برآورد دنباله‌ای ترکیب خطی از پارامترهای مکان و مقیاس در توزیع نمایی منفی

عیسی محمودی [1]، معصومه رفیعی [2]

چکیده:

روش برآورد دنباله‌ای زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که حجم نمونه استفاده شده مقداری ثابت نباشد و یا مساله با روش اندازه‌ی نمونه ثابت قابل حل نباشد. برآورد دنباله‌ای میانگین توزیع نمایی (یک پارامتری و دو پارامتری) یکی از مسائل مهمی است که اهمیت کاربردی آن توجه نویسندگان زیادی را به خود جلب کرده است. اکثر پژوهش‌ها بر روی توزیع نمایی (یک یا دو پارامتری) صورت گرفته است. در این مقاله روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای برای برآورد ترکیب خطی از پارامترهای مکان و مقیاس در توزیع نمایی دو پارامتری (نمایی منفی) که برای اولین بار توسط موخوپادهای و زاکس[3] در سال ۲۰۰۷ پیشنهاد شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت برای نشان دادن درستی آنچه به صورت تئوری اثبات شده است، شبیه سازی‌هایی آورده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تابع زیان، روش دنباله‌ای، روش دومرحله‌ای، مسئله‌ی مخاطره کراندار شده.

۱ مقدمه

در بسیاری از مسایل آماری نمی‌توان با یک اندازه نمونه ثابت به استنباط در مورد پارامتر مورد نظر پرداخت، اما استفاده از روش دنباله‌ای می‌تواند در این زمینه کارگشا باشد. در دهه اخیر روش‌های دنباله‌ای مورد توجه بسیاری قرار گرفته‌اند و کاربردهای آنها در زمینه‌های کشاورزی، آزمایشهای بالینی، داده کاوی، دارایی، شبیه سازی کامپیوتری و مقایسه‌های چند گانه بیان شده است.

در تحلیل دنباله‌ای، یک آزمایشگر اطلاعات مربوط به پارامتر مجهول را بوسیله مشاهده‌ی یک نمونه تصادفی جمع آوری می‌کند. تعداد کل مشاهداتی که در پایان جمع می‌شوند یک متغیر تصادفی مثبت است که با N نشان داده می‌شود. در این‌صورت پارامتر مورد نظر، θ، براساس برآوردگر $W_N = W(X_1, ..., X_N)$ که تابعی از متغیر تصادفی N است برآورد می‌شود.

فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع $X_1, X_2, \cdots$، دارای توزیع نمایی منفی با تابع چگالی احتمال

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} & x > \alpha \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}, \qquad (1)$$

باشند، به‌طوری که $\alpha \in R$ و $\beta > 0$ پارامترهای نامعلوم هستند. ترکیب‌های خطی از α و β به‌فرم $\theta = c\alpha + d\beta$، $d > 0$ و $c \geq 0$، را در نظر بگیرید. این ترکیبات خطی شامل میانگین توزیع $\mu = \alpha + \beta$، چندک مرتبه‌ی pام، $x_p = \alpha - \ln(1-p)\beta$ و انحراف استاندارد توزیع یعنی $\sigma = \beta$ است.

اگر تعریف کنیم $X_{1:n} = \min\{X_1, ..., X_n\}$ و $T_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{1:n})$، آنگاه $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(c,d) = c\hat{\alpha}_n + d\hat{\beta}_n$ برآوردگر ناااریب با کمترین واریانس برای θ است که $\hat{\alpha}_n = X_{1:n} - \frac{\hat{\beta}_n}{n}$ و $\hat{\beta}_n = \frac{T_n}{n-1}$. اگر تابع مخاطره‌ی برآوردگر $\hat{\theta}_n$ برای هر مقدار ثابت $A > 0$ به صورت

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = AE_{\alpha,\beta}\left[(\hat{\theta}_n - \theta)^2\right], \qquad (2)$$

در نظر گرفته شود، می‌توان نوشت:

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = A\frac{d^2}{n}\beta^2 + O(\frac{1}{n^2}).$$

آنچه در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد، کراندار کردن مخاطره به‌دست آمده توسط مقدار ثابت ω است به‌طوری که $\omega > 0$. اما با استفاده از روش نمونه‌گیری با حجم ثابت نمی‌توان به ازای هر

