توزیع NH تعمیم یافته نمایی شده

میلاد قربان نژاد محلی [۱] ، اکبر اصغرزاده [۲]

چکیده :

ناداراجاه و حقیقی در سال ۲۰۱۱ یک تعمیم جدید از توزیع نمایی به نام توزیع NH را به عنوان یک مدل جایگزین برای مدل های گاما، وایبل و نمایی توانی شده معرفی نمودند. در این مقاله، تعمیمی از توزیع NH به نام توزیع NH تعمیم یافته نمایی شده معرفی و مورد مطالعه قرار می‌گیرد. معرفی مدل و کاربرد مدل پیشنهادی در تحلیل داده های واقعی مورد بحث قرار خواهد گرفت. همچنین کارایی روش برآورد درستنمایی ماکزیمم را برای محاسبه ی پارامترهای مجهول به کمک شبیه سازی مونت کارلو مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: توزیع NH، تابع نرخ شکست، توزیع نمایی، توزیع وایبل، توزیع نمایی توانی شده.

۱ معرفی توزیع

در سال های گذشته تعمیم های متفاوتی از توزیع های پیوسته ارائه شده است. بر اساس یک تابع توزیع پایه ای $G(x)$ ، کوردیرو و دی کاسترو [۳] [۳] یک کلاس جدید از توزیع ها به نام توزیع تعمیم یافته نمایی شده با دو پارامتر اضافی $\beta > ۰$ و $\gamma > ۰$ را معرفی نمودند که تابع توزیع و تابع چگالی آن به ترتیب به صورت زیر می‌باشند :

$$F(x) = \left\{ ۱ - [۱ - G(x)]^{\beta} \right\}^{\gamma}, \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \beta\gamma \left[۱ - G(x) \right]^{\beta - ۱} \\ &\times \left\{ ۱ - [۱ - G(x)]^{\beta} \right\}^{\gamma - ۱} g(x), \end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ تابع چگالی توزیع پایه ای می‌باشد. افزودن دو پارامتر β و γ باعث می‌شود که توزیع جدید انعطاف‌پذیری بیشتری در مقایسه با توزیع پایه ای $G(x)$ داشته باشد. در این مقاله با در نظر گرفتن $G(x)$ به عنوان تابع توزیع NH ، تعمیمی از توزیع NH معرفی خواهد شد.

توزیع NH اولین بار توسط ناداراجاه و حقیقی در سال ۲۰۱۱ معرفی شد [۹]. آنها نشان دادند که در برخی موارد، این توزیع در مقایسه با توزیع های وایبل، گاما و نمایی توانی شده برازش بهتری را برای داده ها فراهم می‌کند. تابع توزیع و تابع چگالی توزیع NH به صورت زیر می‌باشند :

$$G(x) = ۱ - \exp\left\{ ۱ - (۱ + \lambda x)^{\alpha} \right\}, \alpha > ۰, \lambda > ۰, \quad (۳)$$

$$g(x) = \alpha\lambda(۱ + \lambda x)^{\alpha - ۱} \exp\left\{ ۱ - (۱ + \lambda x)^{\alpha} \right\}, \quad (٤)$$

برای مطالعه ی بیشتر درباره ی توزیع NH و برخی از تعمیم های آن می‌توان به [۱] و [۹] مراجعه کرد. در این مقاله با جایگذاری تابع توزیع و تابع چگالی توزیع NH به ترتیب در روابط (۱) و (۲)، تعمیمی جدید از توزیع NH به نام توزیع NH تعمیم یافته ی نمایی شده (EGNH) [٤] معرفی می‌شود که تابع توزیع و تابع چگالی آن به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x; \alpha, \lambda, \beta, \gamma) \\ &= \left[۱ - \exp\{\beta - \beta(۱ + \lambda x)^{\alpha}\} \right]^{\gamma}, x > ۰, \end{aligned} \quad (۵)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha\lambda\beta\gamma(۱ + \lambda x)^{\alpha - ۱} \exp\left\{ \beta - \beta(۱ + \lambda x)^{\alpha} \right\} \\ &\times \left[۱ - \exp\{\beta - \beta(۱ + \lambda x)^{\alpha}\} \right]^{\gamma - ۱}. \end{aligned} \quad (٦)$$

که در آن $\lambda > ۰$ پارامتر مقیاس و $\alpha > ۰$ ، $\beta > ۰$ و $\gamma > ۰$ پارامترهای شکل می‌باشند.

[۱] کارشناس ارشد دانشگاه مازندران

[۲] عضو هیئت علمی دانشگاه مازندران

[۳] Cordeiro and de Castro

[٤] Exponenciated Generalized Nadarajah-Haghighi

در ادامه با مطالعه رفتار تابع چگالی و تابع نرخ شکست این توزیع، نشان داده خواهد شد که توزیع جدید در مقایسه با توزیع NH از انعطاف‌پذیری بیشتری برخوردار بوده و لذا می‌تواند برای مدل بندی انواع مختلف از داده ها به کار رود.

