آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های مبهم

جلال چاچی [1]

چکیده:

در این مقاله مساله آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های مبهم بررسی شده است. یک روش جدید بر مبنای شاخص لزوم برتری اکید پیشنهاد شده است. مثالی از کاربرد آزمون پیشنهادی در کنترل کیفیت آماری ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: آزمون فرضیه فازی، داده‌های مبهم، شاخص لزوم برتری اکید، کنترل کیفیت آماری.

۱ مقدمه

آزمون فرضیه‌ها یکی از اهداف استنباط آماری است. در آمار کلاسیک تمام مولفه‌های یک مدل از قبیل داده‌ها، فرضیه‌ها و نحوه به دست آوردن آزمون باید دقیق (بدون ابهام) باشند. ولی در عمل و دنیای واقعی خیلی مواقع با داده‌های مبهم، مانند "حدودا ۱۰"، "کم و بیش نزدیک پنج"، "نسبتا بزرگتر از ۱۰۰" و ...، مواجه هستیم. یا گاهی اوقات نیاز به بررسی فرضیه فازی مانند "میانگین μ حدودا ٤۰ است" به جای نوع دقیق آن، یعنی "$\mu = ۴۰$" داریم. همچنین ممکن است بخواهیم یک فرضیه را در سطح معنی‌داری نادقیقی مانند "بزرگتر از α نباشد" به جای مقدار دقیقی از α، آزمون کنیم. آزمون‌های آماری، تحت شرایط فازی توسط آرنولد [۱] مورد بررسی واقع شده‌اند. مساله آزمون فرضیه‌ها با داده‌های مبهم توسط کازالس و همکاران [۳، ٤] و گرزگورزسکی [۱۰، ۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین، آزمون فرضیه‌های فازی در مراجع [۲، ٥، ۲٥، ۲٦، ۲۹] مورد بحث واقع شده است.

مقاله حاضر به آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های مبهم اختصاص دارد. گفتنی است که در کتاب کروز و میر [۱۹] به ندرت به این مساله پرداخته شده است.[2] متاسفانه در روش آنها برخی ناکارآمدی‌ها، انتقادات و بحث‌ها وجود دارد [۱۲]. در ادامه، روش دیگری با استفاده از معیار لزوم برتری اکید[3] (NSD) دوبوآ و پرآد [٦، ۷]، که در نظریه امکان بسیار متداول است، پیشنهاد می‌شود. مثالی از کاربرد این روش در کنترل کیفیت آماری نیز آورده شده است.

۲ مفاهیم پایه و نمادها

فرض کنید یک رخداد تحت بررسی توسط مدل احتمالی P_θ متعلق به خانواده توزیع‌های $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ مدل شود. می‌خواهیم آزمون فرضیه صفر $H : \theta \in \Theta_H$ در مقابل فرضیه جانشین $K : \theta \in \Theta_K$ را در ارتباط با پارامتر θ مورد بررسی قرار دهیم. Θ_K و Θ_H زیر مجموعه‌هایی از Θ هستند، بطوری که $\Theta_H \cap \Theta_K = \emptyset$ [۲۲].

در مساله آزمون فرضیه، نمونه تصادفی $V_۱, \ldots, V_n$ مشاهده می‌شود و این مشاهدات منجر به انتخاب یکی از دو تصمیم می‌شود: یا H رد شود (و K پذیرفته شود)، یا H رد نشود (معمولا با H پذیرفته شود، نیز مشخص می‌شود.). معمولاً رد H را با یک و پذیرش H را با صفر نشان می‌دهند. بنابراین، یک قاعده تصمیم، که به آن یک آزمون آماری می‌گویند، به صورت تابع $\varphi : \mathbb{R}^n \to \{۰, ۱\}$ تعریف می‌شود. هر آزمون آماری، فضای نمونه $\mathbb{R}^n$ را به دو مجموعه جدا از هم $\{(v_۱, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n : \varphi(v_۱, \ldots, v_n) = ۰\}$، مجموعه پذیرش H، و $\mathcal{K} = \{(v_۱, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n : \varphi(v_۱, \ldots, v_n) = ۱\}$، مجموعه رد H، که به آن ناحیه بحرانی نیز می‌گویند، تقسیم می‌کند. در عمل،

[1] دانشگاه سمنان، گروه آمار jchachi@profs.semnan.ac.ir

[2] شایان ذکر است که کتاب کروز و میر [۱۹] نخستین کتابی است که درباره آمار و احتمال فازی نگاشته شده است و همچنان یکی از معدود کتاب‌های مرجع در این زمینه است. م.

[3] Necessity index of Strict Dominance

آماره آزمون $T(V_۱, \ldots, V_n)$ (یعنی تابعی از مشاهدات) را محاسبه می‌کنیم، سپس ناحیه بحرانی $\mathcal{K}$ را پیدا می‌کنیم، و در انتها فرضیه مورد بررسی (H) را رد می‌کنیم، اگر $T(V_۱, \ldots V_n) \in \mathcal{K}$، و در غیر این‌صورت آن را می‌پذیریم. یک آزمون آماری متداول به صورت زیر است

$$\varphi(V_۱, \ldots, V_n) = \begin{cases} ۱ & T(V_۱, \ldots, V_n) \in \mathcal{K}, \\ ۰ & T(V_۱, \ldots, V_n) \notin \mathcal{K} \end{cases}$$

ناحیه بحرانی به حداکثر خطای نوع اول از پیش تعیین شده (رد H وقتی درست است)، که به آن سطح معنی‌داری δ می‌گویند، بستگی دارد. بنابراین فرض می‌شود که

$$P\{\varphi(V_۱, \ldots, V_n) = ۱ | H\} \leq \delta. \qquad (۱)$$

برای جزئیات بیشتر در ارتباط با نظریه آزمون فرضیه‌های آماری خواننده را به [۲۲] ارجاع می‌دهیم.