[1] عضو هیات علمی(دانشیار)- دانشگاه یزد- دانشکده ریاضی- گروه آمار

[2] دانش آموخته کارشناسی ارشد آمار- دانشگاه یزد- دانشکده ریاضی- گروه آمار

[3] Zacks and Mukhopadhyay

$0 < \beta$ مخاطره را توسط ω کراندار کرد. تاکادا[۴] [۲] در سال ۱۹۸۶ این نکته را در خانواده‌ی توزیع‌های مقیاسی اثبات کرده است. روشی که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای است که برای اولین بار توسط اشتاین[۵] [۴] و [۵] در سال‌های ۱۹۴۵ و ۱۹۴۹ پایه‌ریزی شد. در بخش ۲ روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای برای برآورد θ، که برای اولین بار توسط موخوپادهای و زاکس [۱] در سال ۲۰۰۷ مورد استفاده قرار گرفت، مطرح خواهد شد. در بخش ۳ توزیع حجم نمونه محاسبه می‌شود. بخش ٤ شامل امید ریاضی و مخاطره حاصل از برآوردگرها است. در بخش ۵ آنچه به صورت تئوری مطرح شده است با استفاده از شبیه‌سازی نشان داده خواهد شد.

۲ روش نمونه‌گیری دو مرحله‌ای برای برآورد پارامتر θ

روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای شامل دو مرحله‌ی زیر است:

ابتدا نمونه‌ی تصادفی به حجم $m \geq 4$ از توزیع نمایی دو پارامتری با پارامتر مکان α و مقیاسβ($DE(\alpha,\beta)$) در نظر می‌گیریم. اگر نمونه به فرم $X_1, X_2, ..., X_m$ باشد، $\hat{\beta}_m$ با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\beta}_m = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - X_{1:m}),$$

و همچنین متغیر توقف به فرم

$$N = \max\{m, \left\lfloor Bd^2\omega^{-1}\hat{\beta}_m^2 \right\rfloor + 1\}, \qquad (3)$$

معرفی می‌شود که در آن $B > 0$ و $\lfloor a \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح مثبت کوچکتر از a است. اگر $N = m$، نمونه‌گیری متوقف خواهد شد. در مرحله‌ی دوم اگر $N > m$، به تعداد $N - m$ نمونه‌ی مستقل و هم‌توزیع دیگر از توزیع $DE(\alpha,\beta)$ گرفته خواهد شد که با $X_1^*, X_2^*, ..., X_{N-m}^*$ نشان داده می‌شود. این نمونه به شرط N، از $X_1, X_2, ..., X_m$ مستقل است. پس از پایان عمل نمونه‌گیری، برآوردگرها به فرم زیر خواهند بود:

$$T_N = \sum_{i=1}^{N}(X_i - X_{1:N}), \quad \hat{\beta}_N = \frac{T_N}{N-1}, \quad \hat{\alpha}_N = X_{1:N} - \frac{\hat{\beta}_N}{N},$$

و

$$\hat{\theta}_N = c\hat{\alpha}_N + d\hat{\beta}_N.$$

لم ۱.۲. با توجه به رابطه‌ی (۳) می‌توان گفت:

$$\lim_{B\to\infty} N = \infty \quad a.s.\,, \qquad \lim_{\omega\to 0} N = \infty \quad a.s..$$

اثبات. با توجه به رابطه‌ی (۳)، داریم:

$$\frac{Bd^2\hat{\beta}_m^2}{\omega} \leq N \leq \frac{Bd^2\hat{\beta}_m^2}{\omega} + m.$$

همچنین

$$\lim_{B\to\infty}\frac{Bd^2\hat{\beta}_m^2}{\omega} = \infty, \qquad \lim_{B\to\infty}\frac{Bd^2\hat{\beta}_m^2}{\omega} + m = \infty.$$

از آن‌جایی که همگرایی نقطه به نقطه، همگرایی قریب به یقین را نتیجه می‌دهد [۳]، می‌توان گفت زمانی که $B \to \infty$

$$\frac{Bd^2\hat{\beta}_m^2}{\omega} \xrightarrow{a.s.} \infty, \qquad \frac{Bd^2\hat{\beta}_m^2}{\omega} + m \xrightarrow{a.s.} \infty,$$

و در نتیجه بنابر قضیه فشردگی، زمانی که $B \to \infty$ می‌توان نوشت:

$$N \xrightarrow{a.s.} \infty.$$

به همین ترتیب قسمت دوم لم نیز اثبات می‌شود. □

لم ۲.۲. برای هر مقدار ω، d و β، توزیع N نسبت به Bیک توزیع به‌طور تصادفی غیر نزولی است.