۲ شکل تابع چگالی و نرخ خطر

شکل ۱، نمودار تابع چگالی توزیع EGNH را به ازای پارامترهای $\alpha = ۰/۵, ۰/۹, ۱/۵$ و $\lambda = \beta = ۱$ و $\gamma = ۰/۵, ۱/۵, ۴, ۱۰$ نشان می‌دهد. از روی شکل مشاهده می‌شود که اگر $۰ < \gamma < ۱$ باشد تابع چگالی نزولی است و اگر $\gamma > ۱$ باشد تابع چگالی به صورت چوله تک مدی می‌باشد. با توجه به تابع چگالی (٦) داریم:

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \begin{cases} \infty & \gamma < ۱, \\ \alpha\lambda\beta & \gamma = ۱, \\ ۰ & \gamma > ۱, \end{cases}$$

و $\lim_{x\to\infty} f(x) = ۰$. همچنین مشتق لگاریتم تابع چگالی عبارت است از:

$$\frac{d\log f(x)}{dx} = \frac{(\alpha-۱)\lambda - \alpha\lambda\beta(۱+\lambda x)^{\alpha}}{۱+\lambda x} + \frac{\alpha\lambda\beta(\gamma-۱)(۱+\lambda x)^{\alpha-۱}e^{\beta-\beta(۱+\lambda x)^{\alpha}}}{۱-e^{\beta-\beta(۱+\lambda x)^{\alpha}}}.$$

از حل معادله $\frac{d\log f(x)}{dx} = ۰$ می‌توان مد توزیع جدید را پیدا کرد. تابع چگالی EGNH برای $\alpha < ۱$ و $\gamma < ۱$ محدب لگاریتمی است و برای $\alpha > ۱$ و $\gamma > ۱$ مقعر لگاریتمی است .

اثبات. فرض کنید $z = (۱+\lambda x)^{\alpha}$. لذا برای $x > ۰$ ، $z > ۱$ می‌باشد. بنابراین تابع چگالی EGNH بر حسب z به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\xi(z) = f\left(\frac{z^{۱/\alpha}-۱}{\lambda}\right) = \alpha\lambda\beta\gamma\frac{z^{(\alpha-۱)/\alpha}\ \exp(\beta-\beta z)}{[۱-\exp(\beta-\beta z)]^{۱-\beta}},$$

با دو بار مشتق گیری از $\log[\xi(z)]$ داریم:

$$\frac{d^{۲}\log[\xi(z)]}{dz^{۲}} = -\left[\frac{(\alpha-۱)}{\alpha z^{۲}} + \frac{(\gamma-۱)\beta^{۲}\ e^{\beta-\beta z}}{[۱-e^{\beta-\beta z}]^{۲}}\right].$$

اکنون با توجه به اینکه، برای $\alpha < ۱$ و $\gamma < ۱$ ، $\frac{d^{۲}\log[\xi(z)]}{dz^{۲}} > ۰$ و برای $\alpha > ۱$ و $\gamma > ۱$ $\frac{d^{۲}\log[\xi(z)]}{dz^{۲}} < ۰$ می‌باشد لذا حکم ثابت می‌شود.

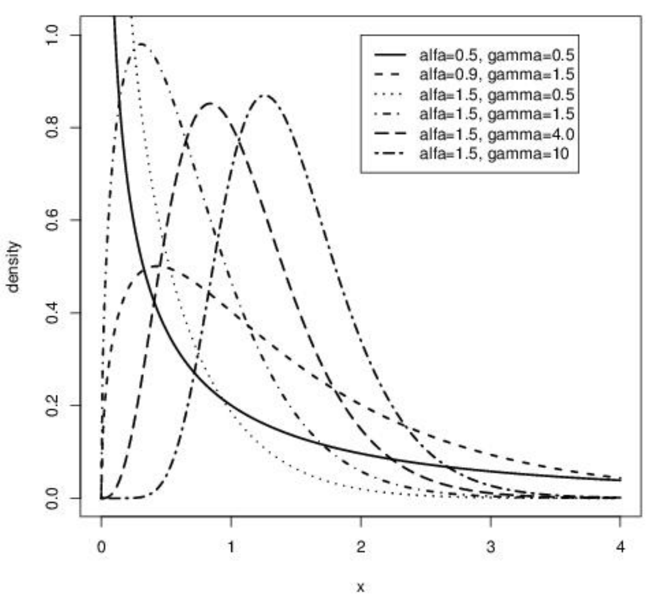
□

تابع بقا و تابع نرخ شکست توزیع EGNH به ترتیب به صورت زیر می‌باشند:

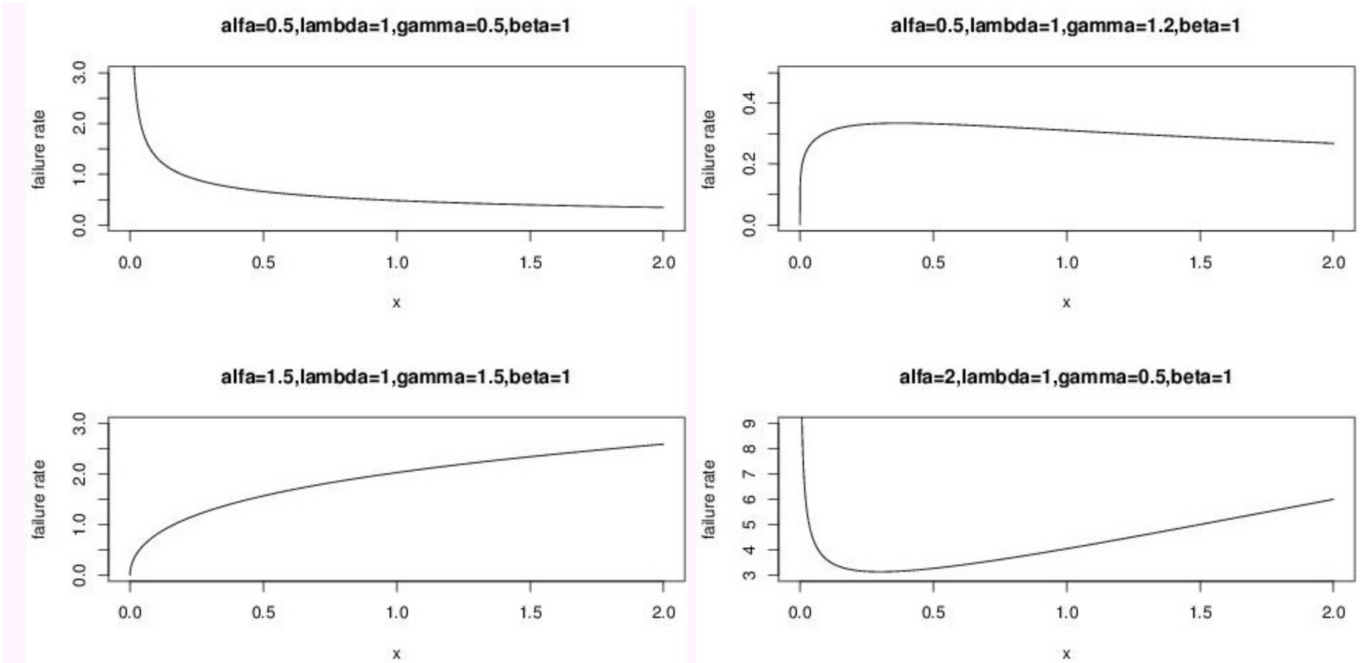
$$s(x) = ۱ - F(x) = ۱ - [۱-\exp\{\beta-\beta(۱+\lambda x)^{\alpha}\}]^{\gamma},$$