اکنون، $X_۱, \ldots, X_n$ را یک نمونه فازی در نظر بگیرید که مقادیر تحقق یافته فازی نمونه تصادفی معمولی $V_۱, \ldots, V_n$ از جامعه‌ای با P_θ است. فرض کنید هر X_i یک عدد فازی باشد، یعنی X_i یک زیر مجموعه فازی نرمال، محدب و کراندار از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با تابع عضویت نیمپیوسته بالایی $\mu_{X_i} : \mathbb{R} \to [۰, ۱]$ است [۶]. فضای تمام اعداد فازی روی $\mathbb{R}$ را با $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. یک ابزار مناسب برای کار با اعداد فازی، α-برش‌های آنها است. α-برش عدد فازی X با تابع عضویت μ_X یک مجموعه معمولی است که برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$X_\alpha = \{t \in \mathbb{R} : \mu_X(t) \geq \alpha\}.$$

هر α-برش یک عدد فازی، یک بازه بسته به صورت $X_\alpha = [X_\alpha^L, X_\alpha^U]$ است که

$$X_\alpha^L = \inf\{t \in \mathbb{R} : \mu_X(t) \geq \alpha\},$$
$$X_\alpha^U = \sup\{t \in \mathbb{R} : \mu_X(t) \geq \alpha\}.$$

تعاریف دقیقی از متغیرهای تصادفی و نمونه تصادفی فازی را می‌توانید در مراجع [۱۸، ۲۰، ۲۱، ۲۳] ببینید. در این مقاله از تعاریفی مشابه واکرناک [۲۰، ۲۱] و کروز و میر [۱۸، ۱۹] درباره متغیرهای تصادفی فازی استفاده می‌شود.

فرض کنید یک آزمایش تصادفی با فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ مدل شود که Ω فضای تمام برآمدهای امکان‌پذیر آزمایش، $\mathcal{A}$ یک سیگما–جبر از زیر مجموعه‌های Ω و P یک اندازه احتمال است.

تعریف ۱.۲. نگاشت $X : \Omega \to \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ یک متغیر تصادفی فازی نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. برای هر $\omega \in \Omega$ مجموعه ناتهی $\{X_\alpha(\omega) : \alpha \in [۰, ۱]\}$ مجموعه نمایش $X(\omega)$ باشد.

۲. برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ جفت توابع $X_\alpha^L = X_\alpha^L(\omega) = \inf X_\alpha(\omega)$ و $X_\alpha^U = X_\alpha^U(\omega) = \sup X_\alpha(\omega)$ متغیرهای تصادفی فازی حقیقی مقدار معمولی در $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ باشند.

بنابراین متغیر تصادفی فازی X به عنوان مقادیر تحقق یافته فازی متغیر تصادفی معمولی و مجهول $V : \Omega \to \mathbb{R}$، که به آن منشاء X می‌گویند، در نظر گرفته می‌شود. مجموعه χ را مجموعه تمام منشاهای امکان‌پذیر X در نظر می‌گیریم. اگر فقط داده‌های مبهم در دسترس باشند، بررسی اینکه منشا واقعی X کدام یک از منشاهای موجود است امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین، می‌توانیم یک مجموعه فازی در χ با تابع عضویت $\nu : \chi \to [۰, ۱]$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$\nu(V) = \inf\{\mu_{X(\omega)}(V(\omega)) : \omega \in \Omega\},$$

که مطابق با درجه پذیرش متغیر تصادفی V به عنوان منشا متغیر تصادفی فازی مورد نظر است [۱۹].

در حالتی که داده‌ها فازی هستند، پارامتر θ را نمی‌توانیم بطور دقیق مشاهده کنیم، بلکه در این حالت فقط مقداری مبهم از آن مشاهده می‌شود. بنابراین بهتر است θ به صورت مجموعه فازی $\Lambda(\theta)$ با تابع عضویت زیر

$$\mu_{\Lambda(\theta)}(t) = \sup\{\nu(V_۱, \ldots, V_n) : (V_۱, \ldots, V_n) \in \chi^n, \theta(V_۱) = t\}, \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

برآورد شود، که χ^n مجموعه تمام منشاهای امکان‌پذیر نمونه تصادفی فازی، با تابع عضویت زیر است

$$\nu(V_۱, \ldots, V_n) = \min_{i=۱,\ldots,n} \inf\{\mu_{X_i(\omega)}(V_i(\omega)) : \omega \in \Omega\}.$$

به راحتی می‌توان α-برش‌های $\Lambda(\theta)$ را به صورت زیر به دست آورد

$$(\Lambda(\theta))_\alpha = \{t \in \mathbb{R} : \exists (V_1, \ldots, V_n) \in \chi^n, \theta(V_1) = t, \\ V_i(\omega) \in (X_i(\omega))_\alpha,\ \omega \in \Omega,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

برای اطلاعات بیشتر خواننده را به [۱۹] ارجاع می‌دهیم.

کروز و میر [۱۹] به این نتیجه رسیدند که در برآورد با داده‌های مبهم، بهتر است که برآورد فازی $\Lambda(\theta)$ از پارامتر θ تحت مطالعه به دست آید. لذا آنها بررسی خود را به آزمون فرضیه‌هایی درباره $\Lambda(\theta)$ محدود کردند. بنابراین آنها در مساله آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های فازی، تعریف زیر را برای آزمون پیشنهاد کردند.

تعریف ۲.۲. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه فازی باشد. در این صورت تابع $\phi : [\mathcal{F}_c(\mathbb{R})]^n \to \{0, 1\}$ به طوری که

$$P\{\omega \in \Omega : \phi(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) = 1 | \Lambda(\theta) = \Lambda_0\} \leq \delta, \quad (2)$$

یک آزمون در سطح معنی‌داری $\delta \in (0, 1)$ برای آزمون فرضیه

$$H : \Lambda(\theta) = \Lambda_0,$$

نامیده می‌شود، که $\Lambda_0 \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$.