اثبات. تابع توزیع N در نقطه‌ی η تابعی از B است. اگر تابع توزیع N در نقطه‌ی η، تحت شرط $B = B_1$، با $F_1(\eta)$ و تابع توزیع N در نقطه η تحت شرط $B = B_2$ با $F_2(\eta)$ نشان داده شود، برای اثبات لم کافی است نشان دهیم اگر $B_1 \leq B_2$، آن‌گاه $F_2(\eta) \leq F_1(\eta)$.

از آن‌جایی که $N_i = \max\{m, \left\lfloor B_i d^2\omega^{-1}\hat{\beta}_m^2 \right\rfloor + 1\}$، برای هر $\eta > 0$ اگر $B_1 \leq B_2$، آنگاه $N_1 < N_2$ نتیجه می‌دهد

$$\{\eta \leq N_1\} \subset \{\eta \leq N_2\},$$

با توجه به تعریف $F_1(\eta)$ و $F_2(\eta)$ و رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$1 - F_1(\eta) \leq 1 - F_2(\eta),$$

و در نتیجه

$$F_1(\eta) \geq F_2(\eta)$$

و اثبات کامل می‌شود. □

[۴] Takada

[۵] Stein

۳ توزیع احتمال متغیر توقف N

از آن‌جا که حجم نمونه N متغیری تصادفی است، لذا می‌توان توزیع دقیق آن را محاسبه کرد. در ابتدا تابعی از $j \mapsto \lambda_{m+j}$ به‌صورت زیرتعریف می‌شود:

$$\lambda_{m+j} = \frac{(m-۱)\sqrt{\frac{\omega}{B}}\sqrt{m+j}}{d\beta}, \quad j = ۰, ۱, \cdots .$$

با توجه به اینکه $\hat{\beta}_m = \frac{T_m}{m-۱}$ و $\frac{T_m}{\beta} \sim Gamma(m-۱, ۱)$ آن‌گاه، $\frac{T_m}{\beta} = \frac{(m-۱)\hat{\beta}_m}{\beta} \sim Gamma(m-۱, ۱)$ و بنابر رابطه‌ی (۳) در مورد توزیع N داریم:

$$\begin{aligned} P_\beta(N=m) &= P_\beta\left(\left\lfloor Bd^{۲}\omega^{-۱}\hat{\beta}_m^{۲}\right\rfloor + ۱ \le m\right) \\ &= P_\beta\left(۰ < Bd^{۲}\omega^{-۱}\hat{\beta}_m^{۲} \le m\right) \\ &= P_\beta\left(۰ < \hat{\beta}_m^{۲} \le m\omega B^{-۱} d^{-۲}\right) \\ &= P_\beta\left(۰ < \hat{\beta}_m \le \frac{\sqrt{m}\sqrt{\frac{\omega}{B}}}{d}\right) \\ &= P_\beta\left(۰ < \frac{(m-۱)\hat{\beta}_m}{\beta} \le \frac{(m-۱)\sqrt{m}\sqrt{\frac{\omega}{B}}}{d\beta}\right) \\ &= P\left(G(m-۱, ۱) \le \lambda_m\right). \end{aligned}$$

به طریق مشابه برای هر عدد صحیح مثبت j داریم:

$$\begin{aligned} P_\beta(N=m+j) &= P_\beta\left(m+j = \left\lfloor Bd^{۲}\omega^{-۱}\hat{\beta}_m^{۲}\right\rfloor + ۱\right) \\ &= P_\beta\left(N-۱ < Bd^{۲}\omega^{-۱}\hat{\beta}_m^{۲} \le N\right) \\ &= P_\beta\left(m+j-۱ < Bd^{۲}\omega^{-۱}\hat{\beta}_m^{۲} \le m+j\right) \\ &= P_\beta\left(\frac{(m-۱)\sqrt{m+j-۱}\sqrt{\frac{\omega}{B}}}{d\beta} < \frac{(m-۱)\hat{\beta}_m}{\beta} \right. \\ &\qquad \left. \le \frac{(m-۱)\sqrt{m+j}\sqrt{\frac{\omega}{B}}}{d\beta}\right) \\ &= P\left(\lambda_{m+j-۱} < G(m-۱, ۱) \le \lambda_{m+j}\right). \end{aligned}$$

