع ضربه) می شود که به این نوع ضربه‌ها، ضربه بحرانی می‌گویند و با احتمال $q(t)=1-p(t)$ برای سیستم بی ضرر است. اگر سیستم در غیاب ضربه ها کاملاً مطمئن باشد، تنها عامل شکست سیستم وقوع ضربه بحرانی است پس اگر بخواهیم سیستم حداقل تا زمان t زنده بماند، نباید در بازه $[0,t]$ ضربه بحرانی رخ دهد. بنابراین اگر T_S طول عمر سیستم در حضور ضربه‌ها باشد، احتمال بقای منطبق با این مدل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} P(T_S>t)&=P(N_p(t)=0)\\ &=\exp\Big\{-\int_0^t p(u)\nu(u)du\Big\} \qquad (۱)\end{aligned}$$

که در آن $\{N_p(t), t\geq 0\}$ فرایند وقوع ضربه بحرانی است که یک فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $p(t)\nu(t)$ است. بنابراین تابع نرخ شکست برابر است با:

$$\lambda_s(t)=p(t)\nu(t), \quad t\geq 0. \qquad (۲)$$

برای راحتی کار، مدل ضربه نهایی‌ای که اکنون به آن اشاره کردیم

[۱] کارشناسی ارشد، دانشگاه اصفهان

را مدل $q(t) \Leftrightarrow p(t)$ می نامیم.

حال اگر سیستم در غیاب ضربه‌ها مطمئن نباشد یعنی ممکن است سیستم بدون وقوع ضربه نیز از کار بیفتد.
فرض می‌کنیم R، عمر تصادفی سیستم در غیاب ضربه‌ها، دارای تابع توزیع $F(t)$ باشد و نیز فرایند وقوع ضربه از R مستقل باشد. در این حالت به دو علت سیستم از کار می‌افتد، یکی وقوع ضربه بحرانی و دیگری پایان یافتن عمر طبیعی سیستم، پس داریم:

$$P(T_S > t) = \overline{F}(t) \exp\Big\{ -\int_0^t p(u)\nu(u)du\Big\} \qquad (۳)$$

هر دو مدل معرفی شده در بالا از نوع مدل ضربه نهایی است. در این مقاله با اضافه کردن شرایطی به این مدل، مدل‌های جدیدی از انواع مدل ضربه معرفی و بررسی می‌شود. بنابراین در بخش دوم بر اساس تحقیقات چا و فینکل‌اشتاین[۲] [۱] به شیوه‌ای خاص، مدل ضربه نهایی با نوعی مدل ضربه تجمعی ترکیب شده و مدلی تحت عنوان مدل ضربه ترکیبی معرفی و بررسی می‌شود. در بخش سوم بر اساس مطالعات چا و فینکل‌اشتاین [۲] با فرض اینکه احتمال کشنده بودن ضربه‌ای که در زمان t رخ می‌دهد به گذشته فرایند وقوع ضربه بستگی دارد مدل‌هایی تحت عنوان مدل A و B بدست آمده و تابع بقا و نرخ شکست محاسبه می‌شود. در بخش چهارم بر اساس مطالعات چا و فینکل‌اشتاین [۳] در دو مدل ضربه نهایی و مدل ضربه ترکیبی، فرض می‌شود ضربه‌ها با میزان تأخیری تصادفی روی سیستم اثر می‌گذارد و سپس به محاسبه تابع بقا و نرخ شکست پرداخته می‌شود.

۲ مدل ضربه ترکیبی

قبل از معرفی مدل برای راحتی کار نمادگذاری‌های زیر را انجام می‌دهیم:

R : طول عمر سیستم (بدون وقوع ضربه)

در نتیجه $P(R \le t) = F(t)$.

$\{N(t), t \ge 0\}$: فرایند وقوع ضربه

T_i : زمان رخ دادن iامین ضربه

T_S : طول عمر سیستم(تحت وقوع ضربه)

$F_S(t)$: تابع توزیع طول عمر سیستم در حضور ضربه‌ها

W_i : میزان فرسایش ایجاد شده توسط ضربه iام حال فرض کنید iامین ضربه با احتمال $p(t)$ فوراً سیستم را از کار می‌اندازد و با احتمال $q(t) = 1 - p(t)$ سن سیستم را به مقدار تصادفی $W_i \ge 0$ افزایش می‌دهد. بنابراین سن تصادفی سیستم در زمان t برابر خواهد شد با:

$$T_\nu = t + \sum_{i=0}^{N(t)} W_i$$

که در آن منطبق با حالتی که $N(t) = 0$ قرار می دهیم، $W_0 = 0$.
در نتیجه شکست زمانی اتفاق می‌افتد که این متغیر تصادفی از مرز R بگذرد و یا ضربه بحرانی رخ دهد.
چون وقوع یک ضربه(ضربه بحرانی) و یا تأثیر جمعی از ضربه‌ها(ضربه‌های غیربحرانی) در از کار افتادن سیستم تأثیر دارد، این مدل ترکیبی از مدل ضربه نهایی و مدل ضربه تجمعی است لذا آن را مدل ضربه ترکیبی می‌نامیم.
به شرط داشتن R، $N(s), 0 \le s \le t$ و میزان فرسایش ناشی از ضربه‌ها، احتمال شرطی تابع بقای سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned} &P(T_S > t | N(s), 0 \le s \le t, \\ &\qquad W_1, W_2, ..., W_{N(t)}; R) \\ &= \prod_{i=0}^{N(t)} q(T_i) I\Big(\sum_{i=0}^{N(t)} W_i \le R - t\Big), \end{aligned} \qquad (٤)$$

که در آن $q(T_0) \equiv 1$. همانطور که می‌بینیم، فرمول (٤) بسیار کلی است. بنابراین در ادامه به بررسی دو حالت خاص که R دارای توزیع نمایی و یا R ثابت است می‌پردازیم.

