

ارائه چند خانواده از توزیع‌های پیوسته برای برآزش بهترین توزیع به داده‌های خشکسالی استان گیلان و بررسی دوره‌های خشکسالی در این استان

آنیثا عبداللهی نانواپیشه^۱

چکیده:

در این مقاله، پس از ارائه ویژگی‌های تعدادی از توزیع‌های پیوسته شامل توزیع‌های گاما، گامای کرولی، رایلی، وایبل، پارتو، نمایی و گامای تعمیم‌یافته، این توزیع‌ها بر روی داده‌های خشکسالی استان گیلان برآزش داده شدند و بهترین توزیع ارائه شد. سپس، شدت و تداوم دوره‌های خشکسالی مناطق مختلف با استفاده از شاخص بارش استاندارد بررسی شد

واژه‌های کلیدی: توزیع گاما، توزیع کرولی، توزیع رایلی، توزیع وایبل، توزیع پارتو، توزیع نمایی، توزیع گامای تعمیم‌یافته، شاخص بارش استاندارد.

۱ مقدمه

به‌طور کلی خشکسالی به یک دوره طولانی هوای خشک غیرمعمول و بدون بارندگی گفته می‌شود؛ یعنی خشکسالی عبارت است از یک دوره ممتد کمبود بارش که منجر به صدمه زدن محصولات زراعی و کاهش عملکرد می‌شود. در شرایط کنونی تغییرات آب‌وهوایی، بحث‌های زیادی در مورد ارتباط بین خشکسالی و گرم شدن کره زمین مطرح است. بر اساس نتیجه یکی از مطالعات انجام‌شده از سوی ناسا در سال‌های آینده، دما در جهان افزایش خواهد یافت. این به معنای آن است که در برخی نقاط جهان افزایش بارندگی و در بخش‌های دیگر نیز کاهش بارندگی را باید انتظار داشت؛ به عبارت دیگر کره زمین باد و پدیده خشکسالی و سیل مواجه خواهد شد. خشکسالی زمانی رخ می‌دهد که الگوهای آب‌وهوایی و چرخه آب دچار اختلال شود. تغییر در الگوهای جریان‌های جوی می‌تواند توفان‌ها را برای ماه‌ها و سال‌ها متوقف کند که در نتیجه روی میزان بارش معمول مناطق تاثیر می‌گذارد و موجب بروز خشکسالی یا وقوع سیل می‌شود. کمبود بارش می‌تواند برای مردم محلی مشکلاتی مانند خسارت به محصولات کشاورزی و کمبود آب آشامیدنی را در پی داشته باشد. این اثرات می‌تواند مشکلات اقتصادی و اجتماعی مانند قحطی، مهاجرت اجباری از مناطق خشک و تعارض بر سر منابع باقیمانده را به همراه بیاورد.

یکی از ارکان مهم و اساسی در مطالعات خشکسالی در هر

موضوع خشکسالی فکر هر انسانی را به جایی می‌برد که کویر و خشک است و تصور اینکه استانی سرسبز و پر بارش مانند گیلان به تشنگی رسیده باشد و در مرز خشکسالی قرار گیرد، بسیار سخت است، اما واقعیت موجود خلاف تصور را نشان می‌دهد. بارش‌های فراوان و پراکنده و روان آب‌ها و آب‌های سطحی و غیرسطحی، گیلان را همواره از خشکسالی دور نگاهداشته، اما مدیریت نادرست این آب‌ها و هدررفتن آن‌ها موجب شده تا این استان به دیگر استان‌های خشک کشور نزدیک شود.

خشکسالی پدیده‌ای طبیعی و پیچیده است و به سختی تعریف می‌شود. خشکسالی را نمی‌توان در یک عدد یا معادله خلاصه کرد؛ زیرا میزان متوسط بارش هر منطقه متفاوت است. تعیین زمان شروع پدیده خشکسالی بسیار مشکل است. برخلاف بسیاری از پدیده‌های طبیعی مانند زلزله، گردباد و توفان که ناگهانی رخ می‌دهد و نتیجه‌های سنگینی هم دارد، شروع پدیده خشکسالی تدریجی و آرام است. ممکن است چند هفته، چند ماه یا حتی چند سال زمان ببرد تا تاثیرات بلندمدت کاهش بارندگی نمایان شود. تعیین زمان پایان خشکسالی هم کار چندان راحتی نیست، درحالی که یک رگبار برای مدت کوتاه، خشکسالی را کاهش می‌دهد ممکن است چند هفته یا چند ماه زمان لازم باشد تا سطح بارش به حد نرمال برگردد.

منطقه تعیین شاخص‌هایی برای سنجش میزان شدت و تداوم دوره خشکسالی است. شاخص خشکسالی در واقع تابعی از عوامل مختلف محیطی است که بر پدیده خشکسالی اثر می‌گذارد. در نهایت حاصل فرایند تابع، یک عدد است که در ارزیابی خشکسالی‌ها و تصمیم‌گیری‌هایی آینده، به مراتب مفیدتر از ردیف‌های متعدد داده‌های مرتبط با خشکسالی عمل می‌کند. یکی از این شاخص‌های مهم مورد استفاده در مطالعات خشکسالی، شاخص استاندارد بارش می‌باشد. این شاخص برای اولین بار توسط مک‌کی و همکارانش در سال ۱۹۹۳ ارائه شد [۴]. محاسبه این شاخص تقریباً ساده بوده و نتایج آن از قابلیت اعتماد بالایی بویژه برای مطالعات منابع آب برخوردار است. شاخص SPI تنها بر مبنای استفاده از داده‌های بارندگی استوار است و می‌توان از آن برای هر مقیاس زمانی دلخواه استفاده نمود. این قابلیت امکانی را فراهم می‌نماید تا وضعیت منابع آب را برای دوره‌ها و تداوم‌های کوتاه‌مدت که در کشاورزی و مطالعه رطوبت قابل دسترس گیاه مناسب است و مقیاس‌های زمانی بلندمدت که در مطالعه جریان‌های رودخانه‌ای و مخازن آب زیرزمینی دارای اهمیت است، مورد مطالعه قرار داد. در واقع شاخص‌هایی که تنها بر پایه داده‌های بارندگی استوار می‌باشند در مقایسه با شاخص‌های پیچیده‌تر هیدرولوژیکی، نتیجه بهتری ارائه می‌دهند. مهمترین ویژگی شاخص SPI تعیین زمان آغاز و پایان خشکسالی و در نتیجه مدت آن در یک منطقه است.

در مقاله حاضر ابتدا به مقایسه چند خانواده از توزیع‌های پیوسته می‌پردازیم تا بهترین توزیع را برای برازش به داده‌های خشکسالی استان گیلان انتخاب نماییم. سپس شدت و تداوم دوره خشکسالی را با استفاده از شاخص بارش استاندارد (SPI) روی ایستگاه‌های انتخابی در استان گیلان بررسی می‌نماییم. برای این کار، ۴ ایستگاه سینوپتیک در استان گیلان را انتخاب نموده، دوره‌های خشکسالی را با استفاده از شاخص بارش استاندارد روی آن‌ها بررسی می‌کنیم. در این تحقیق دوره‌های آماری ۲۱ ساله بین سال‌های ۱۳۷۳-۱۳۷۲ تا ۱۳۹۱-۱۳۹۲ برای ایستگاه‌های انتخابی، مورد استفاده قرار گرفته است. هر چند وقوع خشکسالی‌ها نسبت به ترسالی‌ها در اغلب

ایستگاه‌ها از فراوانی بیشتری برخوردار بوده، با این حال هیچ روند خاص اقلیمی مبنی بر کاهش بارندگی در منطقه در سال‌های اخیر مشاهده نشده است و از نظر الگوی مکانی نیز وقوع خشکسالی‌ها و ترسالی‌ها از نظم خاصی تبعیت نکرده است. بنابراین در این تحقیق، هدف بررسی بهترین توزیع برای برازش به داده‌های خشکسالی و همچنین بررسی خشکسالی و ترسالی در مناطق مختلف استان گیلان با اقلیم متنوع می‌باشد. لذا در این مقاله وضعیت خشکسالی و ترسالی ایستگاه‌های مختلف استان با استفاده از شاخص SPI محاسبه گردید. همچنین به منظور بررسی شدت، مدت و فراوانی خشکسالی، طبقه‌بندی شدت و تداوم خشکسالی و ترسالی انجام گرفت.