حال اگر تمام داده‌ها دقیق باشند، یعنی $X_i = V_i$ و فرضیه دقیق $\theta = \theta_0$ را در نظر بگیریم، در اینصورت واضح است که تعریف بالا، یک تعمیم طبیعی از تعریف آزمون کلاسیک است و رابطه (۲) به رابطه (۱) تبدیل می‌شود.

کروز و میر [۱۹] همچنین نحوه ساخت چنین آزمون‌هایی را برای فرضیه $H : \Lambda(\theta) = \Lambda_0$ در مقابل فرضیه جانشین دوطرفه بیان کردند. متاسفانه روش آنها محدودیت‌های بسیاری دارد. به عنوان نمونه، آنها گزاره $\Lambda(\theta)$ بزرگتر از Λ_0 است را برای فرضیه جانشین یکطرفه بکار می‌برند، که چون ترتیب خطی منحصر به فردی بین داده‌های فازی وجود ندارد، بی معنی است. هر وقت می‌گوییم یک عدد فازی بزرگتر از دیگری است، باید کاملا توضیح دهیم که منظور چیست، یعنی باید ذکر کنیم که چگونه اعداد فازی را مرتب می‌کنیم. این موضوع و دیگر مسایل مربوط به روش آزمون فرضیه‌های کروز و میر در [۱۲] مطرح و بررسی شده‌اند.

۳ فرضیه‌های بر اساس معیار لزوم برتری اکید

در این بخش، یک روش جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های مبهم پیشنهاد می‌شود که آن را می‌توان برای حالتی که فرضیه‌های جانشین یکطرفه و دوطرفه هستند بکار برد و از طرفی در تعریف کروز و میر (رابطه (۲)) نیز صدق کند. برای تشریح این روش از معیار لزوم برتری اکید NSD استفاده می‌کنیم [۷]. برای اعداد فازی A و B، به ترتیب با توابع عضویت μ_A و μ_B درجه لزوم برقراری رابطه $A > B$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Ness(A > B) = 1 - \sup_{x,y:x \leq y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}. \quad (3)$$

دوبوآ و پراد [۷] همچنین معیار امکان برتری اکید[4] و برخی معیارهای دیگر در این زمینه را نیز معرفی کردند. در هر حال به دلیل توجیه منطقی و موثر بودن این معیارها در حل مسایل واقعی، تصمیم به استفاده از معیار NSD گرفتیم [۱۵، ۱٦]. تشریح روش پیشنهادی را با مساله آزمون فرضیه صفر $H : \Lambda(\theta) = \Lambda_0$ در مقابل فرضیه یکطرفه $K : Ness(\Lambda(\theta) > \Lambda_0) \geq \xi$ شروع می‌کنیم، که ξ عددی ثابت در باره $[0, 1]$ است. اگرچه هم داده‌ها و هم فرضیه‌ها فازی هستند اما رابطه ترتیب بر مبنای NSD (بین اعداد فازی) منجر به یک آزمون آماری بسیار ساده می‌شود. قبل از اینکه نحوه ساخت چنین آزمونی را نشان دهیم، لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۳. فرض کنید $X, Y \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. روابط زیر هم ارز هستند:

(i) $\quad Ness(X > Y) \geq \xi,$

(ii) $\quad X^L_{1-\xi} \geq Y^U_{1-\xi},$

(iii) $\quad X^L_\alpha \geq Y^U_\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1],\ \alpha \geq 1 - \xi.$

اثبات: $(i) \Leftarrow (ii)$. توابع عضویت اعداد فازی X و Y را به ترتیب μ_X و μ_Y اختیار کنید. با استفاده از رابطه (۳) داریم

$$\begin{aligned} Ness(X > Y) &\geq \xi \\ 1 - \sup_{u,v:u \leq v} \min\{\mu_X(u), \mu_Y(v)\} &\geq \xi \\ \sup_{u,v:u \leq v} \min\{\mu_X(u), \mu_Y(v)\} &\leq 1 - \xi \quad (4) \\ \forall (u, v : u \leq v)\ \min\{\mu_X(u), \mu_Y(v)\} &\leq 1 - \xi. \end{aligned}$$

[4] Possibility index of Strict Dominance

چون X یک عدد فازی است، پس نرمال است، یعنی $u_۰$ای وجود دارد که $\mu_X(u_۰)=۱$. بنابراین $X_{۱-\xi}\neq\emptyset$، زیرا حداقل $u_۰\in X_{۱-\xi}$ است. حال $X^L_{۱-\xi}=\inf\{u:u\in X_{۱-\xi}\}=u_۱$ اختیار کنید. چون $Ness(X>Y)\geq\xi$ پس بنا به رابطه (٤) برای هر $u_۱\leq v$ داریم $\mu_Y(v)\leq ۱-\xi$. لذا برای هر $u_۱\leq v$ داریم $v\notin Y_{۱-\xi}$ که معادل با $Y^U_{۱-\xi}\leq u_۱$ است و بنابراین $X^L_{۱-\xi}\geq Y^U_{۱-\xi}$.

$(iii)\Leftarrow(ii)$. چون $X,Y\in\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ پس X و Y مجموعه‌های فازی محدب هستند. لذا برای هر $\alpha\in[۰,۱]$ و $\alpha\geq ۱-\xi$ داریم $X_\alpha\subseteq X_{۱-\xi}$ و $Y_\alpha\subseteq Y_{۱-\xi}$. اکنون چون $X^L_{۱-\xi}\geq Y^U_{۱-\xi}$، نتیجه می‌شود که برای هر $\alpha\geq ۱-\xi$، $X^L_\alpha\geq Y^U_\alpha$.