۱.۲ R دارای توزیع نمایی

در این حالت علاوه بر مفروضات قبل فرض‌های زیر را نیز می‌پذیریم:

۱. $\{N(t), t \ge 0\}$ فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $\nu(t)$ است.

۲. W_i ها مستقل و هم‌توزیع با تابع مولد گشتاور $M_W(t)$ و تابع توزیع $G(t)$ هستند.

۳. $\{N(t), t \ge 0\}$ و $W_i, i = 1, 2, ...$ و R مستقل از یکدیگرند.

[۲] Cha, J. H. and Finkelstein, M.

۴. R دارای توزیع نمایی با نرخ شکست λ است و در نتیجه:
$$\overline{F}(t)=e^{-\lambda t}$$

قضیه زیر تابع بقا و تابع نرخ شکست T_S را بدست می‌دهد.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $m(t)=E[N(t)]=\int_0^t \nu(x)dx$ و نیز مفروضات ۴-۱ برقرارند، $m(t)$ تابعی پیوسته و تابع معکوس $m^{-1}(t)$ وجود دارد، آنگاه:

$$P(T_S>t)=\exp\{-\lambda t-\int_0^t \nu(x)dx + M_W(-\lambda)\int_0^t q(x)\nu(x)dx\},\quad t\ge 0$$
$$\lambda_S(t)=\lambda+(1-M_W(-\lambda)q(t))\nu(t) \qquad (۵)$$

اثبات. برای بدست آوردن تابع بقا ابتدا احتمال شرطی زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&P(T_S>t|N(s),0\le s\le t,W_1,...,W_{N(t)})\\
&=\Big(\prod_{i=0}^{N(t)} q(T_i)\Big)P\Big(R\ge t+\sum_{i=1}^{N(t)} W_i\Big)\\
&=\exp\Big\{-\lambda t-\lambda\sum_{i=1}^{N(t)} W_i+\sum_{i=1}^{N(t)}\ln q(T_i)\Big\}
\end{aligned}$$

با استفاده از امید گرفتن از این رابطه نسبت به W_iها داریم:

$$\begin{aligned}
&P(T_S>t|N(s),0\le s\le t)\\
&=e^{-\lambda t}\times\exp\Big\{\sum_{i=1}^{N(t)}\ln q(T_i)\Big\}E[e^{-\sum_{i=1}^{N(t)}\lambda W_i}]\\
&=e^{-\lambda t}\times\exp\Big\{\sum_{i=1}^{N(t)}\ln q(T_i)\Big\}\prod_{i=1}^{N(t)}E\Big[e^{-\lambda W_i}\Big]\\
&=e^{-\lambda t}\times\exp\Big\{\sum_{i=1}^{N(t)}\ln q(T_i)\Big\}(M_W(-\lambda))^{N(t)}\\
&=e^{-\lambda t}\times\exp\Big\{\sum_{i=1}^{N(t)}[\ln q(T_i)+\ln(M_W(-\lambda))]\Big\}
\end{aligned}$$

حال اگر از این رابطه نسبت به N امید بگیریم تابع بقا بدست خواهد آمد:

$$P(T_S>t)=$$
$$e^{-\lambda t}E\Big[\exp\Big\{\sum_{i=1}^{N(t)}[\ln q(T_i)+\ln(M_W(-\lambda))]\Big\}\Big] \qquad (۶)$$

برای رسیدن به این منظور تعریف می‌کنیم:

$$N^*(t)\equiv N(m^{-1}(t)),\ t\ge 0$$

و

$$T_j^*\equiv m(T_j),\ j\ge 1$$

می‌دانیم $\{N^*(t),\ t\ge 0\}$ یک فرایند پواسون همگن با نرخ ۱ است و $T_j^*,\ j\ge 1$ زمان رخداد ضربه‌ها در مقیاس فاصله زمانی جدید است. (سینلار[۳] [۴])

اگر قرار دهیم $s=m(t)$ آنگاه:

$$\begin{aligned}
&E\Big[\exp\Big\{\sum_{i=1}^{N(t)}[\ln q(T_i)+\ln(M_W(-\lambda))]\Big\}\Big]\\
&=E\Big[\exp\Big\{\sum_{i=1}^{N^*(s)}[\ln q(m^{-1}(T_i^*))+\ln(M_W(-\lambda))]\Big\}\Big]\\
&=E\Big[E\Big[\exp\Big\{\sum_{i=1}^{N^*(s)}[\ln q(m^{-1}(T_i^*))\\
&+\ln(M_W(-\lambda))]\Big\}\Big|N^*(s)\Big]\Big] \qquad (۷)
\end{aligned}$$

حال چون، $T_1^*,T_2^*,...T_n^*|N^*(s)=n$ با $V_{(1)},V_{(2)},...,V_{(n)}$ یعنی آماره‌های ترتیبی نمونه تصادفی nتایی از توزیع یکنواخت در فاصله $[0,m(t)]$، هم توزیع است(راس[۴] [۵])، داریم:

$$\begin{aligned}
&E\Big[\exp\Big\{\sum_{i=1}^{N^*(s)}[\ln q(m^{-1}(T_i^*))+\ln(M_W(-\lambda))]\Big\}\Big|N^*(s)=n\Big]\\
&=E\Big[\exp\Big\{\sum_{i=1}^{n}[\ln q(m^{-1}(V_{(i)}))\ln(M_W(-\lambda))]\Big\}\Big]\\
&=E\Big[\exp\Big\{\sum_{i=1}^{n}[\ln q(m^{-1}(V_i))+\ln(M_W(-\lambda))]\Big\}\Big]\\
&=\Big(E\Big[\exp\Big\{\ln q(m^{-1}(V_1))+\ln(M_W(-\lambda))\Big\}\Big]\Big)^n\\
&=\Big(E\Big[\exp\Big\{\ln q(m^{-1}(sU))+\ln(M_W(-\lambda))\Big\}\Big]\Big)^n
\end{aligned}$$

که در آن $U=\frac{V_1}{s}$ دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0,1]$ است.