۱.۱ موقعیت جغرافیایی منطقه و روش تحقیق

استان گیلان در شمالی‌ترین نقطه کشور ایران قرار دارد. این استان شامل ۱۲ ایستگاه سینوپتیک می‌باشد که در بین این چند ایستگاه، بعلت این‌که سال‌های تاسیس برخی از آن‌ها کمتر از ۱۰ سال و حتی در برخی موارد، کمتر نیز بود، ۴ ایستگاه فعال (ایستگاه‌های سینوپتیک رشت، انزلی، آستارا و منجیل) که سال تاسیس آن‌ها بالای ۲۱ سال بود در نظر گرفتیم. داده‌های مورد نیاز در این تحقیق شامل آمار بارش ماهانه این ۴ ایستگاه در سطح استان است که از سازمان هواشناسی گرفته شده است. موقعیت ایستگاه‌های نام‌برده در جدول ۱ ارائه شده است.

۲ انواع توزیع‌های تحت بررسی

۱.۲ توزیع گاما^۲

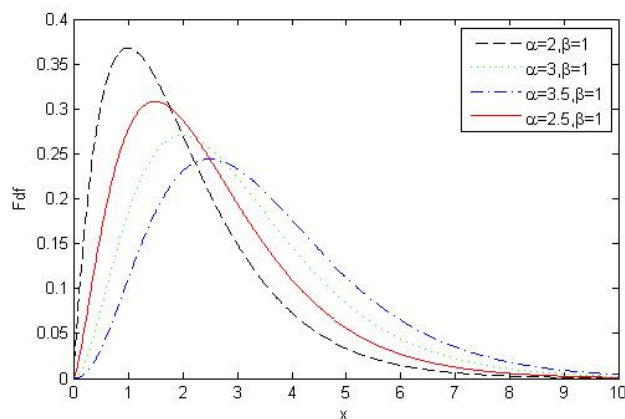
توزیع‌های گاما مدلی رایج در فرایندهای هیدرولوژیکی هستند. برای اطلاعات بیشتر مقالات [۵، ۶] را ببینید. کاربردهای دیگر این توزیع عبارتند از: مدل‌بندی طول عمر، قضیه شمارشگرهای تصادفی، مدل‌بندی داده‌های کشش درآمد، فرایندهای هواشناسی بارش و اکولوژی آماری.

^۲Gamma distribution

جدول ۱: ایستگاه‌های هواشناسی مورد استفاده در تحقیق

شماره ایستگاه	ایستگاه	طول جغرافیایی	عرض جغرافیایی	ارتفاع	تاریخ تأسیس
۱	رشت	۴۹° ۳۷'	۳۷° ۱۹'	-۸٫۶	۱۳۳۵
۲	انزلی	۴۹° ۲۷'	۳۷° ۲۹'	-۲۳٫۶	۱۳۳۰
۳	آستارا	۴۸° ۵۱'	۳۸° ۲۲'	-۲۱٫۱	۱۳۷۲
۴	منجیل	۴۹° ۲۵'	۳۶° ۴۴'	۳۳۸٫۳	۱۳۶۵

که ملاحظه می‌کنید با افزایش α این توزیع گرایش به توزیع نرمال دارد.



شکل ۱. تابع چگالی احتمال توزیع گاما برای $\beta = 1$ و α های مختلف

اگر X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع گاما با پارامترهای α و β باشند، در این صورت برآوردیاب درست‌نمایی ماکسیمم α و β به صورت زیر به دست می‌آیند

$$f(\underline{X}|\alpha, \beta) = L(\alpha, \beta|\underline{X}) \\ = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\beta}}$$

$$\ln \Gamma(\alpha, \beta|\underline{X}) = -n \ln \Gamma(\alpha) - n\alpha \ln \beta \\ + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln X_i - \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\beta}$$

با مشتق‌گیری از رابطه فوق برحسب α و β و صفر قرار دادن آن‌ها داریم

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\alpha}, \quad \frac{-n\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - n \ln \frac{\bar{X}}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln X_i = 0,$$

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{r,\lambda}(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad r > 0, \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

گوئیم X دارای توزیع گاما با پارامترهای r و λ است و آن را با نماد $X \sim \Gamma(r, \lambda)$ یا $X \sim G(r, \lambda)$ نشان می‌دهیم [۱]. حالت خاص $r = 1$ یعنی $\Gamma(1, \lambda)$ همان توزیع نمایی با پارامتر λ است. حالت خاص $r \in \mathbb{N}$ یعنی $\Gamma(r, \lambda)$ به توزیع ارلانگ^۲ معروف است (توزیع ارلانگ حالتی خاص از توزیع گاما است که پارامتر اول آن عدد صحیح و مثبت است) و حالت خاص $r = \frac{n}{\lambda}$ و $\lambda = \frac{1}{\lambda}$ یعنی $\Gamma(\frac{n}{\lambda}, \frac{1}{\lambda})$ به توزیع χ^2 با n درجه آزادی معروف است و معمولاً آن را با نماد $\chi^2(n)$ نمایش می‌دهند.

اگر $X \sim \Gamma(r, \lambda)$ آنگاه امید ریاضی، واریانس، ضریب تغییرات، ضریب چولگی و ضریب کشیدگی و تابع مولد گشتاور آن به صورت زیر است

$$E(X) = \frac{r}{\lambda}, \quad \text{var}(X) = \frac{r}{\lambda^2}, \quad \text{cv}(X) = \frac{1}{\sqrt{r}}, \\ \gamma_1(X) = \frac{2}{\sqrt{r}}, \quad \gamma_2(X) = \frac{6}{r}, \quad M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r, \quad t < \lambda$$

توزیع گاما، با پارامترهای α و β نیز تعریف می‌شود که در آن $\alpha = r$ و $\beta = \frac{1}{\lambda}$ است؛ یعنی گوئیم X توزیع گاما با پارامترهای α و β دارد و می‌نویسیم $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0,$$

تابع چگالی احتمال توزیع گاما برای $\beta = 1$ و α های مختلف شکل‌های متفاوتی دارد. شکل این تابع فقط وابسته به پارامتر α است که به آن پارامتر شکل گفته می‌شود. در زیر این تابع چگالی احتمال برای $\beta = 1$ و مقادیر مختلف α رسم شده است. همان‌طور

^۲Erlang distribution

که برای حل معادله فوق، به جداول مربوط به $\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ یا روش‌های

$$f_X(x) = \alpha^\gamma x \exp(-\alpha x), \quad (3)$$

$$f_Y(y) = \beta^\gamma y \exp(-\beta y) \quad (4)$$

آنالیز عددی نیاز داریم. آماره بسنده کامل برای خانواده گاما با پارامترهای α و β براساس یک نمونه تصادفی n تایی به صورت

$$T = \left(\prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

شکل ۲ تابع چگالی احتمال فرم‌های ۳ و ۴ را با در نظر گرفتن مقادیر مشخص از α و β با استفاده از یک برنامه نرم‌افزاری مناسب که در محیط متلب نوشته شده است نشان می‌دهد.

است. حال اگر X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع گاما با پارامترهای α و β باشند، آنگاه با فرض معلوم بودن پارامتر α ، $\frac{n\alpha-1}{T}$ برآورد UMVUE پارامتر β می‌باشد که $T = \sum_{i=1}^n X_i$ آماره بسنده کامل برای پارامتر β است.