اگر $P(m;\lambda)$ و $p(m;\lambda)$ بترتیب نشان دهنده‌ی تابع توزیع و تابع چگالی پواسون با میانگین λ باشند، با توجه به رابطه‌ی بین توزیع‌های گاما و پواسون، می‌توان قضیه زیر را مطرح کرد.

قضیه ۱.۳. برای مقادیر ثابت m، ω، B، d و β

$$P_\beta(N=m) = ۱ - P(m-۲; \lambda_m), \qquad (۴)$$

و برای هر $j \ge ۰$،

$$P_\beta(N=m+j) = P(m-۲; \lambda_{m+j-۱}) - P(m-۲; \lambda_{m+j}). \qquad (۵)$$

اثبات. با توجه به رابطه‌ی بین توزیع‌های گاما و پواسون داریم:

$$P(G(m-۱, ۱) \le \lambda_m) = P(Y \ge m-۱),$$

که در آن $Y \sim Pois(\lambda_m)$. بنابراین

$$\begin{aligned} P_\beta(N=m) &= P(G(m-۱, ۱) \le \lambda_m) \\ &= P(Y \ge m-۱) \\ &= ۱ - P(Y \le m-۲) \\ &= ۱ - P(m-۲; \lambda_m). \end{aligned}$$

به طریق مشابه

$$\begin{aligned} P_\beta(N=m+j) &= P\left(\lambda_{m+j-۱} < G(m-۱, ۱) \le \lambda_{m+j}\right) \\ &= P(G(m-۱, ۱) \le \lambda_{m+j}) \\ &\quad -P(G(m-۱, ۱) \le \lambda_{m+j-۱}) \\ &= P(Y_۱ \ge m-۱) - P(Y_۲ \ge m-۱), \end{aligned}$$

که در آن $Y_۱ \sim Pois(\lambda_{m+j})$ و $Y_۲ \sim Pois(\lambda_{m+j-۱})$، بنابراین

$$\begin{aligned} P_\beta(N=m+j) &= ۱ - P(Y_۱ \le m-۲) - ۱ + P(Y_۲ \le m-۲) \\ &= P(m-۲; \lambda_{m+j-۱}) - P(m-۲; \lambda_{m+j}). \end{aligned}$$

□

با توجه به رابطه‌ی (۵)، رابطه زیر برقرار است:

$$P_\beta(N \ge m+j) = P(m-۲; \lambda_{m+j-۱}). \qquad (۶)$$

قضیه ۲.۳. گشتاور مرتبه r ام متغیر N برابر است با

$$E_\beta[N^r] = m^r + \sum_{j=۰}^{\infty} \left((m+j+۱)^r - (m+j)^r\right) P(m-۲; \lambda_{m+j}).$$

اثبات. با استفاده از قضیه‌ی ۱.۳ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} E_\beta[N^r] &= m^r \times \{۱ - P(m-۲; \lambda_m)\} \\ &\quad +(m+۱)^r\{P(m-۲; \lambda_m) + P(m-۲; \lambda_{m+۱})\} \\ &\quad +(m+۲)^r\{P(m-۲; \lambda_{m+۱}) + P(m-۲; \lambda_{m+۲})\} \\ &\quad \vdots \\ &= m^r + P(m-۲; \lambda_m)\{(m+۱)^r - m^r\} \\ &\quad +P(m-۲; \lambda_{m+۱})\{(m+۲)^{۲} - (m+۱)^r\} \\ &\quad \vdots \\ &= m^r + \textstyle\sum_{j=۰}^{\infty}((m+j+۱)^r - (m+j)^r)P(m-۲; \lambda_{m+j}). \end{aligned}$$

□

با قرار دادن $r = ۱$ در قضیه‌ی ۲.۳، $E_\beta[N]$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_\beta[N] = m + \sum_{j=۰}^{\infty} P(m-۲; \lambda_{m+j}). \qquad (۷)$$

در مورد چندک مرتبه pام متغیر تصادفی N با استفاده از رابطه‌ی (۶) می‌توان گفت N_p کوچکترین kی بزرگتر از m است که در شرط

$$P(m-2;\lambda_k)\le 1-p. \qquad (8)$$

صدق می‌کند.