[۳] Cinlar, E.

[۴] Ross, S.

بنابراین:

$$\begin{aligned}&E[\exp\{\ln q(m^{-1}(sU))+\ln(M_W(-\lambda))\}]\\&=\int_0^1\exp\{\ln q(m^{-1}(su))+\ln(M_W(-\lambda))\}du\\&=M_W(-\lambda)\int_0^1 q(m^{-1}(m(t)u)du\\&=\frac{M_W(-\lambda)}{m(t)}\int_0^t q(x)\nu(x)dx\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}&E\Big[\exp\Big\{\sum_{i=1}^{N^*(s)}[\ln q(m^{-1}(T_i^*))+\ln(M_W(-\lambda))]\Big\}\Big|N^*(s)=n\Big]\\&=\Big(E[\exp\{\ln q(m^{-1}(sU))+\ln(M_W(-\lambda))\}]\Big)^n\\&=\Big(\frac{M_W(-\lambda)}{m(t)}\int_0^t q(x)\nu(x)dx\Big)^n\end{aligned}\qquad(٨)$$

حال از (٦) و(٧) و (٨) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}&P(T_S>t)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{M_W(-\lambda)}{m(t)}\int_0^t q(x)\nu(x)dx\Big)^n\times\frac{s^n}{n!}e^{-s}e^{-\lambda t}\\&=\exp\Big\{-\lambda t-\int_0^t\nu(x)dx+M_W(-\lambda)\int_0^t q(x)\nu(x)dx\Big\}\end{aligned}$$

بنابراین تابع نرخ شکست برابر است با:

$$\lambda_S(t)=\lambda+(1-M_W(-\lambda)q(t))\nu(t)$$

□

نتیجه ۲.۲. اگر W_iها دارای توزیع نمایی با میانگین μ باشند، تابع نرخ شکست به صورت زیر خواهد بود:

$$\lambda_S(t)=\lambda+(1-\frac{q(t)}{\lambda\mu+1})\nu(t)\qquad(٩)$$

تذکر ۳.۲. می‌توان این دیدگاه را برای W_iهایی که همسان نیستند نیز به کار برد. برای مثال فرض کنید:

$$W_{i+1}=aW_i,\quad i\geq 1, a>1$$

در این حالت با محاسباتی همانند قبل بدست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned}&P(T_S>t)=\exp\Big\{-\lambda t-\int_0^t\nu(x)dx\Big\}\\&\times\sum_{n=0}^{\infty}\Big[M_{W_1}\Big(-\frac{\lambda}{a-1}(a^n-1)\Big)\times\frac{(\int_0^t q(x)\nu(x)dx)^n}{n!}\Big]\end{aligned}$$

ولی همانطور که مشاهده می‌کنید این تابع بقا را نمی‌توان به فرم ساده و صریح مانند رابطه (٥) نوشت.

۲.۲ R ثابت

فرض کنید $R=b$ ونیز سایر مفروضات قسمت (۱.۲) برقرار باشد. در این حالت فرض را براین می‌گذاریم که $t<b$ یعنی بدون رخ دادن ضربه شکست رخ نمی‌دهد.

قضیه ٤.۲. فرض کنید مفروضات ۳-۱ برقرار است، $m(t)$ تابعی پیوسته و تابع معکوس $m^{-1}(t)$ وجود دارد. علاوه بر آن فرض کنید W_iها مستقل و هم‌توزیع از توزیع نمایی با میانگین $1/\eta$ باشد. آنگاه:

$$\begin{aligned}P(T_S>t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[&\Big(\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(\eta(b-t))^j}{j!}e^{-\eta(b-t)}\Big)\\&\times\Big(\frac{1}{m(t)}\int_0^t q(x)\nu(x)dx\Big)^n\\&\times\frac{m(t)^n}{n!}e^{-m(t)}\Big],\quad 0\leq t<b\end{aligned}\qquad(١٠)$$

اثبات. برای اثبات رجوع کنید به مقاله چا و فینکل اشتاین[٥] [١]

□

نتیجه ٥.۲. تابع بقای (١٠) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد: پس:

$$\begin{aligned}P(T_S>t)&=\exp\Big\{-\int_0^t p(x)\nu(x)dx\Big\}\\&\times\sum_{n=0}^{\infty}P(Z_1\geq n)P(Z_2=n)\end{aligned}\qquad(١١)$$

که در آن Z_1 و Z_2 دو متغیر تصادفی از توزیع پواسون با پارامترهای به ترتیب $\int_0^t q(x)\nu(x)dx$ و $\eta(b-t)$ هستند.

تذکر ٦.۲. ١. وقتی $\infty\longrightarrow\eta=\frac{1}{\mu}$ یعنی میانگین W_i به صفر میل کند، معادله (١١) به مدل $p(t)\Leftrightarrow q(t)$ تبدیل می‌شود چرا که:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(Z_1\geq n)P(Z_2=n)\longrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}P(Z_2=n)=1$$

چون برای هر $n\geq 1$، $P(Z_1\geq n)\longrightarrow 1$ و $P(Z_1\geq 0)=1$، طبیعی است که اگر نموهای فرسایش از بین بروند، اثر آنها روی مدل نیز از بین خواهد رفت.