با استفاده از توزیع‌های X و Y و با استفاده از لم ۱، امید ریاضی و کواریانس X و Y به صورت زیر به دست می‌آیند

$$E[x] = \int_0^{\infty} x \alpha^\gamma x e^{-\alpha x} dx = \int_0^{\infty} x^\gamma \alpha^\gamma e^{-\alpha x} dx = \frac{\gamma}{\alpha},$$

$$E[y] = \int_0^{\infty} y \beta^\gamma y e^{-\beta y} dy = \int_0^{\infty} y^\gamma \beta^\gamma e^{-\beta y} dy = \frac{\gamma}{\beta},$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \alpha\beta \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xy \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)] dy dx \\ &\quad + \alpha\beta \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xy \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta y)] dx dy \\ &= \frac{5}{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

$$\text{cov}[x, y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{\alpha\beta},$$

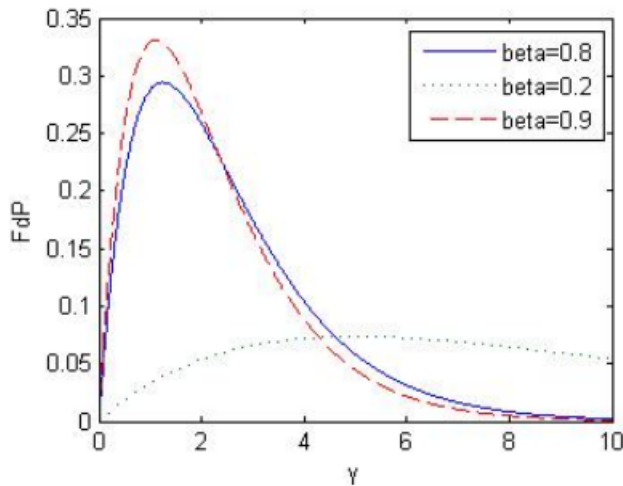
۲.۲ توزیع گامای کرولی^۴

در بین همه مدل‌های گامای دو متغیره ارائه شده، یک مدل ساده و انعطاف‌پذیر، مدل کرولی است $[Y]$ ، که تابع چگالی احتمال توام X و Y توسط او به صورت زیر ارائه شده است

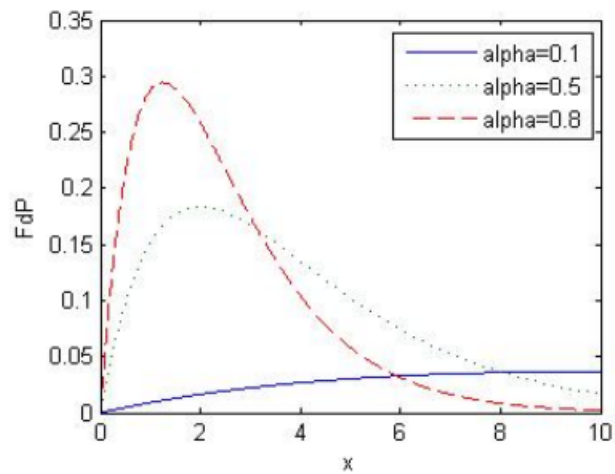
$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha\beta \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)], & 0 \leq \alpha x \leq \beta y \\ \alpha\beta \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta y)], & 0 \leq \beta y \leq \alpha x \end{cases} \quad (2)$$

که x, y, α و β همگی مثبت هستند.

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمالی به فرم معادله ۲ باشند، در این صورت توزیع حاشیه‌ای آن‌ها به ترتیب



(ب)



(الف)

شکل ۲. تابع چگالی احتمال (الف) $f_X(x)$ به ازای $\alpha = 0.1, 0.5, 0.8$ و (ب) $f_Y(y)$ به ازای $\beta = 0.8, 0.2, 0.9$

و به همین ترتیب $E[X^2]$ ، $E[Y^2]$ ، $Var[X]$ و $Var[Y]$ فرض کنید $X \sim \text{Gamma}(\gamma, \alpha)$ و $Y \sim \text{Gamma}(\gamma, \beta)$ یک نمونه n تایی به صورت $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ از (X, Y) داشته باشیم، در این صورت برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم برای α و β به صورت زیر می‌باشد

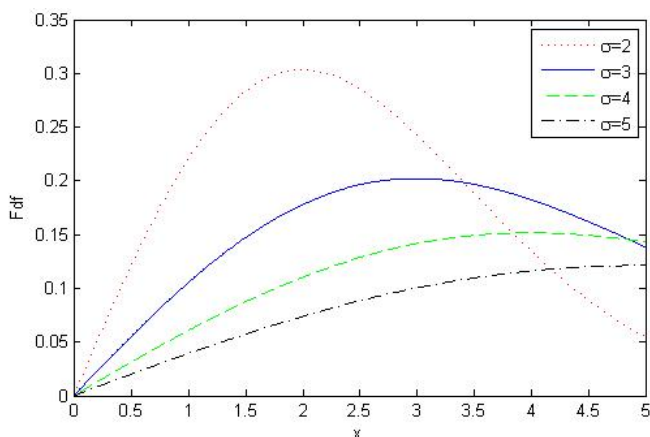
$$\hat{\alpha} = \frac{\gamma n}{\sum_{i=1}^n x_i}, \quad \hat{\beta} = \frac{\gamma n}{\sum_{i=1}^n y_i}.$$

۳.۲ توزیع رایلی^۵

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0, \quad \sigma > 0, \quad (5)$$

گوئیم X دارای توزیع رایلی با پارامتر σ است و آنرا با نماد $R(\sigma)$ نمایش می‌دهیم [۱]. تابع چگالی احتمال توزیع رایلی برای σ های مختلف در زیر ترسیم شده است.



شکل ۳. تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ به ازای $\sigma = 2, 3, 4, 5$.

اگر $X \sim R(\sigma)$ ، آنگاه داریم

$$E(X) = \sigma\sqrt{\pi/2}, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2(4 - \pi)/2,$$

$$\text{Cv}(X) = \frac{\sqrt{\sigma^2(4 - \pi)/2}}{\sigma\sqrt{\pi/2}}, \quad \gamma_1(X) = 2(\pi - 3)\sqrt{\pi}/(4 - \pi)^{3/2},$$

$$\gamma_2(X) = (32 - 3\pi^2)/(4 - \pi)^2$$

فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع رایلی با پارامتر σ باشند. برآوردیاب درست‌نمایی ماکسیمم σ به صورت زیر است

$$\hat{\sigma} = \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{1/2}.$$

^۵Rayleigh distribution

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \alpha^\gamma x e^{-\alpha x} dx = \int_0^{\infty} x^3 \alpha^\gamma e^{-\alpha x} dx = \frac{6}{\alpha^3},$$

$$E[Y^2] = \int_0^{\infty} y^2 \beta^\gamma y e^{-\beta y} dy = \int_0^{\infty} y^3 \beta^\gamma e^{-\beta y} dy = \frac{6}{\beta^3},$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{6}{\alpha^3} - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 = \frac{2}{\alpha^3},$$

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E^2[Y] = \frac{6}{\beta^3} - \left(\frac{2}{\beta}\right)^2 = \frac{2}{\beta^3},$$

و ضریب همبستگی آن به صورت زیر است

$$\rho = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}} = \frac{\frac{1}{\alpha\beta}}{\sqrt{\frac{2}{\alpha^3}}\sqrt{\frac{2}{\beta^3}}} = \frac{1}{2},$$

و به همین ترتیب ضریب تغییرات و تابع مولد گشتاور X و Y به صورت زیر است

$$\text{Cv}[X] = \text{Cv}[Y] = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\alpha^3}}}{\frac{2}{\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$M_X[t] = E[e^{tx}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \alpha^\gamma x e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha^\gamma}{(t - \alpha)^\gamma},$$

$$M_Y[t] = E[e^{tY}] = \int_0^{\infty} e^{tY} \beta^\gamma Y e^{-\beta Y} dY = \frac{\beta^\gamma}{(t - \beta)^\gamma},$$

ضریب چولگی و ضریب برجستگی X به ترتیب $\gamma_2[X]$ و $\gamma_1[X]$ به صورت زیر است

$$\gamma_1[X] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(X - \mu_x)^3}{\sigma^3}$$

$$= \frac{1}{\sigma^3} \int_0^{\infty} (X - \mu_x)^3 \alpha^\gamma x e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma_2[X] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(X - \mu_x)^4}{\sigma^4} - 3$$

$$= \frac{1}{\sigma^4} \int_0^{\infty} (X - \mu_x)^4 \alpha^\gamma x e^{-\alpha x} dx - 3 = 3.$$