$(i)\Leftarrow(iii)$. چون برای هر $\alpha\geq ۱-\xi$، $X^L_\alpha\geq Y^U_\alpha$ پس در یک حالت خاص $X^L_{۱-\xi}\geq Y^U_{۱-\xi}$. عدد $u\in\mathbb{R}$ را به دلخواه اختیار کنید. اگر $u\in X_{۱-\xi}$ در اینصورت برای هر $u\leq v$، $v\notin Y_{۱-\xi}$ زیرا $X^L_{۱-\xi}\geq Y^U_{۱-\xi}$ و در نتیجه $\mu_Y(v)\leq ۱-\xi$. از طرفی اگر $u\notin X_{۱-\xi}$ در اینصورت $\mu_X(u)\leq ۱-\xi$. پس برای هر $u\in\mathbb{R}$ و برای هر $u\leq v$ داریم $\min\{\mu_X(u),\mu_Y(v)\}\leq ۱-\xi$، که با توجه به رابطه (٤) معادل با $Ness(X>Y)\geq\xi$ است و اثبات کامل می‌شود.

بنا به لم فوق و به منظور بررسی اینکه آیا رابطه $Ness(\Lambda(\theta)>\Lambda_۰)\geq\xi$ برقرار است، کافی است فقط یک سطح α در نظر گرفته شود. این نتیجه، شروع به دست آوردن آزمون است.

گزاره ۲.۳. فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ که $X_i\in\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ برای $i=۱,\ldots,n$، یک نمونه تصادفی فازی از توزیعی با پارامتر حقیقی مجهول θ است و $\xi\in[۰,۱]$ باشد. $\Lambda(\theta)\in\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ را یک مقدار فازی از θ بگیرید و $[\pi_۱,+\infty)$ یک فاصله اطمینان یکطرفه بالایی برای پارامتر θ در سطح اطمینان $۱-\delta$ باشد. در اینصورت تابع $\phi:(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}))^n\to\{۰,۱\}$ به صورت زیر

$$\phi(X_۱,\ldots,X_n)=\begin{cases} ۱ & (\Lambda_۰)^U_{۱-\xi}<\Pi^L_{۱-\xi} \\ ۰ & \text{o.w.,}\end{cases} \qquad (۵)$$

که

$$\begin{aligned}\Pi^L_{۱-\xi} &= \Pi^L_{۱-\xi}(X_۱,\ldots,X_n;\delta) \qquad (٦)\\ &= \inf\{t\in\mathbb{R}:\forall i\in\{۱,\ldots,n\}\ \exists x_i\in(X_i)_{۱-\xi}\ \text{s.t.}\\ &\qquad \pi_۱(x_۱,\ldots,x_n)\leq t\},\end{aligned}$$

یک آزمون در سطح معنی‌داری δ برای فرضیه $H:\Lambda(\theta)=\Lambda_۰$ در مقابل فرضیه یکطرفه $K:Ness(\Lambda(\theta)>\Lambda_۰)\geq\xi$ است.

اثبات: واضح است که یک هم ارزی بین کلیه پارامترهایی که برای آنها فرضیه صفر پذیرفته می‌شود و ساختار فاصله اطمینان وجود دارد. بطور دقیق‌تر یک تناظر یک به یک بین ناحیه پذیرش آزمون در سطح معنی‌داری δ برای فرضیه $H:\theta=\theta_۰$ در مقابل $K:\theta>\theta_۰$ و فاصله اطمینان یکطرفه $[\pi_۱,+\infty)$ برای پارامتر θ در سطح اطمینان $۱-\delta$ وجود دارد، که $\pi_۱=\pi_۱(V_۱,\ldots,V_n;\delta)$.

کروز و میر [۱۸] مفهوم فاصله اطمینان فازی را برای پارامتر مجهول θ معرفی کردند. آنها به علاوه نحوه ساخت فواصل اطمینان فازی با داده‌های فازی را نیز نشان دادند. عدد فازی $\Pi(\omega)$ با $\alpha-$برش‌های $\Pi_\alpha(\omega)=[\Pi^L_\alpha(\omega),+\infty)$ که

$$\begin{aligned}\Pi^L_\alpha(\omega) &= \Pi^L_\alpha(X_۱(\omega),\ldots,X_n(\omega);\delta) \qquad (۷)\\ &= \inf\{t\in\mathbb{R}:\forall i\in\{۱,\ldots,n\}\ \exists x_i\in(X_i)_\alpha\ \text{s.t.}\\ &\qquad \pi_۱(x_۱,\ldots,x_n)\leq t\},\end{aligned}$$

یک فاصله اطمینان فازی بالایی برای θ در سطح اطمینان $۱-\delta$ است، یعنی

$$P\{\omega\in\Omega:(\Lambda(\theta))_\alpha\subseteq\Pi_\alpha(\omega)\}\geq ۱-\delta,\quad \forall\alpha\in(۰,۱], \qquad (۸)$$

که $\Lambda(\theta)$ یک مقدار فازی از θ است.

بنا به روابط (٦) و (۷) و (۸) برای هر $\xi\in[۰,۱)$

$$P\{\omega\in\Omega:(\Lambda(\theta))_{۱-\xi}\subseteq\Pi_{۱-\xi}(\omega)\}\geq ۱-\delta,$$

و در نتیجه

$$P\{\omega\in\Omega:(\Lambda(\theta))_{۱-\xi}\not\subseteq\Pi_{۱-\xi}(\omega)\}<\delta$$

از رابطه (۵) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}&P\{\omega\in\Omega:\phi(X_۱(\omega),\ldots,X_n(\omega))=۱|\Lambda(\theta)=\Lambda_۰\}=\\ &\qquad P\{\omega\in\Omega:(\Lambda_۰)^U_{۱-\xi}<\Pi^L_{۱-\xi}(\omega)|\Lambda(\theta)=\Lambda_۰\}.\end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned}&\{\omega\in\Omega:(\Lambda_۰)^U_{۱-\xi}<\Pi^L_{۱-\xi}(\omega)\}\subseteq\\ &\qquad\{\omega\in\Omega:(\Lambda_۰)_{۱-\xi}\not\subseteq\Pi_{۱-\xi}(\omega)\}\end{aligned}$$

پس در نهایت

$$P\{\omega\in\Omega:\phi(X_۱(\omega),\ldots,X_n(\omega))=۱|\Lambda(\theta)=\Lambda_۰\} < P\{\omega\in\Omega:(\Lambda_۰)_{۱-\xi}\not\subseteq\Pi_{۱-\xi}(\omega)\} < \delta.$$

از رابطه (۲) نتیجه می‌شود که آزمون بیان شده در (۵) سطح معنی‌داری δ است و اثبات کامل می‌شود.