۴ امید ریاضی و مخاطره برآوردگرها

فرض کنید $X_1,...,X_m$ نمونه‌ی تصادفی مرحله‌ی اول و $X_1^*,...,X_{N-m}^*$، نمونه‌ی تصادفی مرحله‌ی دوم باشند. فرض کنید $X_{1:m}<X_{2:m}<...<X_{m:m}$ نشان دهنده‌ی آماره‌های ترتیبی داده‌های اولیه و $X_{1:N-m}^*<X_{2:N-m}^*<...<X_{N-m:N-m}^*$ نشان دهنده‌ی آماره‌های ترتیبی داده‌های مرحله‌ی دوم باشند. U_iها را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$U_i=X_i-X_{1:m},\qquad i=1,...,m.$$

همچنین فرض کنید $\mathcal{U}_m=\sigma(U_1,...,U_m)$ نشان دهنده سیگما میدان تولید شده توسط $(U_1,...,U_m)$ باشد، آنگاه $T_{N-m}^*=\sum_{j=1}^{N-m}(X_j^*-X_{1:N-m}^*)$، $X_{1:N}=\min(X_{1:m},X_{1:N-m}^*)$ و

$$\begin{aligned}T_N&=\sum_{i=1}^{N}(X_i-X_{1:N})\\&=\sum_{i=1}^{m}(X_i-X_{1:m})+\sum_{i=m+1}^{N}(X_i^*-X_{1:N-m}^*).\end{aligned}$$

لم ۱.۴. به شرط $N=n$، $\hat{\beta}_N$ و $X_{1:N}$ از هم مستقل بوده و

$$X_{1:N}|\,\mathcal{U}_m\overset{d}{=}\alpha+\frac{\beta}{N}G(1,1), \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_N\,|\,\mathcal{U}_m\overset{d}{=}\;&I(N=m)\tfrac{T_m}{m-1}\\&+I(N>m)\tfrac{1}{N-1}\Big(T_m\\&+\beta G^*(N-m,1)\Big),\end{aligned} \qquad (10)$$

که در آن $G^*(N-m,1)$ متغیری تصادفی با توزیع گاما با پارامتر شکل $(N-m)$ و پارامتر مقیاس ۱ بوده و از $\mathcal{U}_m$ مستقل است.

قضیه ۲.۴. در نمونه‌گیری دومرحله‌ای که متغیر توقف آن توسط رابطه‌ی (۳) داده می‌شود، برای مقادیر ثابت c، d و $m\ge 4$، اگر

$$B=B_m(c,d)=\frac{(2m^3+(m^2+1)\gamma^2)A}{m(m-2)(m-3)},$$

که $\gamma=\frac{c}{d}$، برای هر $\beta>0$، $R(\hat{\theta}_n,\theta)\le\omega$.

لم ۳.۴. امید ریاضی و مخاطره برآوردگر $\hat{\beta}_N$ برابر است با:

$$E_\beta[\hat{\beta}_N]=\beta\left(1-\sum\frac{m-1}{(m+j-1)(m+j)}p(m-1;\lambda_{m+j})\right), \qquad (11)$$

و

$$\begin{aligned}R(\hat{\beta}_N,\beta)=A\beta^2\Big\{&\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(m+j-1)(m+j)}(1-P(m-2;\lambda_{m+j}))\\&+\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(m-1)(m-2)(2(m+j)-1)}{(m+j-1)^2(m+j)^2}p(m-1;\lambda_{m+j})\\&+\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(m-1)m(2(m+j)-1)}{(m+j-1)^2(m+j)^2}p(m;\lambda_{m+j})\Big\}.\end{aligned} \qquad (12)$$

اثبات. برای مشاهده جزییات اثبات به [۱] مراجعه کنید. □

در زیر امید ریاضی و مخاطره برآوردگر $\hat{\theta}_N=c\hat{\alpha}_N+d\hat{\beta}_N$ به عنوان برآوردی برای $\theta=c\alpha+d\beta$ محاسبه می‌شود.