به طریق مشابه، ضریب چولگی و ضریب برجستگی Y ، $\gamma_1[Y]$ و $\gamma_2[Y]$ به صورت زیر است

$$\gamma_1[Y] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(y - \mu_y)^3}{\sigma^3} = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma_2[Y] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(y - \mu_y)^4}{\sigma^4} - 3 = 3,$$

برآورد درست‌نمایی ماکسیمم توزیع وایبل به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$f(\underline{X}|\alpha, \lambda) = L(\alpha, \lambda|\underline{X}) = (\alpha)^n \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{\alpha-1} e^{-\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^\alpha}$$

و $T = \sum_{i=1}^n X_i^2$ یک آماره بسنده کامل است. حال اگر X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع رایلی با پارامتر σ باشند در این صورت برآورد UMVUE پارامتر σ $\frac{\sqrt{T}\Gamma(n)}{\sqrt{2}\Gamma(n+\frac{1}{2})}$ می‌باشد که $T = \sum_{i=1}^n X_i^2$ آماره بسنده کامل برای پارامتر σ است.

$$\ln L(\alpha, \lambda|\underline{X}) = n \ln(\alpha\lambda) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln X_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^\alpha$$

با مشتق‌گیری از رابطه فوق بر حسب α و صفر قرار دادن آن‌ها و حل معادلات حاصل از آن‌ها، برآورد پارامترها به دست می‌آیند ولی از آنجایی که حل معادلات به منظور محاسبه برآورد پارامترها دشوار است، بنابراین این کار توسط نرم‌افزار و به وسیله روش‌های حل عددی، به ویژه نیوتن رافسون صورت می‌گیرد.

۵.۲ توزیع پارتو^۷

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq \beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (۷)$$

گوئیم X دارای توزیع پارتو با پارامترهای α و β است و آن را با نماد $X \sim Pa(\alpha, \beta)$ نمایش می‌دهیم [۱]. اگر $X \sim Pa(\alpha, \beta)$ باشد آن‌گاه داریم

$$E(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \quad \alpha > 2,$$

$$\text{Cv}(X) = \left\{ \frac{1}{\alpha(\alpha-2)} \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad \alpha > 2,$$

$$\gamma_1(X) = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha-3} \sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}}; \quad \alpha > 3,$$

$$\gamma_2(X) = \frac{6(\alpha^3 + \alpha^2 - 6\alpha - 2)}{\alpha(\alpha-3)(\alpha-4)}; \quad \alpha > 4$$

تابع چگالی احتمال توزیع پارتو برای مقادیر مختلف α و β در زیر ترسیم شده است.

۴.۲ توزیع وایبل^۶

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \quad (۶)$$

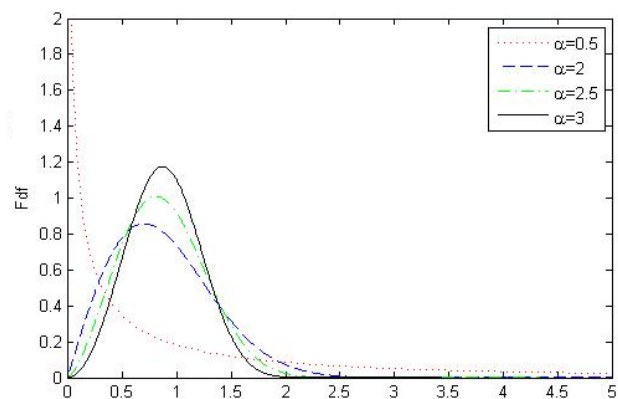
گوئیم X دارای توزیع وایبل با پارامترهای λ و r است و آن را با نماد $X \sim W(\alpha, \lambda)$ نشان می‌دهیم [۱]. حالت خاص $\alpha = 2$ یعنی $W(2, \lambda)$ به توزیع رایلی معروف است. حالت خاص $\alpha = 1$ یعنی $W(1, \lambda)$ همان توزیع نمایی با پارامتر λ است. اگر $X \sim W(\alpha, \lambda)$ باشد در این صورت داریم

$$E(X) = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})}{\frac{1}{\alpha}}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\alpha})}{\frac{2}{\alpha}}$$

$$\gamma_1(X) = \frac{\Gamma(1 + \frac{3}{\alpha}) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}, \quad \gamma_2(X) = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

$$\text{Cv}(X) = \left\{ \frac{\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha})}{\Gamma^2(1 + \frac{1}{\alpha})} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

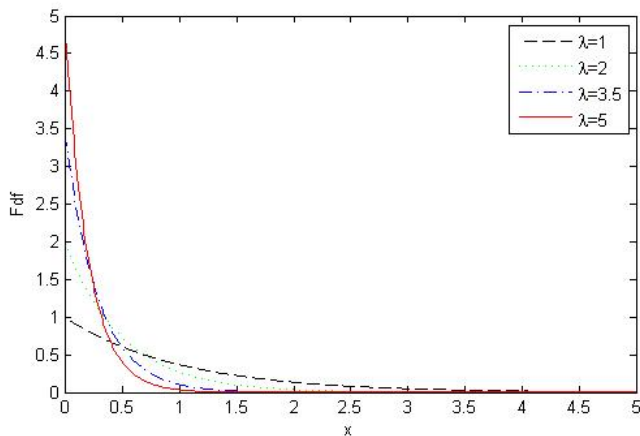
تابع چگالی احتمال توزیع وایبل برای α های مختلف و $\lambda = 1$ در زیر ترسیم شده است.



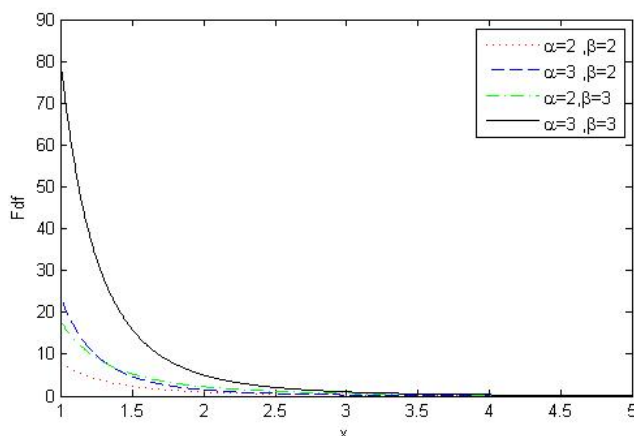
شکل ۴. تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ به ازای $\alpha = 0.5, 2, 2.5, 3$ و $\lambda = 1$.

^۶Weibull distribution

^۷Pareto distribution



شکل ۶. تابع چگالی احتمال نمایی برای مقادیر مختلف λ



شکل ۵. تابع چگالی احتمال پارتو برای مقادیر مختلف α و β

به سادگی ثابت می شود که میانگین، واریانس، ضریب تغییرات، ضریب چولگی (معیاری برای اندازه میزان انحراف از تقارن توزیع) و ضریب برجستگی (معیاری برای اندازه میزان برجستگی توزیع فراوانی) و تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی به صورت زیر است

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \text{Cv}(X) = 1, \quad \gamma_1(X) = 2, \\ \gamma_2(X) = 6, \quad M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right), \quad t < \lambda$$

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\mu, \sigma}(X) = \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)/\sigma}, \quad x \geq \mu, \quad \mu \in (-\infty, \infty), \quad \sigma > 0,$$

گوییم X دارای توزیع نمایی با پارامترهای μ و σ است و آن را با نماد $E(\mu, \sigma)$ نشان می دهیم.

بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\mu, \sigma)$ ، $T = \left(X_{(1)}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)}) \right)$ یک آماره بسنده توام کامل برای (μ, σ) است و برآوردیاب درستنمایی ماکسیم پارامترها به صورت زیر است

$$\hat{\mu} = X_{(1)}, \quad \hat{\sigma} = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)}) = \bar{X} - X_{(1)}$$

که منظور از $X_{(1)}$ کوچک ترین آماره ترتیبی؛ یعنی $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ است.