$$\begin{aligned} h(x) = \frac{f(x)}{s(x)} &= \alpha\lambda\beta\gamma(۱+\lambda x)^{\alpha-۱} \\ &\times \exp\{\beta-\beta(۱+\lambda x)^{\alpha}\} \\ &\times \frac{[۱-\exp\{\beta-\beta(۱+\lambda x)^{\alpha}\}]^{\gamma-۱}}{۱-[۱-\exp\{\beta-\beta(۱+\lambda x)^{\alpha}\}]^{\gamma}} \end{aligned} \quad (۷)$$

.



شکل۱. نمودار تابع چگالی توزیع EGNH به ازای پارامترهای مختلف



شکل۲. نمودار تابع نرخ خطر توزیع EGNH .

برای مطالعه ی رفتار تابع نرخ شکست توزیع EGNH به لم زیر، که به لم گلاسر [۵] معروف است نیاز داریم.

لم ۱.۲. [٤] : فرض کنید $\pi(x) = -\frac{d}{dx}\log f(x)$،

۱. اگر به ازای همه ی $x > 0$، $\pi'(x) < 0$ باشد آنگاه تابع نرخ شکست به طور یکنواخت نزولی می‌باشد.

۲. اگر به ازای همه ی $x > 0$، $\pi'(x) > 0$ باشد آنگاه تابع نرخ شکست به طور یکنواخت صعودی می‌باشد.

قضیه ۲.۲. تابع نرخ شکست توزیع *EGNH* برای $\alpha > 1$ و $\gamma > 1$ صعودی و برای $\alpha < 1$ و $\gamma < 1$ نزولی و برای $\alpha = \gamma = 1$ ثابت می‌باشد.

اثبات. با استفاده از نتایج بدست آمده از قضیه ۲ داریم:

$$\pi'(x) = -\frac{d^2 \log[\xi(z)]}{dz^2} = \left[\frac{(\alpha-1)}{\alpha z^2} + \frac{(\gamma-1)\beta^2\, e^{\beta-\beta z}}{[1-e^{\beta-\beta z}]^2}\right].$$

بنابراین با توجه به لم گلاسر، تابع نرخ شکست برای $\alpha > 1$ و $\gamma > 1$ صعودی و برای $\alpha < 1$ و $\gamma < 1$ نزولی می‌باشد و همچنین برای $\alpha = \gamma = 1$ ثابت می‌باشد. □

شکل ۲، تابع نرخ شکست توزیع EGNH را به ازای پارامترهای مختلف نشان می‌دهد. با توجه به اینکه λ پارامتر مقیاس است، در همه ی نمودارها $\lambda = 1$ فرض شده است. همان طور که مشاهده می‌شود تابع نرخ شکست توزیع EGNH می‌تواند صعودی، نزولی، وانی شکل و یا وانی شکل معکوس باشد. این در حالیست که تابع نرخ شکست توزیع NH فقط می‌تواند نزولی، صعودی و یا ثابت باشد. از اینرو توزیع EGNH در مقایسه با توزیع NH انعطاف‌پذیرتر بوده و لذا می‌تواند برای برازش انواع مختلف داده ها بکار رود.

تابع چندک و میانه توزیع EGNH به ترتیب به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} Q(p) &= F^{-1}(p) \\ &= \frac{1}{\lambda}\{[1-\beta^{-1}\log(1-p^{1/\gamma})]^{\frac{1}{\alpha}}-1\}, \qquad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Median(X) = F^{-1}(1/2) &= \frac{1}{\lambda}\{[1+(\gamma\beta)^{-1}\log(2) \\ &- \log(2^{1/\gamma}-1)]^{\frac{1}{\alpha}}-1\}. \end{aligned}$$

۳ خواص گشتاوری

فرض کنید $X \sim EGNH(\alpha,\lambda,\beta,\gamma)$ ، آنگاه □ -امین گشتاور □ عبارت است از:

[۵] Glaser Lemma

$$\begin{aligned}\mu'_s &= E(X^s) = \int_{\cdot}^{\infty} x^s f(x)dx \\ &= \alpha\lambda\beta\gamma \int_{\cdot}^{\infty} x^s(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha-\text{۱}} \\ &\times \frac{\exp\{\beta-\beta(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}\}}{[\text{۱}-\exp\{\beta-\beta(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}\}]^{\text{۱}-\gamma}}dx.\end{aligned}$$

با توجه به بسط زیر

$$\begin{aligned}&[\text{۱}-\exp\{\beta-\beta(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}\}]^{\text{۱}-\gamma} \\ &= \sum_{j=\cdot}^{\infty}\binom{\gamma-\text{۱}}{j}(-\text{۱})^j e^{\beta j[\text{۱}-(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}]},\end{aligned}$$

نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\mu'_s &= \alpha\lambda\beta\gamma \int_{\cdot}^{\infty} x^s(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha-\text{۱}}\exp\{\beta-\beta(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}\} \\ &\times \sum_{j=\cdot}^{\infty}\binom{\gamma-\text{۱}}{j}(-\text{۱})^j e^{\beta j[\text{۱}-(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}]}dx,\end{aligned}$$

از آنجائیکه عبارت داخل مجموع انتگرال پذیر می‌باشد لذا می‌توان جای انتگرال و مجموع را با هم عوض کرد بنابراین:

$$\begin{aligned}\mu'_s &= \alpha\lambda\beta\gamma \sum_{j=\cdot}^{\infty}\binom{\gamma-\text{۱}}{j}(-\text{۱})^j \int_{\cdot}^{\infty} x^s(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha-\text{۱}} \\ &\times \exp\{\beta-\beta(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}\}e^{\beta j[\text{۱}-(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}]}dx, \\ &= \alpha\lambda\beta\gamma \sum_{j=\cdot}^{\infty}\binom{\gamma-\text{۱}}{j}(-\text{۱})^j\ e^{\beta(j+\text{۱})} \\ &\int_{\cdot}^{\infty} x^s(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha-\text{۱}}e^{-\beta(j+\text{۱})(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}}dx.\end{aligned}$$

برای $s>\cdot$ صحیح و با انتخاب $y=\beta(j+\text{۱})(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}$ داریم:

$$\begin{aligned}&\int_{\cdot}^{\infty} x^s(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha-\text{۱}}e^{-\beta(j+\text{۱})(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}}dx \\ &= \frac{\text{۱}}{\alpha\lambda^s\beta(j+\text{۱})}\int_{\beta(j+\text{۱})}^{\infty}\left((\frac{y}{\beta(j+\text{۱})})^{\text{۱}/\alpha}-\text{۱}\right)^s e^{-y}dy \\ &= \frac{\text{۱}}{\alpha\lambda^{s+\text{۱}}}\int_{\beta(j+\text{۱})}^{\infty}\sum_{i=\cdot}^{s}\binom{s}{i}\frac{(-\text{۱})^{s-i}}{(\beta(j+\text{۱}))^{\frac{i}{\alpha}+\text{۱}}}\ y^{\frac{i}{\alpha}}\ e^{-y}\ dy \\ &= \frac{\text{۱}}{\alpha\lambda^{s+\text{۱}}}\sum_{i=\cdot}^{s}\binom{s}{i}\frac{(-\text{۱})^{s-i}}{(\beta(j+\text{۱}))^{\frac{i}{\alpha}+\text{۱}}}\int_{\beta(j+\text{۱})}^{\infty} y^{\frac{i}{\alpha}}e^{-y}dy \\ &= \frac{\text{۱}}{\alpha\lambda^{s+\text{۱}}}\sum_{i=\cdot}^{s}\binom{s}{i}\frac{(-\text{۱})^{s-i}}{(\beta(j+\text{۱}))^{\frac{i}{\alpha}+\text{۱}}}\Gamma\left(\frac{i}{\alpha}+\text{۱},\beta(j+\text{۱})\right).\end{aligned}$$

که در آن $\Gamma(a,x)=\int_x^{\infty} z^{a-\text{۱}}e^{-z}dz$ تابع گاما ناقص می‌باشد. بنابراین s -امین گشتاور X عبارت است از:

$$\begin{aligned}\mu'_s &= \gamma\lambda^{-s}\sum_{j=\cdot}^{\infty}\sum_{i=\cdot}^{s}\binom{\gamma-\text{۱}}{j}\binom{s}{i}\frac{(-\text{۱})^{s+j-i}\ e^{\beta(j+\text{۱})}}{\beta^{\frac{i}{\alpha}}(j+\text{۱})^{\frac{i}{\alpha}+\text{۱}}} \\ &\times \Gamma\left(\frac{i}{\alpha}+\text{۱},\beta(j+\text{۱})\right). \qquad (\text{۹})\end{aligned}$$

همچنین s -امین گشتاور ناقص X عبارت است از:

$$\begin{aligned}T_s(y) &= E(X^s|X>y) \\ &= \int_y^{\infty} x^s f(x)dx \\ &= \alpha\lambda\beta\gamma\int_y^{\infty} x^s(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha-\text{۱}} \\ &\times \frac{\exp\{\beta-\beta(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}\}}{[\text{۱}-\exp\{\beta-\beta(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}\}]^{\text{۱}-\gamma}}dx \\ &= \alpha\lambda\beta\gamma\int_y^{\infty} x^s(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha-\text{۱}}\sum_{j=\cdot}^{\infty}\binom{\gamma-\text{۱}}{j} \\ &\times (-\text{۱})^j\ e^{\beta(j+\text{۱})[\text{۱}-(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}]}\ dx \\ &= \alpha\lambda\beta\gamma\sum_{j=\cdot}^{\infty}\binom{\gamma-\text{۱}}{j}(-\text{۱})^j \\ &\times \int_y^{\infty} x^s(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha-\text{۱}}\ e^{\beta(j+\text{۱})[\text{۱}-(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}]}dx \\ &= \alpha\lambda\beta\gamma\sum_{j=\cdot}^{\infty}\binom{\gamma-\text{۱}}{j}(-\text{۱})^j\ e^{\beta(j+\text{۱})} \\ &\times \int_y^{\infty} x^s(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha-\text{۱}}\ e^{-\beta(j+\text{۱})(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}}dx.\end{aligned}$$

توجه کنید که با تغییر متغیر $z=\beta(j+\text{۱})(\text{۱}+\lambda x)^{\alpha}$ ، می‌توان $T_s(y)$ را بر حسب تابع گامای ناقص نوشت.