٥ Cha, J. H. and Finkelstein, M.

۲. وقتی $\eta \longrightarrow 0$ یعنی میانگین فرسایش به بی‌نهایت میل می‌کند، احتمال اینکه با رخ دادن اولین ضربه سیستم از کار بیفتد به یک میل می‌کند و داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(Z_1 \geq n) P(Z_2 = n) \longrightarrow P(Z_2 = 0)$$

چون $P(Z_1 \geq 0) = 1$ و وقتی $\eta \longrightarrow 0$ برای هر $n \geq 1$، $P(Z_1 \geq n) \longrightarrow 0$. بنابراین:

$$P(T_S > t) \longrightarrow= \exp\Big\{ - \int_0^t \nu(x) dx \Big\}$$

که برابر است با احتمال اینکه در بازه $[0, t]$ هیچ ضربه‌ای رخ ندهد و این همان چیزی است که انتظار داریم چرا که وقتی $t < b$ سیستم فقط بدون وقوع ضربه می‌تواند زنده بماند.

۳ مدل‌های ضربه با فرض وابستگی $p(t)$ به گذشته فرایند

در مدل $q(t) \Leftrightarrow p(t)$ که در مقدمه به آن اشاره شد دو فرض اساسی که برای بدست آوردن رابطه (۲) در نظر گرفتیم عبارت است از:

۱. فرایند وقوع ضربه $NHPP(\nu(t))$ است.

۲. احتمال $p(t)$ به گذشته فرایند وقوع ضربه بستگی ندارد.

گذشته فرایند را با $H(t)$ نشان می‌دهیم و در حالتی که فرایند وقوع ضربه $NHPP$ است:

$$H(t) \equiv \{N(s),\ 0 \leq s < t\}.$$

در این بخش فرض می‌شود $p(t)$ به $H(t)$ وابسته است و با این فرض دو مدل A و B را تعریف می‌کنیم.

۱.۳ مدل A

در این مدل فرض می کنیم فرایند وقوع ضربه $NHPP(\nu(t))$ است با این تفاوت که $p(t)$ از گذشته مستقل نیست و داریم:

$$p(t|H(t)) = p(t|N(s),\ 0 \leq s < t).$$

ساده ترین حالتی که برای وابستگی به گذشته می‌توان در نظر گرفت تعداد ضربه‌هایی است که سیستم در فاصله زمانی $[0, t)$ با آن مواجه می‌شود یعنی همان $N(t)$. منطقی است فرض شود هر ضربه با افزایش دادن احتمال $p(t|H(t)) = p(t, N(t))$،باعث ضعیف شدن سیستم شود، بنابراین تابع $p(t, N(t))$ وقتی $N(t) = n(t)$ برحسب $n(t)$ صعودی است. فرض کنید:

$$q(t, n(t)) \equiv 1 - p(t, n(t)) = q(t)\rho(n(t)), \qquad (۱۲)$$

که $\rho(n(t))$ تابعی است که برای هر t ثابت، بر حسب مؤلفه‌هایش نزولی است.

پس در این مدل فرض می‌کنیم احتمال بحرانی بودن ضربه‌ای که در زمان t رخ داده است از طریق تعداد ضربه‌های رخ داده تا زمان t، به گذشته فرایند وابسته است لذا ضربه رخ داده با احتمال $p(t, n(t))$بحرانی است و سیستم را از کار می‌اندازد و با احتمال $q(t, n(t))$ سیستم را از کار نمی‌اندازد. توجه کنید ضربه‌ای که سیستم را از کار نمی‌اندازد در از کار افتادن سیستم بی‌تأثیر نیست چون احتمال از کار افتادن سیستم توسط ضربه بعد را بالا می‌برد.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $m(t) \equiv E[N(t)] = \int_0^t \nu(x) dx$ تابعی پیوسته، $\Psi(n) \equiv \prod_{i=0}^{n} \rho(i)$ ، $\rho(0) = 1$. و تابع معکوس $m^{-1}(t)$ وجود دارد. آنگاه:

$$P(T_S \geq t) = E[\Psi(N_{q\nu}(t))] \exp\Big\{ - \int_0^t p(x)\nu(x) dx \Big\}, \qquad (۱۳)$$

که $\{N_{q\nu}(t),\ t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون غیر همگن با نرخ $q(t)\nu(t)$ است.

اثبات. اگر $N(s), 0 \leq s < t$ معلوم باشد زمانی سیستم تا زمان t زنده می‌ماند که ضربه‌های رخ داده بحرانی نباشند، پس:

$$P(T_S \geq t | N(s), 0 \leq s < t) = \prod_{i=0}^{N(t)} q(T_i, n(T_i)) = \prod_{i=0}^{N(t)} q(T_i)\rho(i),$$

که طبق قرارداد منطبق با وقتی که $N(t) = 0$ ، $q(T_0) \equiv 1$ و $\rho(0) \equiv 1$.

با امید گرفتن نسبت به N داریم:

$$P(T_s \geq t) = E\Big[\prod_{i=0}^{N(t)} q(T_i)\rho(i) \Big] = E\Big[\prod_{i=1}^{N(t)} q(T_i)\rho(i) \Big].$$

حال با توجه به همان نکات و جزئیاتی که در اثبات قضیه (۱.۲)

آورده شد داریم:

$$E\Big[\prod_{i=1}^{N(t)} q(T_i)\rho(i)\Big] = E\Big[\prod_{i=1}^{N^*(t)} q\big(m^{-1}(T_i^*)\big)\rho(i)\Big]$$
$$= E\Big[E\Big[\prod_{i=1}^{N^*(t)} q(m^{-1}(T_i^*))\rho(i)\Big| N^*(s)\Big]\Big].$$

حال چون $T_1^*, T_2^*, ...T_n^*|N^*(s) = n$ با $V_{(1)}, V_{(2)}, ..., V_{(n)}$ یعنی آماره‌های ترتیبی نمونه تصادفی nتایی از توزیع یکنواخت در فاصله $[0, m(t)]$ هم توزیع است، داریم:

$$\begin{aligned}
&E\Big[\prod_{i=1}^{N^*(t)} q\big(m^{-1}(T_i^*)\big)\rho(i)\Big| N^*(s) = n\Big]\\
&= \prod_{i=1}^{n}\rho(i) E\Big[\prod_{i=1}^{n} q\big(m^{-1}(T_i^*)\big)\Big]\\
&= \prod_{i=1}^{n}\rho(i) E\Big[\prod_{i=1}^{n} q\big(m^{-1}(V_{(i)})\big)\Big]\\
&= \prod_{i=1}^{n}\rho(i) E\Big[\prod_{i=1}^{n} q\big(m^{-1}(V_i)\big)\Big]\\
&= \prod_{i=1}^{n}\rho(i) \big(E\big[q\big(m^{-1}(V_1)\big)\big]\big)^n\\
&= \prod_{i=1}^{n}\rho(i) (E\big[q\big(m^{-1}(sU)\big)\big])^n,
\end{aligned}$$

که در آن $U = V_1/s \sim U[0,1]$.