قضیه ۴.۴. برای $c>0$ و $d>0$ داریم:

$$\begin{aligned}&E_{\alpha,\beta}[\hat{\theta}_N]=c\alpha+d\beta\\&-\beta(m-1)\textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d(m+j+1)-2c}{(m+j-1)(m+j)(m+j+1)}p(m-1;\lambda_{m+j}),\end{aligned} \qquad (13)$$

و

$$\begin{aligned}R(\hat{\theta}_N,\theta)\;&=Ad^2\beta^2\Big\{\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(m+j-1)+2(\gamma-1)^2}{(m+j-1)(m+j)(m+j+1)}\\&\times(1-P(m-2;)\lambda_{m+j})+(m-1)(m-2)\\&\times\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(m+j+1-2\gamma)(2(m+j)(m+j-\gamma)+(m+j-1))}{(m+j-1)^2(m+j)^2(m+j+1)^2}\\&\times p(m-1;\lambda_{m+j})\\&-m(m-1)\\&\times\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(m+j+1-2\gamma)(2(m+j)(m+j-\gamma)+(m+j-1))}{(m+j-1)^2(m+j)^2(m+j+1)^2}\\&\times p(m;\lambda_{m+j})\Big],\end{aligned} \qquad (14)$$

که در آن $\gamma=\frac{c}{d}$.

اثبات. برای مشاهده جزییات اثبات به [۱] مراجعه کنید. □

۵ مطالعه‌ای بر شبیه‌سازی

در این بخش سعی داریم انچه را به صورت تئوری اثبات شده است با استفاده از شبیه‌سازی نشان دهیم. جدول شماره‌ی ۱ مقادیر واقعی و شبیه سازی شده‌ی امید ریاضی متغیر توقف ($E[N]$ و $\hat{E}[N]$) و مقادیر واقعی و شبیه سازی شده‌ی چارک‌های متغیر توقف N ($N_{0/25}$ و $\hat{N}_{0/25}$ و ...) را با استفاده از روابط (۷) و (۸)، برای مقادیر $d=1$، $B=3/5$ و $\omega=2$ نشان می‌دهد.

جدول ۱: مقادیر واقعی و شبیه سازی شده‌ی میانگین و چندک‌های متغیر توقف N، با استفاده از مقادیر $d = ۱$، $B = ۳/۵$ و $\omega = ۲$.

m	α	β	$E[N]$	$\widehat{E}[N]$	$N_{۰/۲۵}$	$\widehat{N}_{۰/۲۵}$	$N_{۰/۵۰}$	$\widehat{N}_{۰/۵}$	$N_{۰/۷۵}$	$\widehat{N}_{۰/۷۵}$
۱۰	۲	۲	۱۱/۳۹	۱۱/۴۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۱	۱۰
		۵	۴۹/۱۸	۴۷/۹۵	۲۶	۲۷	۴۱	۴۲	۶۴	۶۷
		۱۰	۱۹۴/۸۴	۱۹۸/۸	۱۰۲	۱۰۸	۱۶۳	۱۶۱	۲۵۳	۲۴۳
		۱۵	۴۲۳/۵۰	۴۳۳/۴۲	۲۲۸	۲۴۱	۳۶۶	۳۷۰	۵۶۸	۵۹۶
		۲۰	۶۵۴/۷۱	۷۶۸/۹۴	۴۰۵	۴۲۸	۶۵۰	۶۵۶	۱۰۰۹	۱۰۲۷
۲۰	۸	۲	۲۰/۰۲	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
		۵	۴۶/۷۷	۴۸	۳۱	۳۱	۴۳	۴۳	۵۸	۵۹
		۱۰	۱۸۴/۷۱	۱۸۳/۷۶	۱۲۳	۱۱۷	۱۶۹	۱۷۰	۲۲۹	۲۲۹
		۱۵	۴۱۳/۴۹	۴۱۹/۳۹	۲۷۶	۲۷۵	۳۱۸	۳۷۲	۵۱۶	۵۱۱
		۲۰	۶۸۷/۱۹	۷۳۱/۸۹	۴۹۱	۴۸۳	۶۷۶	۶۷۶	۹۱۶	۹۱۲