۴ میانگین انحرافات

میانگین انحراف از میانگین $\delta_{\text{۱}}(X)$ و میانگین انحراف از میانه $\delta_{\text{۲}}(X)$ دو معیار پراکندگی می‌باشند که به ترتیب به صورت زیر تعریف میشوند :

$$\delta_{\text{۱}}(X)=\int_{\cdot}^{\infty}|x-\mu|f(x)dx,$$

$$\delta_{\text{۲}}(X)=\int_{\cdot}^{\infty}|x-M|f(x)dx,$$

که در آن $M = Median(X)$ و $\mu = E(X)$ می‌باشد. می‌توان نشان داد که $\delta_{\text{۱}}(x) = \text{۲}\mu F(\mu) - \text{۲}H(\mu)$

و $\delta_2(x) = \mu - 2H(M)$، که در آن

$$\begin{aligned} H(q) &= \int_0^q x f(x) dx \\ &= \int_0^\infty x f(x) - \int_q^\infty x f(x) dx. \end{aligned}$$

با استفاده از اولین گشتاور و همچنین اولین گشتاور ناقص □ داریم:

$$\begin{aligned} H(q) &= \gamma\lambda^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{1} \binom{\gamma-1}{j} \binom{1}{i} \frac{(-1)^{1+j-i} \quad e^{\beta(j+1)}}{\beta^{\frac{i}{\alpha}} (j+1)^{\frac{i}{\alpha}+1}} \\ & \left\{\Gamma\left(\frac{i}{\alpha}+1, \beta(j+1)\right) - \right. \\ & \left. \Gamma\left(\frac{i}{\alpha}+1, \beta(j+1)(1+\lambda p)^{\alpha}\right)\right\}, \end{aligned}$$

که با جایگذاری در $\delta_1(X)$ و $\delta_2(X)$ ، میانگین انحرافات بدست می‌آیند.

۵ برآورد پارامترها

در این بخش، برآورد پارامترهای توزیع EGNH با استفاده از روش درستنمایی ماکزیمم بحث می‌شود. فرض کنید که $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ یک نمونه ی تصادفی به حجم □ از توزیع $EGNH(\alpha, \lambda, \beta, \gamma)$ باشند و $\theta = (\alpha, \lambda, \beta, \gamma)^{\top}$ بردار پارامترها باشد. لگاریتم تابع درستنمایی برای θ بر حسب نمونه تصادفی فوق عبارت است از :

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= \log L(\alpha, \lambda, \beta) = n\beta + n\log(\alpha\lambda\beta\gamma) \\ &+ (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log(1+\lambda x_i) - \beta\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda x_i)^{\alpha} \\ &+ (\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left(1-\exp\left[\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}\right]\right). \end{aligned} \tag{10}$$

با مشتق گیری از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به پارامترهای α، λ، β و γ داریم :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\alpha} &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\log(1+\lambda x_i) \\ &- \beta\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda x_i)^{\alpha}\log(1+\lambda x_i) + \beta(\gamma-1) \\ &\times \sum_{i=1}^{n}\frac{(1+\lambda x_i)^{\alpha}\log(1+\lambda x_i)e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\lambda} &= \frac{n}{\lambda} + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+\lambda x_i} \\ &- \alpha\beta\sum_{i=1}^{n}x_i(1+\lambda x_i)^{\alpha-1} + \alpha\beta(\gamma-1) \\ &\times \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i(1+\lambda x_i)^{\alpha-1}e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\beta} &= n + \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}(1+\lambda x_i)^{\alpha} - (\gamma-1) \\ &\times \sum_{i=1}^{n}\frac{(1-(1+\lambda x_i)^{\alpha})e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\gamma} = \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}).$$

لذا برآوردگر درستنمایی ماکزیمم θ یعنی $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})^{\top}$ با استفاده از حل معادلات

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\alpha} = \frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\beta} = \frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\gamma} = 0$$

بدست می‌آید که می‌توان از روش های عددی برای حل این معادلات استفاده کرد.

توجه کنید که واریانس مجانبی براوردگرهای درستنمایی ماکزیمم با وارون کردن ماتریس اطلاع فیشر بدست می‌آید. ماتریس واریانس-کوواریانس بردار برآوردگر $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})^{\top}$ می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} & \sigma_{\alpha\lambda} & \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_{\alpha\gamma} \\ \sigma_{\alpha\lambda} & \sigma_{\lambda\lambda} & \sigma_{\lambda\beta} & \sigma_{\lambda\gamma} \\ \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_{\lambda\beta} & \sigma_{\beta\beta} & \sigma_{\beta\gamma} \\ \sigma_{\alpha\gamma} & \sigma_{\gamma\lambda} & \sigma_{\gamma\beta} & \sigma_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J_{\alpha\alpha} & J_{\alpha\lambda} & J_{\alpha\beta} & J_{\alpha\gamma} \\ J_{\alpha\lambda} & J_{\lambda\lambda} & J_{\lambda\beta} & J_{\lambda\gamma} \\ J_{\alpha\beta} & J_{\lambda\beta} & J_{\beta\beta} & J_{\beta\gamma} \\ J_{\alpha\gamma} & J_{\gamma\lambda} & J_{\gamma\beta} & J_{\gamma\gamma} \end{pmatrix}^{-1}_{\Big|\alpha=\hat{\alpha},\lambda=\hat{\lambda},\beta=\hat{\beta},\gamma=\hat{\gamma}},$$

که در آن

$$J = \begin{pmatrix} J_{\alpha\alpha} & J_{\alpha\lambda} & J_{\alpha\beta} & J_{\alpha\gamma} \\ J_{\alpha\lambda} & J_{\lambda\lambda} & J_{\lambda\beta} & J_{\lambda\gamma} \\ J_{\alpha\beta} & J_{\lambda\beta} & J_{\beta\beta} & J_{\beta\gamma} \\ J_{\alpha\gamma} & J_{\gamma\lambda} & J_{\gamma\beta} & J_{\gamma\gamma} \end{pmatrix},$$