حال اگر X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $E(\mu, \sigma)$ باشند آنگاه برآورد UMVUE پارامتر μ ، $X_{(1)} - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})}{n(n-1)}$ و برآورد UMVUE پارامتر σ ، $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})}{n-1}$ می باشد.

[^]Exponential distribution

برآورد درستنمایی ماکسیمم توزیع پارتو به صورت زیر محاسبه

می شود

$$f(\underline{X}|\alpha, \beta) = L(\alpha, \beta|\underline{X}) = (\alpha\beta^\alpha)^n \left(\prod_{i=1}^n X_i^{\alpha+1} \right)^{-1},$$

$$\ln L(\alpha, \beta|\underline{X}) = n \ln(\alpha\beta^\alpha) - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln X_i.$$

با مشتق گیری از رابطه فوق بر حسب α و β و صفر قرار دادن آن ها و حل معادلات حاصل از آن ها، برآورد پارامترها به دست می آیند.

۶.۲ توزیع نمایی[^]

متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(X) = \lambda e^{-\lambda x}$ که $0 < x < \infty$ و برای هر $\lambda > 0$ متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ است [۱]. تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر است

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0. \quad (8)$$

شکل تابع چگالی احتمال توزیع نمایی تنها وابسته به پارامتر λ است که در نمودارهای زیر این تابع چگالی برای مقادیر مختلف λ نشان داده شده است. در تمامی موارد، این نمودارها برای λ های مختلف سیری نزولی دارند.

۷.۲ توزیع گامای تعمیم یافته^۹

• اگر $0 < \alpha < 1$ باشد در این صورت f به طور یکنواخت کاهش می‌یابد با $f(0) = \infty$ و $f(\infty) = 0$.

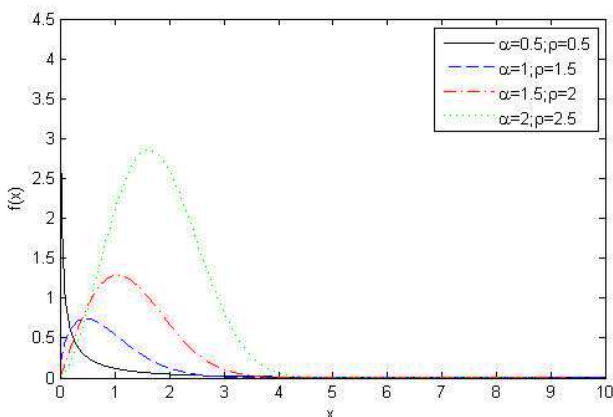
• اگر $\alpha > 1$ باشد در این صورت f یک مد در نقطه $x = x$ دارد و f برای همه مقادیر $x \leq x$ افزایش و برای همه مقادیر $x > x$ کاهش می‌یابد. علاوه بر این $f(0) = 0$ و $f(\infty) = 0$.

$$\frac{\alpha - 1}{x} - \frac{\rho}{x + z} = \lambda.$$

• اگر $\alpha = 1$ باشد و $\rho \geq 0$ یا $-\lambda z < \rho < 0$ باشد در این صورت f به طور یکنواخت کاهش می‌یابد و $f(0) = 0$ و $f(\infty) = 0$.

• اگر $\alpha = 1$ باشد و $\rho < -\lambda z$ باشد در این صورت f یک مد در نقطه $x = -(\rho + \lambda z) / \lambda$ دارد و f برای همه مقادیر $x \leq x$ افزایشی است و برای همه مقادیر $x > x$ کاهشی است. علاوه بر این $f(0) = 0$ و $f(\infty) = 0$.

توجه کنید که برخلاف تابع چگالی احتمال گامای استاندارد، f می‌تواند به شکل تکنمایی، زمانی که $\alpha = 1$ است نمایش داده شود. شکل زیر تعدادی از حالت‌های ممکن از تابع چگالی احتمال توزیع گامای تعمیم یافته را برای مقادیر انتخابی از (α, ρ) و $\lambda = z = 1$ نشان می‌دهد.



شکل ۷. تابع چگالی احتمال توزیع گامای تعمیم یافته رابطه (۹) برای مقادیر انتخابی از (α, ρ) و $\lambda = z = 1$.

در این قسمت برآوردهایی از پارامترهای رابطه ۹ را با استفاده از روش درست‌نمایی ماکسیمم ارائه می‌کنیم. برای یک نمونه

همان‌طور که بیان نمودیم توزیع گاما مدلی رایج در فرایندهای هیدرولوژیکی است. در سال‌های اخیر تلاش‌های بسیاری برای ارائه تعمیمی از توزیع گاما شده است که چندین مقاله در این زمینه موجودند [۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳]. از ویژگی خاص این تعمیم اینست که برخلاف سایر توزیع‌ها متغیرهایی که محدود به مقادیر مثبت هستند (به عنوان مثال، شدت خشکسالی وقتی که خشکسالی وجود دارد، مقدار برف زمانی که بارش برف وجود دارد، مقدار بارندگی زمانی که باران می‌بارد و ...) را ارائه می‌دهد.

گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع گامای تعمیم یافته است هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = cx^{\alpha-1}(x+z)^{-\rho} \exp(-\lambda x), \quad x > 0 \quad (9)$$

که $C = C(\alpha, \lambda, z, \rho)$ نشان‌دهنده ثابت نرمال‌سازی می‌باشد. این توزیع جدید، توزیع گامای تعمیم یافته (GG) نامیده می‌شود [۱۴]. حدود پارامترها به صورت $\alpha > 0, \lambda > 0, z > 0$ و $-\infty < \rho < +\infty$ می‌باشد. توجه کنید که اگر $\alpha = 1$ باشد در این صورت عامل $(x+z)^{-\rho}$ نشان‌دهنده اینست که توزیعی داریم که محدود به $z > 0$ است. همچنین

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}(x+z)^{-\rho} \exp(-x) dx = z^{\alpha-\rho} \Gamma(\alpha) \psi(\alpha, \alpha+1-\rho; z)$$

که

$$\psi(a, b; u) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (1+t)^{b-\alpha-1} \exp(-ut) dt$$

بنابراین ثابت نرمال‌سازی C به صورت زیر است

$$\frac{1}{C(\alpha, z, \rho)} = z^{\alpha-\rho} \Gamma(\alpha) \psi(\alpha, \alpha+1-\rho; z) \quad (10)$$

توزیع GG در رابطه ۹ بسیار انعطاف‌پذیر است. توزیع گامای تعمیم یافته زمانی که $\rho = 0$ باشد به توزیع گامای استاندارد و زمانی که $\alpha = 1$ و $\rho = 0$ باشد به توزیع نمایی تبدیل می‌شود. شکل تابع چگالی احتمال رابطه ۹ در مسائل عملی (به ویژه در علوم هیدرولوژیکی) کاربرد دارد. آیا این توزیع دارای مد است؟ اگر چنین است چند مد دارد؟ آیا دارای ماکسیمم یا مینیوم است؟ نقاط ماکسیمم و مینیوم آن کجاست؟

محاسبات نشان می‌دهد که تابع چگالی این مدل می‌تواند به شکل‌های زیر نمایش داده شود:

^۹Generalized Gamma distribution

۳ کاربرد تصادفی x_1, x_2, \dots, x_n از رابطه ۹ لگاریتم درست‌نمایی به صورت

زیر است

$$\log L(\alpha, \lambda, z, \rho) = -n \log k + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i - \rho \sum_{i=1}^n \log(x_i + z) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i, \quad (11)$$

که $k = k(\alpha, \lambda, z, \rho) = z^{\alpha-\rho} \Gamma(\alpha) \psi(\alpha, \alpha + 1 - \rho; \lambda z)$ مشتقات مرتبه اول از رابطه ۱۱ برای چهار پارامتر، به ترتیب به صورت زیر است