از طرفی:

$$\begin{aligned}
E\big[q\big(m^{-1}(sU)\big)\big] &= \int_0^t q\big(m^{-1}(su)\big)du\\
&= \int_0^t q\big(m^{-1}(m(t)u)\big)du\\
&= \frac{1}{m(t)}\int_0^t q(x)\nu(x)dx.
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
&E\Big[\prod_{i=1}^{N^*(t)} q\big(m^{-1}(T_i^*)\big)\rho(i)\Big| N^*(s) = n\Big]\\
&= \prod_{i=1}^{n}\rho(i)\Big(\frac{1}{m(t)}\int_0^t q(x)\nu(x)dx\Big)^n. \qquad (١٤)
\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\Psi(n) \equiv \prod_{i=1}^{n}\rho(i)$ سپس با امید گرفتن از رابطه (١٤) داریم:

$$\begin{aligned}
P(T_S \geq t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Psi(n)\Big(\frac{1}{m(t)}\int_0^t q(x)\nu(x)dx\Big)^n\\
&\quad\times \frac{(m(t))^n}{n!}e^{-m(t)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Psi(n)\Big(\int_0^t q(x)\nu(x)dx\Big)^n\\
&\quad\times \frac{e^{-\int_0^t \nu(x)dx}}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Psi(n)\Big(\int_0^t q(x)\nu(x)dx\Big)^n\\
&\quad\times \frac{e^{-\int_0^t (p(x)+q(x))\nu(x)dx}}{n!}\\
&= E[\Psi(N_{q\nu}(t))]\exp\Big\{-\int_0^t p(x)\nu(x)dx\Big\},
\end{aligned}$$

که $N_{q\nu}(t), t \geq 0$ فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $q(t)\nu(t)$ است. □

٢.٣ مدل B

این مدل نوع متفاوتی از مدل ضربه نهایی است. در حقیقت این مدل را می‌توان تعمیمی از مدل A دانست. در زیر بخش قبل دومین عامل شکست، تنها به تعداد ضربه‌های غیر بحرانی رخ داده بستگی دارد و شدت ضربه‌ها مهم نیست. ولی در این مدل ضربه‌هایی را به شمار می‌آوریم که شدت آنها از یک سطح داده شده k بزرگتر باشد و این نوع ضربه‌ها را ضربه خطرناک می‌نامیم. فرض کنید دومین عامل شکست زمانی محقق می‌شود که تعداد ضربه‌های خطرناک از سطح تصادفی M تجاوز کند پس اگر $M = m$ باشد، در غیاب ضربه‌های بحرانی، سیستم زمانی از کار می‌افتد که $m+1$امین ضربه خطرناک رخ دهد. فرض کنید شدت ضربه‌ها متغیری تصادفی با تابع توزیع $G(t)$ است و نیزتابع بقای $P(M > l) \quad l = 0, 1, 2, ...$ داده شده است. اگر تا زمان t هیچ ضربه بحرانی‌ای رخ ندهد و تعریف کنیم:

$$\varphi_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر iامین ضربه خطرناک باشد.}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

$i = 1, 2, .., N(t)$، آنگاه می‌توان گفت:

$$\Psi(N_{q\nu}(t), \Theta) = I\Big(M \geq \sum_{i=1}^{N_{q\nu}(t)}\varphi_i\Big)$$

و $S=\{1\}$ بنابراین:

$$
\begin{aligned}
P(T_s\geq t|E_C(t)) &= E[I(\Psi(N_{q\nu}(t),\Theta))\in S] \\
&= E\Big[I\Big(M\geq \sum_{i=1}^{N_{q\nu}(t)}\varphi_i\Big)\Big] \\
&= E\Big[E\Big[I\Big(M\geq \sum_{i=1}^{N_{q\nu}(t)}\varphi_i\Big)\Big|N_{q\nu}(t)\Big]\Big] \\
&= E\Big[P\Big(M\geq \sum_{i=1}^{N_{q\nu}(t)}\varphi_i\Big|N_{q\nu}(t)\Big)\Big],
\end{aligned}
$$

که در آن:

$$
\begin{aligned}
&P\Big(M\geq \sum_{i=1}^{N_{q\nu}(t)}\varphi_i\Big|N_{q\nu}(t)=n\Big) \\
&= \sum_{m=0}^{n} P\Big(M\geq \sum_{i=1}^{n}\varphi_i\Big|N_{q\nu}(t)=n, M=m\Big) \\
&\qquad P(M=m|N_{q\nu}(t)=n)+P(M>n|N_{q\nu}(t)=n) \\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\Big[\binom{n}{l}\overline{G}(k)^l\times G(k)^{n-l}P(M=m)\Big]+P(M>n) \\
&= \sum_{l=0}^{n}\sum_{m=l}^{n}\Big[\binom{n}{l}\overline{G}(k)^l(k)^{n-l}P(M=m)\Big]+P(M>n) \\
&= \sum_{l=0}^{n}\Big[\binom{n}{l}\overline{G}(k)^lG(k)^{n-l}(P(M\geq l)-P(M\geq n+1))\Big] \\
&+P(M>n) \\
&= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\overline{G}(k)^lG(k)^{n-l}P(M\geq l).
\end{aligned}
$$

با گرفتن امید ریاضی نسبت به $N_{q\nu}(t)$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&P(T_s\geq t|E_c(t))= \\
&\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\overline{G}(k)^lG(k)^{n-l}\times P(M\geq l)\Big)\frac{m_q(t)^ne^{-m_q(t)}}{n!},
\end{aligned}
$$

که در آن $m_q(t)\equiv\int_0^t q(x)\nu(x)dx$.