ماتریس اطلاع فیشر می‌باشد و

$$\begin{aligned}
J_{\alpha\alpha} &= -\frac{n}{\alpha^2} - \beta\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda x_i)^{\alpha}[\log(1+\lambda x_i)]^2 \\
&+ (\beta-1)\beta(\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda x_i)^{\alpha} \\
&\times \frac{[\log(1+\lambda x_i)]^2\ e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\alpha\lambda} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+\lambda x_i} - \beta\sum_{i=1}^{n}x_i(1+\lambda x_i)^{\alpha} \\
&- \alpha\beta\sum_{i=1}^{n}x_i(1+\lambda x_i)^{\alpha-1}\log(1+\lambda x_i) \\
&+ \beta(\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}x_i(1+\lambda x_i)^{\alpha-1} \\
&\times \frac{e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}\{1+\alpha\log(1+\lambda x_i)\}}{1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\alpha\beta} &= -\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda x_i)^{\alpha}\ log(1+\lambda x_i) \\
&+ (\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda x_i)^{\alpha}\ log(1+\lambda x_i) \\
&\times \frac{e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}} \\
&+ \beta(\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}(1-(1+\lambda x_i)^{\alpha})(1+\lambda x_i)^{\alpha} \\
&\times \frac{log(1+\lambda x_i)\ e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{[1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\lambda\beta} &= -\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i(1+\lambda x_i)^{\alpha-1} \\
&+ \alpha(\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i(1+\lambda x_i)^{\alpha-1}\ e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}} \\
&+ \alpha\beta(\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}x_i(1-(1+\lambda x_i)^{\alpha}) \\
&\times \frac{(1+\lambda x_i)^{\alpha-1}\ e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{[1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\lambda\lambda} &= -\frac{n}{\lambda^2} - (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{(1+\lambda x_i)^2} \\
&- \alpha\beta(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2(1+\lambda x_i)^{\alpha-2} \\
&+ \alpha^2\beta(\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2(1+\lambda x_i)^{\alpha-2} \\
&\times \frac{e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}} \\
&- \alpha^2\beta^2(\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2(1+\lambda x_i)^{2(\alpha-1)} \\
&\times \frac{e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{[1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\beta\beta} &= -\frac{n}{\beta^2} - (\gamma-1)\sum_{i=1}^{n}(1-(1+\lambda x_i)^{\alpha})^2 \\
&\times \frac{e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{[1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}]^2}
\end{aligned}$$

$$J_{\gamma\gamma} = -\frac{n}{\gamma^2}$$

$$J_{\gamma\alpha} = \beta\sum_{i=1}^{n}\frac{(1+\lambda x_i)^{\alpha}\log(1+\lambda x_i)\ e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}$$

$$J_{\gamma\lambda} = \alpha\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i(1+\lambda x_i)^{\alpha-1}\ e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}$$

$$J_{\beta\gamma} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-(1+\lambda x_i)^{\alpha})\ e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}{1-e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^{\alpha}}}$$

توجه کنید که از روی ماتریس اطلاع فوق می‌توان فواصل اطمینان مجانبی را برای پارامترها تعیین کرد. به عنوان مثال یک فاصله اطمینان مجانبی با ضریب اطمینان $1-\tau$ برای پارامتر α عبارت خواهد بود از $\hat{\alpha} \pm z_{\frac{\tau}{2}}\sqrt{\sigma_{\alpha\alpha}}$.

۶ شبیه سازی

در این بخش کارایی روش درستنمایی ماکزیمم به کمک شبیه سازی مونت کارلو مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این شبیه سازی نمونه هایی به اندازه ی n از توزیع EGNH تولید کرده و سپس برآوردهای درستمایی ماکزیمم α و β و λ و γ را محاسبه نموده

ایم. جدول ۱ میانگین اریبی و جذر میانگین مربع خطای [۶] ($\sqrt{MSE}$) برآوردها را در $R = ۵۰۰۰$ بار شبیه سازی نشان می‌دهد. در این شبیه سازی مقادیر مختلف (n, α, γ) در نظر گرفته شده است. حجم نمونه به اندازه ی (n) ۲۰۰ و ۴۰۰ می‌باشد و $\alpha = ۰/۷, ۱/۷$ و $\gamma = ۰/۵, ۱/۵, ۲$ می‌باشد و $\lambda = \beta = ۱$ در نظر گرفته شده است. از جدول ۱ مشاهده می‌شود که با افزایش اندازه نمونه n همانطور که انتظار می‌رود میانگین اریبی هریک از براوردگرها کاهش می‌یابد و جذر میانگین مربعات خطای برآوردها کم می‌شود.