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = -\frac{n}{k} \frac{\partial k}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^n \log x_i, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \rho} = -\frac{n}{k} \frac{\partial k}{\partial \rho} - \sum_{i=1}^n \log(x_i + z), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial z} = -\frac{n}{k} \frac{\partial k}{\partial z} - \rho \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + z}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = -\frac{n}{k} \frac{\partial k}{\partial \lambda} - \sum_{i=1}^n \log(x_i + z). \quad (15)$$

با توجه به رابطه ۱۰ متوجه می‌شویم که ثابت C شامل تابع کومر و محاسبات عددی برای حل این تابع است که در مقالات موجودند. معادلات ۱۱ تا ۱۵ را می‌توان به‌طور همزمان برای محاسبه برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم از چهار پارامتر حل کرد. برای برآورد فاصله‌ای از پارامترهای $(\alpha, \lambda, z, \rho)$ و آزمون فرض، نیاز به ماتریس اطلاع فیشر است. مشتقات مرتبه دوم از رابطه (۱۲) برای چهار پارامتر به ترتیب به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = -\frac{n}{k} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{n}{k^2} \frac{\partial k}{\partial \theta_i} \frac{\partial k}{\partial \theta_j}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial z^2} = -\frac{n}{k} \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} + \frac{n}{k^2} \left(\frac{\partial k}{\partial z} \right)^2 + \rho \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i + z)^2},$$

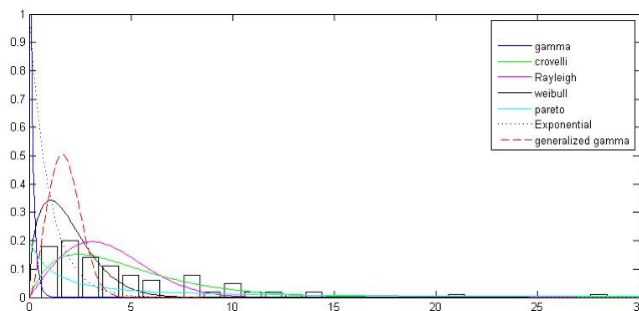
$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial z \partial \rho} = -\frac{n}{k} \frac{\partial^2 k}{\partial z \partial \rho} + \frac{n}{k^2} \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial k}{\partial \rho} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + z}.$$

بنابراین مولفه‌های ماتریس اطلاع فیشر با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شوند

$$E \left[\frac{1}{(X+z)^m} \right] = \frac{1}{z^m} \frac{\psi(\alpha, \alpha + 1 - \rho - m; \lambda z)}{\psi(\alpha, \alpha + 1 - \rho; \lambda z)}.$$

در این بخش به بررسی این موضوع خواهیم پرداخت که کدام توزیع برای برازش به داده‌های خشکسالی استان گیلان مناسب‌تر است. برای این کار، داده‌های خشکسالی ایستگاه هواشناسی رشت را که از پراکنش مناسبی برخوردار بوده‌اند در نظر گرفته و موضوع مورد نظر را روی آن بررسی نمودیم.

با استفاده از رسم نمودار ستونی داده‌های خشکسالی ایستگاه هواشناسی رشت، در محیط نرم‌افزار متلب و همچنین رسم نمودار تابع چگالی احتمال توزیع‌های نام‌برده، همانطور که در شکل مشخص است، مدل گامای کرولی نسبت به سایر مدل‌های ارائه شده، برازش بهتری را روی داده‌های خشکسالی نشان می‌دهد.



شکل ۸. مقایسه تابع چگالی احتمال توزیع‌های ارائه شده جهت یافتن بهترین توزیع برای برازش به داده‌های خشکسالی

جهت بررسی نیکویی برازش توزیع‌های مختلف آماری با توزیع داده‌های مشاهداتی، از آزمون ks (کلموگروف-اسمیرنوف) استفاده گردید. فرض صفر در این آزمون اینست که بین توزیع تئوری و تجربی داده‌ها اختلاف معنی‌داری وجود ندارد. با انتخاب فرض صفر و یک سطح اعتماد (α) ، برای هر یک از مشاهدات، مقادیر تخمین زده شده از توزیع‌های تئوری و تجربی را به دست آورده و قدرمطلق حداکثر تفاوت (D_{\max}) را با مقدار بحرانی (D) مقایسه می‌کنیم، اگر (D_{\max}) کوچکتر از D باشد فرض صفر صحیح بوده و بین داده‌ها و توزیع تئوری تفاوت معنی‌داری وجود ندارد [۲]. در جدول ۲، MLE داده‌ها و آزمون کلموگروف-اسمیرنوف برای داده‌های خشکسالی ایستگاه هواشناسی رشت ارائه شده‌اند.

مختلفی به منظور بررسی این موضوع از طرف محققان ارائه شده است. در بین همه شاخص‌های ارائه شده، شاخص SPI به نسبت هدف مورد نظر از دیگر شاخص‌ها مناسب‌تر می‌باشد [۴]. این شاخص یک ابزار قوی در آنالیز داده‌های بارندگی می‌باشد. هدف SPI اختصاص ارزش عددی به بارندگی می‌باشد تا بتوان نواحی با آب و هوای کاملاً متفاوت را مقایسه نمود. مقادیر مثبت SPI، بارندگی بیشتر از بارش متوسط و مقادیر منفی آن، بارندگی کمتر از بارش متوسط را نشان می‌دهد. یک خشکسالی زمانی اتفاق می‌افتد که نمایه بارش استاندارد منفی تداوم داشته باشد و همچنین وقوع یک خشکسالی زمانی شدید است که نمایه بارش استاندارد ۱- یا کمتر از آن برسد و در صورتی که SPI مثبت شود، رخداد خشکسالی به پایان خواهد رسید. جهت محاسبه SPI از فرمول زیر استفاده می‌شود

$$SPI = \frac{p_i - \bar{p}}{s} \quad (16)$$

که SPI شاخص بارندگی استاندارد، p_i بارش سال مورد نظر، \bar{p} میانگین بلندمدت بارندگی و s انحراف معیار بلندمدت بارندگی است. حدود طبقات وضعیت رطوبتی بر اساس این نمایه در جدول ۳ ارائه شده است [۳].

توزیع	MLEs	$k-s$
گامای کرولی	$\hat{\alpha} = 0.831, \hat{\beta} = 0.414$	0.1132
رایلی	$\hat{\sigma} = 3.09$	0.1774
وایبل	$\hat{\alpha} = 0.623, \hat{\beta} = 0.312$	0.3736
نمایی	$\hat{\lambda} = 1$	0.4180
پارتو	$\hat{\alpha} = 0.317, \hat{\beta} = 0.223$	0.6073
گامای تعمیم‌یافته	$\hat{\alpha} = 0.602, \hat{\rho} = 0.301$	0.6697
	$(c = \lambda = z = 1)$	
گاما	$\hat{\alpha} = 0.437, \hat{\beta} = 0.214$	0.9909

با استفاده از این آزمون نیز، در بین تمامی توزیع‌های ارائه شده، مدل گامای کرولی بهترین برازش را برای داده‌های خشکسالی فراهم می‌کند.

۴ نمایه بارش استاندارد شده (SPI)

از آنجایی که در مطالعات خشکسالی و ترسالی در هر منطقه، ابتدا نیاز به کمی نمودن این پدیده است، لذا در این راستا شاخص‌های

جدول ۳: طبقه‌بندی وضعیت رطوبتی بر اساس نمایه بارش استاندارد شده SPI

مقادیر SPI	طبقه‌بندی خشکسالی	فراوانی تجمعی (درصد)
۲ یا بیشتر	ترسالی بسیار شدید	> 97.7
۱.۵۰ تا ۱.۹۹	ترسالی شدید	۹۳.۳ تا ۹۷.۷
۱.۰۰ تا ۱.۴۹	ترسالی ملایم تا متوسط	۸۴ تا ۹۳.۲
۰.۹۹- تا ۰.۹۹۰	نرمال	۱۶ تا ۸۳.۹
۱- تا ۱.۴۹-	خشکسالی ملایم تا متوسط	۶.۸ تا ۱۵.۹
۱.۹۹- تا ۱.۵۰-	خشکسالی شدید	۲.۳ تا ۶.۷
۲- یا کمتر	خشکسالی بسیار شدید	< 2.3

در جداول ۷-۴ زیر فراوانی وقوع هر یک از شرایط رطوبتی در دریاچه‌های منتخب استان گیلان ارائه شده است. در شکل ۹ تعداد وقوع وضعیت‌های رطوبتی ایستگاه‌های استان گیلان مقایسه شده‌اند. در شکل ۱۰، نمودارهای تغییرات شاخص SPI در مقیاس‌های ۹، ۱۲ و ۲۴ ماهه در ایستگاه‌های منتخب نمایش داده شده‌اند که با استفاده از آن‌ها می‌توان به وضعیت رطوبتی یک ناحیه، طی سال‌های مختلف پی برد.