بطور مشابه، با استفاده از تناظر یک به یک بین ناحیه پذیرش آزمون در سطح معنی‌داری δ برای فرضیه $H:\theta=\theta_۰$ در مقابل $K:\theta<\theta_۰$ و فاصله اطمینان یکطرفه $(-\infty,\pi_۲]$ برای θ در سطح اطمینان $۱-\delta$ که $\pi_۲=\pi_۲(V_۱,\ldots,V_n;\delta)$ آزمونی برای نوع دیگر فرضیه جانشین یکطرفه فازی، به دست می‌آوریم.

گزاره ۳.۳. فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ که $X_i\in\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ برای $i=۱,\ldots,n$، یک نمونه تصادفی فازی از توزیعی با پارامتر حقیقی مجهول θ است و $\xi\in[۰,۱]$ باشد. $\Lambda(\theta)\in\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ را یک مقدار فازی از θ بگیرید و $(-\infty,\pi_۲)$ یک فاصله اطمینان یکطرفه پایینی برای پارامتر θ در سطح اطمینان $۱-\delta$ باشد. در اینصورت تابع $\phi:(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}))^n\to\{۰,۱\}$ به صورت زیر

$$\phi(X_۱,\ldots,X_n)=\begin{cases}۱ & (\Lambda_۰)^L_{۱-\xi}>\Pi^U_{۱-\xi}\\ ۰ & \text{o.w.,}\end{cases}$$

که

$$\begin{aligned}\Pi^U_{۱-\xi} &= \Pi^U_{۱-\xi}(X_۱,\ldots,X_n;\delta)\\ &= \sup\{t\in\mathbb{R}:\forall i\in\{۱,\ldots,n\}\ \exists x_i\in(X_i)_{۱-\xi}\ \text{s.t.}\\ &\qquad \pi_۲(x_۱,\ldots,x_n)\geq t\},\end{aligned}$$

یک آزمون در سطح معنی‌داری δ برای فرضیه $H:\Lambda(\theta)=\Lambda_۰$ در مقابل فرضیه یکطرفه $K:Ness(\Lambda(\theta)>\Lambda_۰)\geq\xi$ است.

اثبات: اثبات، مشابه اثبات گزاره ۲.۳ صورت می‌گیرد.

همچنین از شاخص NSD برای آزمون فرضیه صفر در مقابل فرضیه دوطرفه نیز می‌توانیم استفاده کنیم. ابتدا رابطه زیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۳. فرض کنید $X,Y\in\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ و $\xi\in[۰,۱]$ باشد. در اینصورت

$$Ness(X\neq Y)\geq\xi \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}Ness(X>Y)\geq\xi \ \text{ or}\\ Ness(Y>X)\geq\xi\end{cases}$$

اکنون با توجه به اینکه یک تناظر یک به یک بین ناحیه پذیرش آزمون در سطح معنی‌داری δ برای فرضیه $H:\theta=\theta_۰$ در مقابل $K:\theta\neq\theta_۰$ و فاصله اطمینان دوطرفه $[\pi_۱,\pi_۲]$ برای θ در سطح اطمینان $۱-\delta$، که $\pi_۱=\pi_۱(V_۱,\ldots,V_n;\frac{\delta}{۲})$ و $\pi_۲=\pi_۲(V_۱,\ldots,V_n;\frac{\delta}{۲})$، وجود دارد، گزاره زیر را می‌توانیم بیان کنیم.

گزاره ۵.۳. فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ که $X_i\in\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ برای $i=۱,\ldots,n$، یک نمونه تصادفی فازی از توزیعی با پارامتر حقیقی مجهول θ است و $\xi\in[۰,۱]$ باشد. $\Lambda(\theta)\in\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ را یک مقدار فازی از θ بگیرید و $(\pi_۱,\pi_۲)$ یک فاصله اطمینان دوطرفه برای پارامتر θ در سطح اطمینان $۱-\delta$ باشد. در اینصورت تابع $\phi:(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}))^n\to\{۰,۱\}$ به صورت زیر

$$\phi(X_۱,...,X_n)=\begin{cases}۱ & (\Lambda_۰)^U_{۱-\xi}<\Pi^L_{۱-\xi}\text{or}(\Lambda_۰)^L_{۱-\xi}>\Pi^U_{۱-\xi}\\ ۰ & \text{o.w.,}\end{cases}\qquad (۹)$$

که

$$\begin{aligned}\Pi^L_{۱-\xi} &= \Pi^L_{۱-\xi}(X_۱,\ldots,X_n;\frac{\delta}{۲})\\ &= \inf\{t\in\mathbb{R}:\forall i\in\{۱,\ldots,n\}\ \exists x_i\in(X_i)_{۱-\xi}\ \text{s.t.}\\ &\qquad \pi_۱(x_۱,\ldots,x_n)\leq t\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi^U_{۱-\xi} &= \Pi^U_{۱-\xi}(X_۱,\ldots,X_n;\frac{\delta}{۲})\\ &= \sup\{t\in\mathbb{R}:\forall i\in\{۱,\ldots,n\}\ \exists x_i\in(X_i)_{۱-\xi}\ \text{s.t.}\\ &\qquad \pi_۲(x_۱,\ldots,x_n)\geq t\},\end{aligned}$$

یک آزمون در سطح معنی‌داری δ برای فرضیه $H:\Lambda(\theta)=\Lambda_۰$ در مقابل فرضیه دوطرفه $K:Ness(\Lambda(\theta)\neq\Lambda_۰)\geq\xi$ است.