جدول ۱. میانگین برآورد و جذر میانگین مربعات خطا (در پرانتز) برای توزیع EGNH

α	γ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
$n = ۲۰۰$					
۰/۷	۰/۵	۰/۰۰۸۹(۰/۱۸۴۲)	۰/۵۳۵۶(۱/۷۸۷۴)	۰/۳۱۳۰(۱/۰۴۹۳)	۰/۰۱۰۱(۰/۰۶۶۴)
۰/۷	۱/۵	۰/۰۴۱۰(۰/۱۴۶۶)	۰/۵۰۲۰(۱/۳۳۹۸)	۰/۱۹۸۶(۰/۷۴۴۳)	۰/۰۷۱۸(۰/۳۴۷۲)
۰/۷	۲/۰	۰/۰۰۲۹(۰/۱۵۱۴)	۰/۰۵۷۹(۰/۷۵۸۹)	۰/۲۴۹۷(۰/۷۹۲۱)	۰/۰۳۴۸(۰/۴۵۷۹)
۱/۷	۰/۵	۰/۵۴۴۹(۱/۳۲۹۰)	۰/۰۳۵۷(۰/۹۶۵۷)	۰/۲۸۳۷(۰/۶۳۲۸)	۰/۰۰۳۹(۰/۰۵۵۸)
۱/۷	۱/۵	۰/۳۲۴۱(۰/۷۴۸۳)	۰/۰۹۷۸(۰/۶۵۴۹)	۰/۳۱۲۷(۰/۶۵۳۹)	۰/۰۴۱۱(۰/۲۸۲۰)
۱/۷	۲/۰	۰/۴۴۹۹(۱/۱۱۲۶)	۰/۲۳۳۸(۰/۶۳۹۵)	۰/۴۳۵۳(۰/۸۰۱۰)	۰/۱۰۹۵(۰/۴۴۶۱)
$n = ۴۰۰$					
۰/۷	۰/۵	۰/۰۰۵۹(۰/۱۱۸۶)	۰/۳۱۳۸(۱/۰۶۸۱)	۰/۲۲۹۳(۰/۷۷۲۳)	۰/۰۰۴۹(۰/۰۴۳۴)
۰/۷	۱/۵	۰/۰۰۷۶(۰/۱۰۴۶)	۰/۳۰۴۳(۰/۹۹۲۷)	۰/۱۶۳۵(۰/۵۷۶۸)	۰/۰۴۰۳(۰/۲۳۳۰)
۰/۷	۲/۰	۰/۰۰۲۷(۰/۱۰۵۵)	۰/۰۳۰۲(۰/۴۸۴۰)	۰/۱۷۸۷(۰/۵۲۵۸)	۰/۰۰۶۱(۰/۲۸۷۰)
۱/۷	۰/۵	۰/۳۶۸۶(۰/۸۴۶۹)	۰/۰۱۸۸(۰/۷۶۸۳)	۰/۲۳۶۰(۰/۵۲۱۱)	۰/۰۰۳۵(۰/۰۳۹۹)
۱/۷	۱/۵	۰/۲۳۰۶(۰/۵۵۴۲)	۰/۰۸۸۸(۰/۵۷۵۳)	۰/۲۳۹۷(۰/۵۱۵۹)	۰/۰۲۸۲(۰/۱۹۴۲)
۱/۷	۲/۰	۰/۴۱۹۶(۰/۹۶۰۸)	۰/۲۱۳۹(۰/۵۸۷۱)	۰/۴۲۲۸(۰/۷۷۵۹)	۰/۰۷۹۶(۰/۳۰۰۰)

[۶] Root Mean Square Error

۷ تحلیل داده های واقعی

در این بخش دو سری داده واقعی را در نظر گرفته و توزیع EGNH را به این دو سری داده ها برازش می‌دهیم. داده های جدول ۲ ، داده های مربوط به مدت زمان تعمیر قطعه ای از هواپیما می‌باشد که توسط یورنسن [۷] [٦] گزارش شده است. مجموعه داده های دوم در جدول ۳ قرار دارند که تعداد خرابی لاستیک های با قطر ۲۵– ۱۰۰ سانتی متر می‌باشد که این داده ها در لاولس [۸] [۷] گزارش شده اند. به این مجموعه داده ها، توزیع NH تعمیم یافته نمایی شده (EGNH) و توزیع های وایبل نمایی شده (EW) ، NH نمایی شده (ENH) [۸] ،نمایی نمایی شده (EE)، وایبل انعطاف‌پذیر (FW) و توزیع NH را برازش نموده ایم. تابع توزیع مربوط به توزیع های وایبل نمایی شده، وایبل انعطاف‌پذیر، NH نمایی شده و نمایی نمایی شده به صورت زیر می‌باشند:

$$F_{EW}(x) = \left[1 - e^{-\lambda(x-\mu)^{\alpha}}\right]^{\beta} \quad x > \mu,$$

$$F_{FW}(x) = 1 - \exp\{-\exp(\alpha x - \beta/x)\} \quad x > 0,$$

$$F_{ENH}(x) = [1 - \exp\{1 - (1+\lambda x)^{\alpha}\}]^{\beta} \quad x > 0,$$

$$F_{EE}(x) = (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha} \quad x > 0.$$

برای برازش و مقایسه توزیعهای داده شده از لگاریتم تابع درستنمایی و آزمون کولموگروف–اسمیرنف استفاده شده است. در جدول ٤، برآورد پارامترها و نتایج آزمون فوق و همچنین مقدار لگاریتم درستنمایی برای داده های زمان تعمیر ارائه شده است. نتایج متناظر برای تعداد خرابی ها در جدول ۵ آمده است. با توجه به آزمون کولموگروف و $p-value$ مربوط به آن و همچنین مقدار لگاریتم تابع درستنمایی مشاهده می‌شود که توزیع EGNH برازش بهتری را نسبت به توزیع های دیگر برای دو مجموعه داده های واقعی ارائه می‌کند.

۸ نتیجه گیری

در این مقاله با افزودن دو پارامتر شکل بتا و گاما به توزیع NH، تعمیمی از توزیع NH معرفی گردید. با توجه به اینکه توزیع جدید دارای نرخ شکست صعودی، نزولی، وانی شکل و وانی شکل معکوس است، این توزیع انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به توزیع NH دارد و لذا می‌تواند برای مدل بندی انواع مختلفی از داده ها بکار رود.