جدول ۴: فراوانی وقوع هر یک از وضعیت‌های رطوبتی ماهانه در ایستگاه رشت

وضعیت رطوبتی	دوره زمانی	ترسالی	ترسالی	ترسالی	تقریباً	خشکسالی	خشکسالی	خشکسالی
		بسیار شدید	شدید	متوسط	نرمال	متوسط	شدید	بسیار شدید
فروردین	۷	۰	۰	۳	۱	۲	۸	
اردیبهشت	۸	۰	۱	۱	۰	۲	۹	
خرداد	۷	۰	۱	۴	۰	۰	۹	
تیر	۶	۰	۰	۲	۲	۱	۱۰	
مرداد	۸	۰	۰	۲	۰	۲	۹	
شهریور	۸	۱	۱	۱	۱	۰	۹	
مهر	۷	۱	۰	۳	۱	۲	۷	
آبان	۷	۰	۲	۱	۱	۲	۸	
آذر	۷	۰	۰	۵	۲	۲	۵	
دی	۹	۰	۰	۱	۳	۰	۸	
بهمن	۳	۱	۱	۷	۲	۰	۷	
اسفند	۹	۰	۰	۲	۰	۲	۸	

جدول ۵: فراوانی وقوع هر یک از وضعیت‌های رطوبتی ماهانه در ایستگاه انزلی

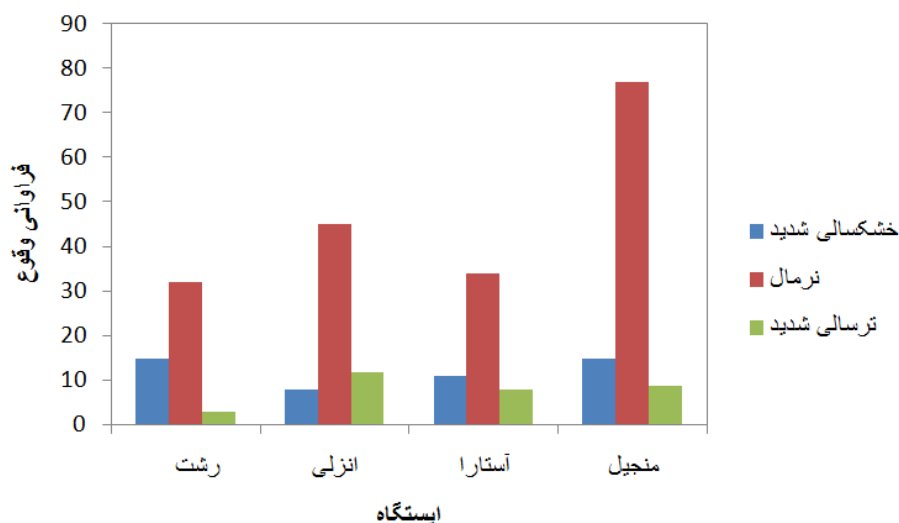
وضعیت رطوبتی	دوره زمانی	ترسالی	ترسالی	ترسالی	تقریباً	خشکسالی	خشکسالی	خشکسالی
		بسیار شدید	شدید	متوسط	نرمال	متوسط	شدید	بسیار شدید
فروردین	۶	۰	۰	۵	۲	۱	۷	
اردیبهشت	۵	۲	۱	۴	۰	۱	۸	
خرداد	۸	۰	۱	۳	۱	۰	۸	
تیر	۶	۱	۱	۲	۲	۰	۹	
مرداد	۵	۰	۲	۳	۰	۱	۱۰	
شهریور	۸	۰	۱	۳	۱	۰	۸	
مهر	۱۰	۰	۰	۳	۱	۰	۷	
آبان	۶	۱	۰	۶	۰	۱	۷	
آذر	۳	۶	۰	۶	۱	۰	۵	
دی	۶	۱	۱	۲	۰	۲	۹	
بهمن	۵	۱	۱	۵	۱	۲	۶	
اسفند	۸	۰	۰	۳	۱	۰	۹	

جدول ۶: فراوانی وقوع هر یک از وضعیت‌های رطوبتی ماهانه در ایستگاه آستارا

وضعیت رطوبتی	ترسالی بسیار شدید	ترسالی شدید	ترسالی متوسط	تقریباً نرمال	خشکسالی متوسط	خشکسالی شدید	خشکسالی بسیار شدید	دوره زمانی
								فروردین
اردیبهشت	۶	۰	۱	۲	۱	۲	۹	
خرداد	۶	۱	۱	۱	۲	۱	۹	
تیر	۶	۰	۰	۳	۱	۱	۱۰	
مرداد	۷	۱	۱	۲	۱	۰	۹	
شهریور	۶	۲	۲	۴	۰	۱	۶	
مهر	۵	۰	۱	۶	۰	۱	۸	
آبان	۷	۱	۱	۳	۰	۰	۹	
آذر	۵	۱	۰	۳	۲	۲	۸	
دی	۹	۰	۱	۱	۲	۱	۷	
بهمن	۶	۱	۱	۴	۰	۱	۸	
اسفند	۷	۱	۱	۲	۰	۱	۸	

جدول ۷: فراوانی وقوع هر یک از وضعیت‌های رطوبتی ماهانه در ایستگاه منجلیج

وضعیت رطوبتی	ترسالی بسیار شدید	ترسالی شدید	ترسالی متوسط	تقریباً نرمال	خشکسالی متوسط	خشکسالی شدید	خشکسالی بسیار شدید	دوره زمانی
								فروردین
اردیبهشت	۱	۲	۱	۱۴	۳	۰	۰	
خرداد	۳	۱	۰	۷	۲	۰	۸	
تیر	۷	۰	۱	۱	۰	۰	۱۲	
مرداد	۲	۱	۰	۲	۴	۱۲	۰	
شهریور	۳	۰	۰	۵	۲	۱	۱۰	
مهر	۰	۰	۱	۲۰	۰	۰	۰	
آبان	۶	۰	۱	۲	۲	۱	۹	
آذر	۴	۳	۱	۳	۲	۱	۷	
دی	۳	۱	۰	۵	۳	۰	۹	
بهمن	۹	۰	۰	۲	۰	۰	۱۰	
اسفند	۸	۰	۰	۲	۲	۰	۹	