اثبات: اثبات، مشابه اثبات گزاره ۲.۳ صورت می‌گیرد.

[۵] Statistical Process Control

۴ کاربرد در کنترل کیفیت آماری

کنترل فرآیند آماری[۵] (SPC) مجموعه‌ای از روش‌ها برای دست‌یابی به یک ارتقای مداوم در کیفیت است. این موضوع با نمایش مداوم فرآیند تحت مطالعه همراه است تا در کمترین زمان به تعیین رخداد عوامل پیش‌بینی نشده بپردازد و اَعمال تصحیح کننده لازم را انجام دهد. متداول‌ترین ابزارهای مورد استفاده SPC نمودارهای کنترل[۶] هستند.

متداول‌ترین نمودار کنترل $\bar{x}$ برای نمایش سطح فرآیند، شامل سه خط می‌باشد که عبارتند از: خط مرکزی[۷] (CL) مطابق با سطح فرآیند، و دو خط افقی دیگر به ترتیب به نام‌های حد بالایی کنترل[۸] (UCL) و حد پایینی کنترل[۹] (LCL). فرض کنید فرآیند تحت بررسی به صورت نرمال توزیع شده باشد. ابتدا فرض می‌کنیم که پارامترهای فرآیند تحت بررسی معلوم باشند (یعنی میانگین آن $m_\cdot$ و انحراف معیار آن σ باشد). در چنین حالتی نمودار کنترل متداول $\bar{x}$ با خطوط زیر نمایش داده می‌شود

$$\begin{aligned} UCL &= m_\cdot + u_{۱-\delta/۲}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \\ CL &= m_\cdot, \\ LCL &= m_\cdot - u_{۱-\delta/۲}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

که $u_{۱-\delta/۲}$ چندک $(۱-\delta/۲)۱۰۰\%$ توزیع نرمال استاندارد است و δ سطح معنی‌داری است (معمولا $\delta = ۰/۰۰۲۷$ قابل قبول است و اگر پارامترهای فرآیند معلوم نباشند برآورد می‌شوند.).

کاربرد این نمودار به اینصورت است که در فواصل زمانی مشخصی نمونه‌هایی به حجم ثابت n گرفته می‌شود و میانگین حسابی هر نمونه به صورت نقطه‌ای روی نمودار رسم می‌شود. تا هنگامی که نقاط رسم شده میانگین‌ها درون حدود کنترل باشند، فرآیند تحت کنترل فرض می‌شود. در هر حال اگر نقطه‌ای خارج از حدود کنترل قرار گیرد، فرآیند دیگر در کنترل نمی‌باشد. توجه کنید که نمودار کنترلی که در اینجا بیان شد، هم ارز آزمون زیر

$$\phi(V_۱,\ldots,V_n) = \begin{cases} ۰, & \bar{V} \in [m_\cdot \pm u_{۱-\delta/۲}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}], \\ ۱, & \text{o.w.,} \end{cases}$$

در مساله آزمون فرضیه‌های $H: m = m_\cdot$ درمقابل $K: m \neq m_\cdot$ است.

ابزارهای متداول و مرسوم SPC برای داده‌های دقیق ساختاربندی و طراحی شده‌اند. در هر حال، گاهی اوقات قادر به ثبت داده‌های عددی دقیق نمی‌باشیم و به بررسی داده‌های نادقیق یا حتی داده‌های زبانی می‌پردازیم. در چنین موقعیت‌هایی برای استفاده از نمودارهای کنترل کلاسیک باید مشاهدات مبهم را به داده‌های دقیق تبدیل کرد (غیر فازی سازی)، که با این کار اغلب اطلاعات زیادی از دست می‌رود. بنابراین منطقی است که از مجموعه‌های فازی برای مدل‌بندی داده‌های مبهم یا داده‌های زبانی استفاده شود و سپس نمودارهای کنترل برای این داده‌های فازی ساختاربندی شود. نمودارهای کنترل برای متغیرهای زبانی در مراجع [۱۷، ۲۴، ۲۷، ۲۸] و نمودار کنترل شوارت فازی[۱۰] برای نمایش سطح فرآیند در مراجع [۱۳، ۱۴] بررسی شده‌اند. این نمودارها برای موارد خیلی خاص طراحی شده‌اند و محدودیت‌های زیادی دارند که در عمل نمی‌توان از آنها استفاده نمود [۸]. بنا به تناظر بین نمودارهای کنترل و آزمون‌های معنی‌داری و به منظور طراحی نمودارهای کنترل بر پایه مشاهدات فازی، به نظر می‌رسد استفاده از یک روش کلی برای به دست آوردن آزمون‌های فازی با داده‌های فازی مفید و منطقی باشد [۱۰، ۱۱]. نمودارهای کنترلی که با استفاده از این روش برای نمایش سطح فرآیند طراحی شدند، که به آنها نمودارهای کنترل فازی می‌گویند، نیز توسط [۹] معرفی شدند. در ادامه نحوه ساخت یک نمودار کنترل بر پایه معیار NSD بیان می‌شود.

فرص کنید داده‌های گردآوری شده دیگر دقیق نیستند، بلکه آنها داده‌هایی مبهم هستند، یعنی نمونه فازی $X_۱,\ldots,X_n$ که هر X_i یک عدد فازی است، مشاهده شود. حتی ممکن است که مقدار

[۶] Chart Controls

[۷] Center Line

[۸] Upper Control Limit

[۹] Lower Control Limit

[۱۰] Fuzzy − Shewhart Control

هدف $m.$ نیز دقیق نباشد (یعنی مبهم باشد یا به صورت زبانی بیان شود.). به علاوه اگر مقدار واقعی میانگین فرآیند $m.$ معلوم نباشد، باید آن را برآورد کنیم. از آنجا که از داده‌های فازی برای برآورد استفاده می‌شود، مقدار برآورد یک عدد فازی است.