جدول ۲. مدت زمان تعمیر قطعه

۰/۵۰	۰/۶۰	۰/۶۰	۰/۷۰	۰/۷۰	۰/۷۰	۰/۸۰	۰/۸۰	۱/۰۰	۱/۰۰
۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۱۰	۱/۳۰	۱/۵۰	۱/۵۰	۱/۵۰	۱/۵۰	۲/۰۰	۲/۰۰
۲/۲۰	۲/۵۰	۲/۷۰	۳/۰۰	۳/۰۰	۳/۳۰	۴/۰۰	۴/۰۰	۴/۵۰	۴/۷۰
۵/۰۰	۵/۴۰	۵/۴۰	۷/۰۰	۷/۵۰	۸/۸۰	۹/۰۰	۱۰/۲۰	۲۲/۰	۲۴/۵۰

جدول ۳. تعداد خرابی لاستیک

۱۵	۲۰	۳۸	۴۲	۶۱	۷۶	۸۶	۹۸	۱۲۱	۱۴۶
۱۴۹	۱۵۷	۱۷۵	۱۷۶	۱۸۰	۱۸۰	۱۹۸	۲۲۰	۲۲۴	۲۵۱
۲۶۴	۲۸۲	۳۲۱	۳۲۵	۶۵۳					

[۷] Jørgensen

[۸] Lawless

جدول ۴. برآورد درستنمایی ماکزیمم ، آزمون کولموگروف و $p-value$ مربوط به آن و مقدار لگاریتم تابع درستنمایی برای داده های زمان تعمیر .

توزیع	برآوردها	K-S	p-value	لگاریتم درستنمایی
$EGNH(\alpha,\lambda,\beta,\gamma)$	(۰/۰۷۵۳, ۳۴/۶۲۷۲, ۱۱/۶۶۵۲, ۵۷/۷۳۳۳)	۰/۰۹۷۶	۰/۸۴۰۳	−۸۹/۴۱۸۳
$EW(\alpha,\lambda,\beta,\mu)$	(۰/۱۲۲۵, ۱۳/۵۶۲۳, ۱۲۵۴/۳۸۴۱, ۰/۲۵۶۹)	۰/۱۰۲۳	۰/۸۲۱۴	−۸۹/۷۲۳۶
$ENH(\alpha,\lambda,\beta)$	(۰/۲۴۲۹, ۳۱۹/۸۸۵۲, ۳۴/۲۲۲۶)	۰/۱۰۷۱	۰/۷۴۸۲	−۸۹/۸۱۴۲
$EE(\lambda,\delta)$	(۱/۱۱۳۸, ۰/۲۶۷۸)	۰/۱۵۸۴	۰/۲۶۸۴	−۹۵/۴۵۷۹
$FW(\alpha,\beta)$	(۰/۰۹۹۵, ۲/۱۴۴۶)	۰/۲۰۷۴	۰/۰۶۴۱	−۲۱۰/۸۵۵۵
$NH(\alpha,\lambda)$	(۰/۷۰۹۴, ۰/۴۵۵۶)	۰/۱۴۵۶	۰/۳۶۴۹	−۹۴/۷۴۵۰

جدول ۵. برآورد درستنمایی ماکزیمم ، آزمون کولموگروف و $p-value$ مربوط به آن و مقدار لگاریتم تابع درستنمایی برای داده های تعداد خرابی .

توزیع	برآوردها	K-S	p-value	لگاریتم درستنمایی
$EGNH(\alpha,\lambda,\beta,\gamma)$	(۱/۰۹۲۴, ۱/۲۹۱۶, ۰/۰۰۳۳, ۱/۵۸۲۴)	۰/۱۲۹۷	۰/۷۹۴۲	−۱۵۲/۴۳۷۳
$EW(\alpha,\lambda,\beta,\mu)$	(۰/۹۵۲۲, ۰/۰۸۷۴, ۲/۲۸۴۵, ۰/۱۴۵۹)	۰/۱۶۲۸	۰/۵۲۴۱	−۱۵۳/۶۴۲۳
$ENH(\alpha,\lambda,\beta)$	(۰/۸۶۵۴, ۰/۰۰۷۸, ۱/۲۲۰۳)	۰/۱۸۵۷	۰/۳۵۴۸	−۱۵۳/۹۴۶۶
$EE(\lambda,\delta)$	(۱/۸۸۳۸, ۰/۰۰۸۲)	۰/۱۴۵۰	۰/۶۶۹۳	−۱۵۲/۴۹۰۸
$FW(\alpha,\beta)$	(۰/۰۱۲۵, ۰/۶۷۱۸)	۰/۷۲۲۹	−۱۲[illegible]۸/۹۶۵	−۴۱۲۹/۷۶۶
$NH(\alpha,\lambda)$	(۲/۸۸۷۹, ۰/۰۰۱۴)	۰/۱۴۴۷	۰/۶۷۱۸	−۱۵۳/۲۸۸۹

مراجع

[۱] قربان نژاد محلی، م. (۱۳۹۴)، توزیع *NH* : برآوردیابی و تعمیم ها، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه مازندران.

[2] Bebbington, M., Lai, C.D., Zitikis, R., (2007). A flexible Weibull extension. *Reliability Engineering and System Safety*, 92, 719–726.

[3] Cordeiro, G. M. & de Castro, M. (2011). A new family of generalized distributions,*Journal of Statistical Computation and Simulation* , 11, 1–27.

[4] Glaser, R. E. (1980). Bathtub and Related Failure Rate Characterizations, *Jour- nal of American Statistical Association* , 75, 667-672.

[5] Johnson, N., Kotz and S., Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions* —Volume 1, second ed. Wiley, New York.

[6] Jorgensen, B. (1982). Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution.*Springer-Verlag* ,New York.

[7] Lawless .J. F. (2003). Statistical models and methods for lifetime data. *Wiley*, New York.

[8] Lemonte, A. J. (2013). A new exponential-type distribution with constant,decreasing, increasing, upside-down bathtub and bathtub-shaped failure rate function.*Computational Statistics and Data Analysis* , 62 ,149-170 .

[9] Nadarajah, S. and Haghighi, F. (2011). An extension of the exponential distribution. *Statistics*, 45, 543–558.