و سرانجام:

$$
\begin{aligned}
&P(T_S\geq t)=P(T_S\geq t|E_C(t))P(E_C(t)) \\
&=\exp\Big\{-\int_0^t p(x)\nu(x)dx\Big\} \\
&\times\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\overline{G}(k)^lG(k)^{n-l}\times P(M\geq l)\Big]\frac{m_q(t)^ne^{-m_q(t)}}{n!}
\end{aligned}
$$

٤ مدل‌های ضربه تأخیری

در فرایندهایی که در فصل‌های قبل در نظر می‌گرفتیم بلافاصله بعد از وقوع رخداد، شاهد تأثیر آن به روی سیستم بودیم. ولی اکنون فرض می‌کنیم وقتی رخدادی به وقوع می‌پیوندد با تأخیری تصادفی روی سیستم تأثیر می‌گذارد. اگر $\{N(t),t\geq 0\}$ نشان دهنده فرایند وقوع رخدادها و $T_1<T_2<\dots$ زمانهای ورود رخداد باشد و رخداد iام از این فرایند با تأخیر زمانی تصادفی D_i روی سیستم اثر بگذارد. بنابراین دنباله $\{T_i+D_i\}, i=1,2,\dots$ دیگر لزوماً ترتیبی نیست.

١.٤ مدل ضربه نهایی تأخیری

سیستمی را در نظر بگیرید که در معرض ضربه‌هایی است که بر طبق فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $\nu(t)$ وارد می‌شوند. اگر $T_1<T_2<\dots$ زمانهای ورود ضربه‌ها باشد، iامین ضربه با احتمال $q(T_i)$ برای سیستم بی‌ضرر است و با احتمال $p(T_i)$ شکست سیستم را به میزان تصادفی $D(T_i)$ به تأخیر می‌اندازد. $D(t)$ متغیر تصادفی نامنفی و شبه پیوسته است که برای هر t ثابت، در نقطه صفر جرم دارد یعنی این احتمال وجود دارد که میزان تأخیر صفر باشد و بلافاصله بعد از وقوع ضربه سیستم از کار بیفتد. اگر $D(t)$ برای هر t ثابت در نقطه صفر جرم نداشته باشد متغیری کاملاً پیوسته خواهد بود.

فرض کنید T_S طول عمر سیستم و $G(t,x)\equiv P(D(t)\leq x)$، $\overline{G}(t,x)=1-G(t,x)$ و $g(t,x)$ به ترتیب تابع توزیع، تابع بقا و تابع چگالی $D(t)$ باشند. برای هر $i=1,2,\dots$، J_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$
J_i=\begin{cases} 1 & \text{اگر } i\text{امین ضربه بی‌ضرر باشد.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}
$$

در صورتی سیستم تا زمان t زنده می‌ماند که ضربه‌های رخ داده بی ضرر باشد یا اگر بی‌ضرر نیست زمان شکست سیستم را تا بعد از زمان t به تعویق بیندازد. اگر $N(s),0\leq s\leq t$ و $J_1,J_2,\dots,J_{N(t)}$ و $D(T_1),D(T_2),\dots,D(T_{N(t)})$ معلوم باشند احتمال اینکه سیستم تا زمان t کار کند صفر یا یک است و به صورت زیر

محاسبه می‌شود:

$$P(T_S{>}t|N(s),0\leq s\leq t;D(T_1),...,D(T_{N(t)});J_1,...,J_{N(t)})$$
$$=\prod_{i=1}^{N(t)}\Big(J_i+(1-J_i)I(D(T_i)+T_i>t)\Big) \qquad (۱۵)$$

قبل از محاسبه تابع بقا در قالب یک قضیه، مفروضات زیر را که در مورد استقلال شرطی است، می‌پذیریم:

۱. اگر فرایند وقوع ضربه معلوم باشد، $D(T_i)$ها از هم مستقلند.

۲. اگر فرایند وقوع ضربه معلوم باشد، J_iها از هم مستقلند.

۳. اگر فرایند وقوع ضربه معلوم باشد، $\{D(T_i),i=1,2,...\}$ و $\{J_i,i=1,2,...\}$ از هم مستقلند.

قضیه ۱.٤. فرض کنید $m(t)=E(N(t)]=\int_0^t\nu(t)dt$ پیوسته و تابع $m^{-1}(t)$ وجود داشته باشد. اگر $\nu(+0)>0$. آنگاه تابع بقا و تابع نرخ شکست سیستم برابر است با:

$$P(T_S>t)=\exp\Big\{-\int_0^t G(x;t-x)p(x)\nu(x)dx\Big\}$$
$$\lambda_S(t)=\int_0^t g(x;t-x)p(x)\nu(x)dx$$
$$+G(t,0)p(t)\nu(t),\ t\geq 0.$$

اثبات. برای بدست آوردن تابع بقا از رابطه (۱۵) نسبت به J_iها و $D(T_i)$ها و N امید می‌گیریم. ابتدا با امید گرفتن نسبت به J_iها داریم:

$$P(T_S>t|N(s),0\leq s\leq t;D(T_1),D(T_2),...,D(T_{N(t)}))$$
$$=E\Big[\prod_{i=1}^{N(t)}\Big(J_i+(1-J_i)I(D(T_i)+T_i>t)\Big)\Big]$$
$$=\prod_{i=1}^{N(t)}\big[q(T_i)+I(D(T_i)+T_i>t)\times p(T_i)\big]$$