همانطور که در بالا بیان شد، نمودار کنترل متداول $\bar{x}$ برای داده‌های دقیق بر پایه آزمون دوطرفه برای میانگین می‌باشد. بنابراین متناظر با آزمون فرضیه $H : \Lambda(m.) = \Lambda.$ در مقابل فرضیه $K : Ness(\Lambda(m.) \neq \Lambda.) \geq \xi$ که ξ یک عدد ثابت و $\Lambda(m.) \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ بیان زبانی و فازی مقدار واقعی $m.$ است، می‌توان یک نمودار کنترل برای داده‌های فازی ساخت.

معادله رابطه (۹) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\varphi'(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \text{if} \begin{cases} (\bar{X})^U_{1-\xi} < (\Lambda.)^L_{1-\xi} - \zeta & \text{or} \\ (\bar{X})^L_{1-\xi} > (\Lambda.)^U_{1-\xi} + \zeta, \end{cases} \\ 0, & \text{o.w.,} \end{cases}$$

که در آن ξ یک مقدار ثابت است و به حجم نمونه n، سطح اطمینان $1-\delta$ و مقدار معلوم واریانس فرآیند، بستگی دارد. بنابراین مطابق با نمودار کنترل کلاسیک $\bar{x}$ خطوط کنترل نمودار جدید به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} LCL &= (\Lambda.)^L_{1-\xi} - \zeta, \\ UCL &= (\Lambda.)^U_{1-\xi} + \zeta. \end{aligned}$$

در هر حال اکنون به جای خط مرکزی CL ناحیه مرکزی[11] (CA) به صورت زیر به دست می‌آید

$$CA = [(\Lambda.)^L_{1-\xi}, (\Lambda.)^U_{1-\xi}].$$

نحوه بکارگیری این نمودار به صورت زیر است: ابتدا سطح معنی‌داری δ به همرا مقدار مناسبی برای معیار لزوم ξ انتخاب می‌شود. سپس نمونه (فازی) $X_1,\ldots,X_n$ به حجم ثابت n در موقعیت‌های زمانی مشخصی انتخاب و میانگین حسابی (فازی) $\bar{X}$ برای آنها محاسبه می‌شود. فاصله I بر طبق $(1-\xi)-$ برش $\bar{X}$ به صورت زیر تعیین

$$I = [(\bar{X})^L_{1-\xi}, (\bar{X})^U_{1-\xi}],$$

و بر روی نمودار رسم می‌شود. اگر تمام طول فاصله I خارج حدود کنترل قرار گیرد (یعنی زیر LCL یا بالای UCL) فرآیند در کنترل نمی‌باشد. اگر طول فاصله I یکی از حدود کنترل را قطع کند، یک هشدار است. مثالی از این نمودار کنترل در شکل ۱ آمده است. در عمل همیشه $\Lambda.$ را با میانگین‌گیری از میانگین‌های k نمونه استخراج شده (نمونه‌های انتخابی که برای آنها فرآیند در کنترل است) به صورت زیر برآورد می‌کنیم

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{ij}).$$

وقتی فرآیند دارای توزیع نرمال با انحراف استاندارد مجهول باشد، روابط زیر برای این نمودار به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} LCL &= (\bar{\bar{X}})^L_{1-\xi} - t^{[n-1]}_{1-\delta/2}\frac{1}{\sqrt{n}}(\bar{\bar{S}})^U_{1-\xi}, \\ UCL &= (\bar{\bar{X}})^U_{1-\xi} + t^{[n-1]}_{1-\delta/2}\frac{1}{\sqrt{n}}(\bar{\bar{S}})^U_{1-\xi}, \\ CA &= [(\bar{\bar{X}})^L_{1-\xi}, (\bar{\bar{X}})^U_{1-\xi}], \end{aligned}$$

که در آن $t^{[n-1]}_{1-\delta/2}$ چندک مرتبه $100(1-\delta/2)$ توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است و

$$\begin{aligned} (\bar{\bar{X}})^L_{1-\xi} &= \frac{1}{kn}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij})^L_{1-\xi}, \\ (\bar{\bar{X}})^U_{1-\xi} &= \frac{1}{kn}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij})^U_{1-\xi}, \\ (\bar{\bar{S}})^U_{1-\xi} &= \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\sqrt{\frac{n-1}{2}} \times \\ & \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left((X_{ij})^U_{1-\xi} - (\bar{X}_j)^U_{1-\xi}\right)^2}, \end{aligned}$$

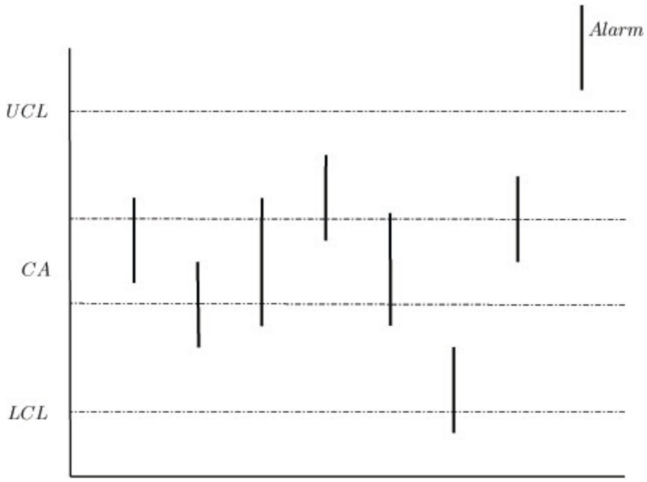
و Γ تابع گاما است [۱۳، ۱٤].

٥ نتیجه‌گیری

گزاره‌هایی که در بالا بیان شدند، نحوه ساخت آزمون‌های آماری را برای فرضیه‌های فازی با استفاده از داده‌های فازی نشان می‌دهند. در تعریف فرضیه‌های فازی از معیار لزوم برتری اکید دوبوآ و پرآد [٦، ۷] استفاده کردیم. البته آزمون‌های مشابهی را با معیارهای دیگر از قبیل معیار امکان برتری اکید نیز می‌توان ساخت.