شکل ۹. تعداد وقوع وضعیت‌های رطوبتی ایستگاه‌های استان گیلان

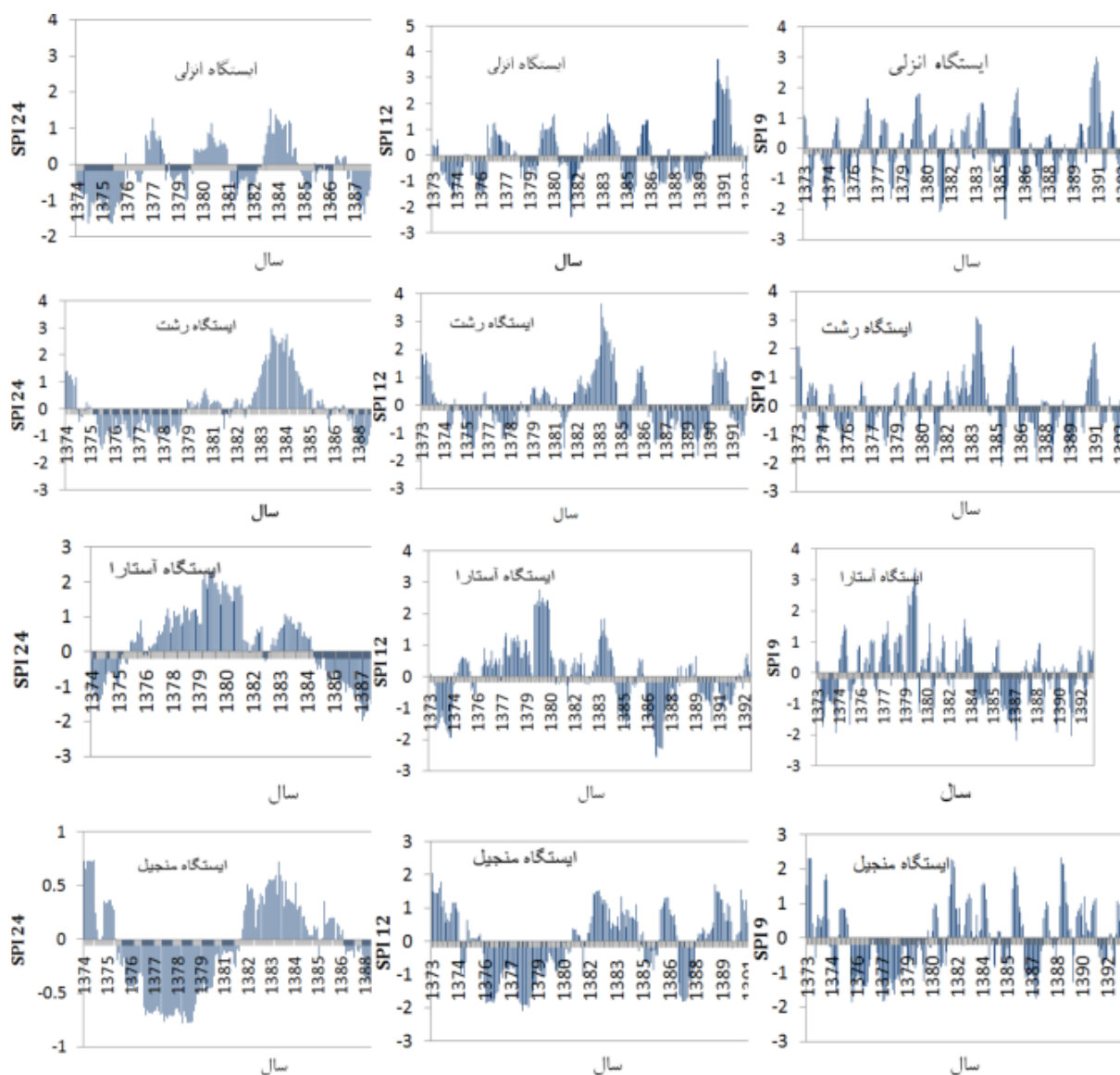
و پس از آن ۲ یا ۳ خشکسالی متوالی و یا بلافاصله پس از خشکسالی، ترسالی و پس از ترسالی، خشکسالی مشاهده شود. در هیچ سالی در تمامی ۴ ایستگاه مورد بررسی، فقط یک وضعیت رطوبتی حاکم نبوده است، به عبارت دیگر هر ساله می‌بایست انتظار وضعیت‌های متفاوت رطوبتی در مناطق مختلف استان گیلان را داشت و همچنین ماندگاری در شرایط نرمال به نسبت شرایط خشکسالی و ترسالی طولانی‌تر بوده است.

- تمامی ایستگاه‌ها، در طی ۲۱ سال مورد بررسی، در وضعیت تقریباً نرمال بیشترین فراوانی را دارا هستند.
- در میان طبقات مختلف خشکسالی‌ها و ترسالی‌ها، خشکسالی و ترسالی‌های رخ داده شده در استان تقریباً در وضعیت متوسط بوده است. خشکسالی‌های متوسط در مقایسه با ترسالی‌های متوسط بیشتر مشاهده شده‌اند.
- به طور متوسط در استان گیلان، بیشترین مقدار بارندگی در ایستگاه انزلی رخ داده است.

۵ نتایج و بحث

در این تحقیق که با استفاده از شاخص خشکسالی هواشناسی بارش استاندارد (SPI) وضعیت‌های رطوبتی شامل ۷ وضعیت خشکسالی متوسط، خشکسالی شدید، خشکسالی بسیار شدید، نرمال و ترسالی متوسط، ترسالی شدید و ترسالی بسیار شدید در استان گیلان مورد بررسی قرار گرفت، نتایج زیر به دست آمده است:

- هرچند وقوع خشکسالی‌ها نسبت به ترسالی‌ها در اغلب ایستگاه‌ها از فراوانی بیشتری برخوردار بود، با این حال هیچ روند خاص اقلیمی مبنی بر کاهش بارندگی در منطقه، در سال‌های اخیر مشاهده نشده است و از نظر الگوی مکانی نیز وقوع خشکسالی‌ها و ترسالی‌ها از نظم خاصی تبعیت نکرده است.
- در تمامی ۴ ایستگاه باران‌سنجی استان گیلان در طول یک دوره آماری ۲۱ ساله، سال‌های مرطوب و همچنین سال‌های خشک مشاهده شده‌اند و ممکن است ۲ یا ۳ ترسالی متوالی



شکل ۱۰. نمودارهای تغییرات شاخص SPI در مقیاس‌های ۹، ۱۲ و ۲۴ ماهه در ایستگاههای منتخب

مراجع

- [۱] پارسیان، الف، ۱۳۸۶، مبانی آمار ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان مرکز نشر، چاپ چهارم.
- [۲] علیزاده، الف، ۱۳۸۸. اصول هیدرولوژی کاربردی. چاپ بیست و ششم، انتشارات دانشگاه امام رضا.
- [۳] عیوضی، م، مساعدی، الف، مفتاح هلقی، م، حسام، موسی، ۱۳۸۸. بررسی فراوانی و تداوم شرایط مختلف بارش و خشکسالی در استان گلستان، پنجمین همایش ملی علوم و مهندسی آبخیزداری ایران.
- [4] Mckee, T. B., Doesken, N. J., and J. Kleist.(1993), The relation of drought frequency and durationto time scales. *English Conferece on Applied Climatology* , 17-22.
- [5] Shiau, J.-T.,Feng,S.,Nadarajah, S. ,Assessment of hydrological droughts for the Yellow River, China using copulas, *Hydrol. Process.*, in press.

- [6] Yue, S.Ouarda, T.B.M.J. B. Bobee(2001), A review of bivariate gamma distributions for hydrological application, *J. Hydrol.* **246** 1–18.
- [7] Paula Ana C. Silva Maderia .deAraujo Rodrigues Jailson. MONTERIO Chaves Lucas .Jaquesde Souza Devanil (2013), Sums, Products and Ratio for Crovelli's Bivariate Gamma Distribution.
- [8] Johnson,N.L ,Kotz,S,(1972) Power transformation of gamma variables, *Biometrika* **59** 226–229.
- [9] Cohen, A.C. (1969), A Generalization of the Weibull Distribution, NASA Contractor Report, No. 61293, Cont NAS75 8-111, Marshall Space Flight Center, Alabama.
- [10] Lienhard, H.J., Meyer, P.L. (1967), A physical basis for the generalized gamma distribution, *Q. Appl. Math.* **25** 330–334.
- [11] Stacy, E.W. , Mihram, G.A. (1965), Parameter estimation for a generalized gamma distribution, *Technometrics* **7** 349–358.
- [12] Stacy, E.W. (1962) A generalization of the gamma distribution, *Ann. Math. Stat.* **33** 1187–1192.
- [13] Amoroso, L. (1925) Ricercheintornoallacurvadeiredditi, *Ann. Math., Ser. IV* **2** 123–159.
- [14] Nadarajah, S., Gupta, A., (2007), A generalized gamma distribution with application drought data, *Math and Computers* **74** 1-7.