با نگاه کردن به جدول ۱ می‌توان گفت اختلاف چندانی بین مقادیر واقعی و مقادیر شبیه‌سازی امید ریاضی متغیر توقف و چارک‌های آن وجود ندارد. همچنین برای مقادیر ثابت α و m افزایش β با افزایش مقادیر امید ریاضی و چارکهای متغیر توقف N همراه است. در ادامه به بررسی نتایج حاصل از شبیه‌سازی پارامتر $\theta = \alpha + \beta$ می‌پردازیم (قراردادن $b = c = ۱$ در رابطه‌ی $\theta = c\alpha + b\beta$). با در نظر گرفتن $\omega = ۲$ و $A = ۰/۱$ و استفاده از روابط (۷)، (۱۳) و (١٤)، مقادیر واقعی و شبیه سازی شده‌ی امید ریاضی و مخاطره برآوردگر $\hat{\theta}_N$ به ازای مقادیر مختلف α و β و m محاسبه شده است که نتایج آن را می‌توان در جدول ۲ مشاهده کرد.

با نگاه کردن به مقادیر اورده شده در جدول ۲ نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱) مقادیر واقعی و شبیه سازی شده‌ی امید ریاضی و مخاطره‌ی براوردگر $\widehat{\theta}_N$ اختلاف چندانی با هم ندارند.

۲) برای مقادیر ثابت m و α افزایش β با افزایش امید ریاضی و مخاطره‌ی براوردگر $\widehat{\theta}_N$ همراه بوده و امید ریاضی براوردگر $\widehat{\theta}_N$ به $\alpha + \beta$ نزدیک است.

۳) برای مقادیر ثابت β افزایش m و α با افزایش امید ریاضی و مخاطره‌ی براوردگر $\widehat{\theta}_N$ همراه است.

جدول ۲: مقادیر واقعی و شبیه سازی شده‌ی امید ریاضی و مخاطره برآوردگر $\widehat{\theta}_N$ بر حسب مقادیر مختلف m، α و β.

m	α	β	$E[\widehat{\theta}_N]$	$\widehat{E}[\widehat{\theta}_N]$	$R(\widehat{\theta}_N;\theta)$	$\widehat{R}(\widehat{\theta}_N;\theta)$
۱۰	۲	۵	۶/۴۸	۶/۴۹	۰/۲۴	۰/۲۱
		۱۰	۱۱/۲۱	۱۱/۱۸	۰/۷۳	۰/۵۹
		۱۵	۱۶/۳۱	۱۶/۱۹	۰/۷۳	۰/۸۲
		۲۰	۲۱/۴۳	۲۱/۴۱	۰/۷۵	۰/۷۹
		۲۵	۲۶/۵۲	۲۶/۶	۰/۷۴	۰/۶۸
۲۰	۸	۵	۱۲/۴۸	۱۲/۴۹	۰/۲۳	۰/۲۱
		۱۰	۱۷/۲۱	۱۷/۲۳	۰/۶۰	۰/۶۲
		۱۵	۲۲/۳۱	۲۲/۲۰	۰/۷۲	۰/۷۸
		۲۰	۲۷/۴۳	۲۷/۲۸	۰/۷۴	۰/۹۵
		۲۵	۳۲/۵۳	۳۲/۴۲	۰/۷۴	۰/۷۴

مراجع

[1] Mukhopadhyay, N. and Zacks, S. (2007). Bounded risk estimation of linear combinations of the location and scale parameters in exponential distribution under two-stage sampling. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 3672-3686.

[2] Takada, Y. (1986). Non-existence of fixed sample size procedures for scale families. *Sequential Analysis*, **5**, 93-101.

[3] Resnick, S.I. (1999). *A Probanility Path.* Birkhäuser Basel, New York.

[4] Stein, C. (1945). A two sample test for a linear hypothesis whose power is independent of the variance. *Ann. Math. Statist.*, **16**, 243-258.

[5] Stein, C. (1949). Some problems in sequential estimation (abstract). *Econometrica*, **17**, 77-78

[6] Zacks, S. and Mukhopadhyay, N. (2006). Exact risks of sequential point estimators of the exponential parameters. *Sequential Analysis.*, **25**, 203-226.

[7] Zacks, S. and Mukhopadhyay, N. (2006). Bounded risk estimation of the exponential parameter in a two-stage sampling. *Sequential Analysis*, **25**, 437-452.