حال با امید گرفتن از این رابطه نسبت به $D(T_i)$ها داریم:

$$P(T_S>t|N(s),0\leq s\leq t)$$
$$=E\Big[\prod_{i=1}^{N(t)}\big(q(T_i)+I(D(T_i)+T_i>t)\times p(T_i)\big)\Big]$$
$$=\prod_{i=1}^{N(t)}\Big(q(T_i)+p(T_i)\times E[I(D(T_i)+T_i>t)]\Big)$$
$$=\prod_{i=1}^{N(t)}\big(q(T_i)+p(T_i)P(D(T_i)>t-T_i)$$
$$=\prod_{i=1}^{N(t)}\big(q(T_i)+p(T_i)\overline{G}(T_i,t-T_i)\big)$$

و سرانجام با امید گرفتن نسبت به N رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$P(T_S>t)=E[P(T_S>t|N(s),0\leq s\leq t)]$$
$$=E\Big[\prod_{i=1}^{N(t)}\big(q(T_i)+p(T_i)\overline{G}(T_i,t-T_i)\big)\Big]$$
$$=E\Big[E\Big[\prod_{i=1}^{N(t)}\big(q(T_i)+p(T_i)$$
$$\times\overline{G}(T_i,t-T_i)\big)\Big|N(t)\Big]\Big] \qquad (۱٦)$$

برای بدست آوردن

$$E\Big[\prod_{i=1}^{N(t)}\big(q(T_i)+p(T_i)\overline{G}(T_i,t-T_i)\big)\Big|N(t)\Big]$$

با توجه به نکات و جزئیات گفته شده در اثبات قضیه (۱.۲) داریم:

$$E\Big[\prod_{i=1}^{N(t)}\big(q(T_i)+p(T_i)\times\overline{G}(T_i,t-T_i)\big)\Big|N(t)\Big]$$
$$=E\Big[\prod_{i=1}^{N^*(s)}\big(q(m^{-1}(T_i^*))+p(m^{-1}(T_i^*))$$
$$\times\overline{G}(m^{-1}(T_i^*),t-m^{-1}(T_i^*))\big)\Big|N(t)\Big]$$

حال چون $T_1^*,T_2^*,...T_n^*|N^*(s)=n$ با $V_{(1)},V_{(2)},...,V_{(n)}$ یعنی آماره‌های ترتیبی نمونه تصادفی nتایی از توزیع یکنواخت در فاصله

$[0,m(t)]$ هم توزیع است، داریم:

$$\begin{aligned}
&E\Big[\prod_{i=1}^{N^*(s)}\big(q(m^{-1}(T_i^*))+p(m^{-1}(T_i^*))\\
&\qquad\times\overline{G}\big(m^{-1}(T_i^*),t-m^{-1}(T_i^*)\big)\big)\Big|N^*(s)=n\Big]\\
&=E\Big[\prod_{i=1}^{n}\big(q(m^{-1}(V_{(i)}))+p(m^{-1}(V_{(i)}))\\
&\qquad\times\overline{G}\big(m^{-1}(V_{(i)}),t-m^{-1}(V_{(i)})\big)\big)\Big]\\
&=E\Big[\prod_{i=1}^{n}\big(q(m^{-1}(V_i))+p(m^{-1}(V_i))\\
&\qquad\times\overline{G}\big(m^{-1}(V_i),t-m^{-1}(V_i)\big)\big)\Big]\\
&=\big(E\big[q(m^{-1}(V_1))+p(m^{-1}(V_1)\\
&\qquad\times\overline{G}\big(m^{-1}(V_1),t-m^{-1}(V_1)\big)\big]\big)^n\\
&=\big(E\big[q(m^{-1}(m(t)U))+p(m^{-1}(m(t)U))\\
&\qquad\times\overline{G}\big(m^{-1}(m(t)U),t-m^{-1}(m(t)U)\big)\big]\big)^n
\end{aligned}\qquad (۱۷)$$

که در آن $U=\frac{V_1}{m(t)}$ دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی صفر و یک است، بنابراین:

$$\begin{aligned}
&E\big[q(m^{-1}(m(t)U))+p(m^{-1}(m(t)U))\\
&\times\overline{G}\big(m^{-1}(m(t)U),t-m^{-1}(m(t)U)\big)\big]\\
&=\int_0^1 q(m^{-1}(m(t)u))+p(m^{-1}(m(t)u))\\
&\times\overline{G}\big(m^{-1}(m(t)u),t-m^{-1}(m(t)u)\big)du
\end{aligned}$$

با تغییر متغیر $x=m^{-1}(m(t)u)$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 q(m^{-1}(m(t)u))+p(m^{-1}(m(t)u))\\
&\times\overline{G}\big(m^{-1}(m(t)u),t-m^{-1}(m(t)u)\big)du\\
&=\int_0^t\big[q(x)+p(x)\overline{G}(x,t-x)\big]\frac{\nu(x)}{m(t)}dx
\end{aligned}\qquad (۱۸)$$

با توجه به روابط (۱۶) و (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$\begin{aligned}
&P(T_S>t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{m(t)}\int_0^t\big[q(x)+p(x)\\
&\times\overline{G}(x,t-x)\big]\nu(x)dx\Big)^n\frac{m(t)^n}{n!}e^{-m(t)}\\
&=e^{-m(t)}\exp\Big\{\int_0^t\big[q(x)+p(x)\overline{G}(x,t-x)\big]\nu(x)dx\Big\}\\
&=\exp\Big\{\int_0^t q(x)\nu(x)dx+\int_0^t\overline{G}(x,t-x)p(x)\nu(x)dx\\
&-\int_0^t\nu(x)dx\Big\}\\
&=\exp\Big\{-\int_0^t(1-q(x))\nu(x)dx\\
&+\int_0^t\overline{G}(x,t-x)p(x)\nu(x)dx\Big\}\\
&=\exp\Big\{-\int_0^t G(x,t-x)p(x)\nu(x)dx\Big\}.
\end{aligned}$$