[11] Center Area

آزمون‌های پیشنهادی خوش تعریف هستند، زیرا اگر از داده‌های دقیق به جای مشاهدات فازی استفاد کنیم و فرضیه‌های فازی را با انواع دقیق آنها جایگزین کنیم، این آزمون‌ها تبدیل به آزمون‌های معنی‌داری کلاسیک می‌شوند. بکارگیری این آزمون‌ها در عمل بسیار ساده هستند. اگرچه ابهام هم در داده‌ها و هم در فرضیه‌ها وارد شده است، اما خروجی این آزمون‌ها دقیق هستند. به عبارتی، آزمون‌های پیشنهاد شده منجر به تصمیم‌گیری دقیق درباره رد یا پذیرش فرضیه تحت مطالعه می‌شوند. بنابراین احتیاج به هیچ روش غیرفازی‌سازی نمی‌باشد، که این موضوع همچنین از جمله فواید بکارگیری این روش است.



شکل ۱. نمودار کنترل کیفیت آماری بر اساس معیار لزوم برتری اکید

مراجع

[1] Arnold, B.F. (1995), Statistical tests optimally meeting certain fuzzy requirements on the power function and on the sample size, Fuzzy Sets and Systems 75, 365-372.

[2] Arnold, B.F. (1996), An approach to fuzzy hypothesis testing, Metrika 44, 119-126.

[3] Casals, M.R., Gil, M.A., and Gil, P. (1986a), On the use of Zadeh's probabilistic definition for testing statistical hypotheses from fuzzy information, Fuzzy Sets and Systems 20, 175-190.

[4] Casals, R., Gil, M.A., and Gil, P. (1986b), The fuzzy decision problem: an approach to the problem of testing statistical hypotheses with fuzzy information, European J. of Operational Researches 27, 371-382.

[5] Delgado, M., Verdegay, J.L., and Vila, M.A. (1985), Testing fuzzy hypotheses. A Bayesian approach. In *Approximate Reasoning in Expert Systems* (Gupta, M.M., Kandel, A., Bandler, W., Kiszka, J.B. Eds.), Elsevier Science Publishers, 307-316.

[6] Dubois, P., and Prade, H. (1980), Fuzzy Sets and System: Theory and Applications, Academic Press, New York.

[7] Dubois, P., and Prade, H. (1983), Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory, Information Sciences 30, 183-224.

[8] Grzegorzewski, P. (1997a), Statistical Decision with vague Data: Application in statistical Quality Control. Phd Thesis. Systems Research Institute, PAS (in Polish).

[9] Grzegorzewski, P. (1997b), Control Charts for Fuzzy Data, Proc. 5th European Congeress Intelligent Techniques and Soft Comp. EUFIT'97, Aachen, 1326-1330.

[10] Grzegorzewski, P. (2000), Testing statistical hypotheses with vague data. Fuzzy Sets and Systems 112, 501-510.

[11] Grzegorzewski, P. (2001), Fuzzy tests - defuzzification and randomization, Fuzzy Sets and Systems 118, 437-446.

[12] Grzegorzewski, P., Hryniewicz, O. (1997), Testing hypotheses in fuzzy environment, Mathware and Soft Computing 4, 203-217.

[13] Hopper, J. (1994), Statistiche Prozeβkontrolle mit fuzzy-datane, Phd. Dissertation, Ulm University.

[14] Hopper, J., Wolff, H. (1995), The design of a fuzzy-Shewhart control chart, Research Report, Wurzburg University.

[15] Hryniewicz, O. (1992), Statistical acceptance sampling with uncertain information from a sample and fuzzy quality criteria, Working Paper of SRI PAS, Warsaw, (in Polish).

[16] Hryniewicz, O. (1994), Statistical decisions with impercise data and requirements, In Systems Analysis and Decisions in Economics and Technology, Proc. 9th Polish-Italian and 6th Polish-Finnish Confer. (R. Kulikowski, K. Szkatula and J. Kacprzyk, Eds.). Omnitech Press, 135-143.

[17] Kanagawa, A., Tamaki, F., and Otha, H. (1993), Control charts for process average and variability based on linguistic datd, Int. J. Prod. Res. 31, 913-922.

[18] Kruse, R. (1982), The strong law of large numbers for fuzzy random variables, Information Sciences 28, 233-241.

[19] Kruse, R., Meyer, K.D. (1987), Statistics with Vague Data, Riedel, Dordrecht.

[20] Kwakernaak, H. (1978), Fuzzy random variables, part I: definitions and theorems, Information Sciences 15, 1-15.

[21] Kwakernaak, H. (1978), Fuzzy random variables, Part II: algorithms and examples for the discrete case, Information Sciences 17, 253-278.

[22] Lehmann, E.L. (1986), Testing Statistical Hypotheses, 2nd ed., J. Wiley & Sons, New York.

[23] Puri, M.L., Ralescu, D.A. (1986), Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl. 114, 409-422.

[24] Raz, T., Wang, J.H. (1990), Probabilistic and membership approaches in construction of control charts for linguistic data, Production Planning & Control 1, 147-157.

[25] Saade, J. (1994), Extension of fuzzy hypothesis testing with hybrid data, Fuzzy Sets and Systems 63, 57-71.

[26] Saade, J., Schwarzlander, H. (1990), Fuzzy hypothesis testing with hybrid data, Fuzzy Sets and Systems 35, 197-212.

[27] Wang, J.H., Raz, T. (1988), Applying fuzzy set theory in the development of quality control charts, Internationl Industrial Engineering Conference Proceedings, Orlando, FL, 30-35.

[28] Wang, J.H., Raz, T. (1990), On the construction of control charts using linguistic variabels, Int. J. Prod. Res. 28, 477-487.

[29] Watanabe, N., Imaizumi, T. (1993), A fuzzy statistical test of fuzzy hypotheses, Fuzzy Sets and Systems 53, 167-178.