پس تابع نرخ شکست سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned}
\lambda_S(t)=&\int_0^t g(x;t-x)p(x)\nu(x)dx\\
&+G(t,0)p(t)\nu(t),\ t\geq 0
\end{aligned}\qquad (۱۹)$$

□

۲.۴ مدل ضربه ترکیبی تأخیری

مدل ضربه ترکیبی را در نظر بگیرید که در آن مدل وقتی جمع فرسایش ناشی از ضربه‌ها از یک حد بگذرد سیستم شکست می‌خورد. در مدل‌های ضربه ترکیبی که در فصول قبل به آنها اشاره کردیم به محض ورود ضربه، سیستم فرسوده می‌شود ولی در این مدل فرسایش ناشی از وقوع هر ضربه کم کم روی سیستم اثر می‌گذارد یعنی با وقوع ضربه فرایند فرسایش آغاز می‌شود و هر چه زمان بگذرد به طور پیوسته میزان فرسایش بیشتر خواهد شد. میزان فرسایش تصادفی ناشی از ضربه‌ای که در زمان t رخ داده است، پس از گذشت u واحد زمانی بعد از وقوع ضربه را با $W(t,u)$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم برای هر $t\geq 0$، $W(t,0)\equiv 0$ و $W(t,u)$ نسبت به t و u از نظر تصادفی صعودی است. بنابراین جمع فرسایش‌های ناشی از ضربه‌های رخ داده در بازه $[0,t)$ برابر است با:

$$W(t)=\sum_{i=0}^{N(t)}W(T_i,t-T_i),$$

فرض کنید هر ضربه با احتمال $p(t)$ فوراً سیستم را از کار می‌اندازد و با احتمال $q(t)$ به روشی که در بالا گفتیم سیستم را فرسوده می‌کند و سیستم زمانی شکست می‌خورد که جمع فرسایش‌ها به مرز R برسد. می‌خواهیم توزیع زمان شکست سیستم را بدست آوریم. با توجه به نکاتی که در قسمت قبل گفتیم به شرط داشتن $N(s), 0 \leq s \leq t$ و $W(T_i, t-T_i),\ i=1,2,...,N(t)$ و R اگر $\sum_{i=0}^{N(t)} W(T_i, t-T_i) \leq R$ باشد، وقتی طول عمر سیستم از t بیشتر می‌شود که ضربه‌های رخداده سیستم را از کار انداخته نباشد. بنابراین تابع بقای شرطی طول عمر سیستم در این مدل برابر است با:

$$\begin{aligned} &P(T_S > t | N(s), 0 \leq s \leq t \\ &\quad ; W(T_i, t-T_i),\ i=1,2,...,N(t); R) \\ &= \prod_{i=0}^{N(t)} q(T_i) I\Big(\sum_{i=0}^{N(t)} W(T_i, t-T_i) \leq R\Big) \end{aligned} \tag{۲۰}$$

حال در قضیه زیر در حالتی که R دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است، تابع بقا و تابع نرخ شکست سیستم را بدست می‌آوریم:

قضیه ۲.۴. فرض کنید فرایند وقوع ضربه فرایند پواسون ناهمگن با نرخ $\nu(t)$ و $\nu(+0) > 0$ باشد. آنگاه:

$$P(T_S > t) = \exp\Big\{ -\int_0^t \nu(x)dx + \int_0^t M_{W(x,t-x)}(-\lambda) q(x)\nu(x)dx \Big\}$$

و تابع نرخ شکست منطبق با آن برابر است با:

$$\lambda_S(t) = p(t)\nu(t) - \int_0^t \frac{d}{dt}(M_{W(x,t-x)}(-\lambda)) q(x)\nu(x)dx$$

که در آن برای هر t و u ثابت، $M_{W(t,u)}(.)$ تابع مولد گشتاور $W(t,u)$ است.

اثبات. برای اثبات رجوع کنید به مقاله چا[۶] و فینکل اشتاین[۷] [۳]. □

۵ نتیجه گیری

در بخش‌های قبل با اضافه کردن شرایطی به مدل ضربه نهایی، مدل‌های جدیدی معرفی شد. با اضافه کردن شرایط دیگری مثل معالجه پذیر بودن سیستم به مدل، می‌توان مدل‌های جدیدتر و کلی‌تری بدست آورد. در تمامی مدل‌هایی که در این مقاله مطرح شد فرض بر این بود که ضربه‌ها طبق فرایند پواسون ناهمگن رخ می‌دهند. می‌توان این نتایج را به مواردی که ضربه‌ها بر طبق فرایندهای تصادفی دیگر رخ می‌دهند، تعمیم داد.

مراجع

[1] Cha, J. H. and Finkelstein, M. ,(2009). On a terminating shoch process with independent wear increments. *J. Appl. Prob.*, **44**, 506-513.

[2] Cha, J. H. and Finkelstein, M. ,(2011). On new classes of extreme shock models and sum generalizations. *J. Appl. Prob.*, **48**, 258-270.

[3] Cha, J. H. and Finkelstein, M. ,(2012). Stochastic survival models with events triggered by externak shocks. *Prpbability in the Engineering and Informational Sciences*, **26**, 183-195.

[4] Cinlar, E. ,(1975). *Introduction to stochastic processes*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.

[5] Ross, Sheldon. ,(1995). *Stochastic Processes*. John Wiley and sons, INC. New York.

[۶] Cha, J. H.

[۷] Finkelstein, M.