فاصله تحمل دوطرفه برای توزیع نمایی براساس رکوردها

مهران نقی زاده قمی[۱]، سید محمد تقی کامل میرمصطفائی[۲]، مریم وحیدیان[۳]

چکیده:

فاصله‌ی تحمل یک فاصله‌ی تصادفی است که با یک سطح اطمینان مشخص، نسبتی از جامعه‌ی مورد بررسی را در بر می‌گیرد و در بسیاری از زمینه‌های کاربردی از جمله قابلیت اعتماد و کنترل کیفیت مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله، فاصله‌ی تحمل دو طرفه را برای جامعه‌ی نمایی بر اساس داده‌های رکوردی به دست می‌آوریم. مثالی از داده‌های رکوردی واقعی ارائه شده است. در پایان، به کمک مطالعه‌ی شبیه‌سازی، دقت فاصله‌های تحمل ارائه شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: آماره‌های رکوردی، توزیع نمایی، فاصله‌ی تحمل.

۱ مقدمه

فاصله‌های تحمل در بسیاری از زمینه‌های کاربردی مانند تحلیل بقا و کنترل کیفیت مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان مثال در کنترل کیفیت، برای یک فرایند تولید، حدود مشخصه‌های فنی[٤] از قبل توسط مهندسان تعیین می‌گردند که این حدود باید مشخصه‌های محصولات تولیدی را در بر بگیرند. برای آن که متوجه شویم که چه نسبتی از این محصولات، در حدود مشخصه‌های فنی صدق می‌کنند، یافتن یک فاصله‌ی تحمل بر اساس نمونه‌ای از محصولات تولید شده می‌تواند مفید باشد. چنانچه این فاصله‌ی تحمل درون حدود مشخصه‌های فنی قرار گیرد، آن‌گاه با اطمینان معینی می‌توان نتیجه گرفت که حداقل درصد مشخصی از محصولات، مطابق با معیارهای مورد نظر تولید شده‌اند. فاصله‌های تحمل در مبحث نمونه‌گیری برای پذیرش، یکی دیگر از موضوعات کنترل کیفیت نیز دارای کاربرد هستند. لذا موضوع یافتن فاصله‌های تحمل از اهمیت بالایی برخوردار است. از جمله اولین تحقیقات در رابطه با این موضوع توسط ویلکس [۱۵] انجام گرفت. پس از آن، مقالات تحقیقاتی بسیاری در رابطه با ساختن فاصله‌های تحمل و سایر جنبه‌های این موضوع و کاربردهای آن در تاریخ علم آمار به ثبت رسیدند. جیلک [۹] و جیلک و اکرمن [۱۰] بسیاری از این مقالات را مطابق با نتایج کلی، نتایج ناپارامتری، نتایج مربوط به توزیع‌های نرمال یک متغیره و نرمال چند متغیره، نتایج مربوط به توزیع‌های نمایی، گاما، وایبل و سایر توزیع های پیوسته و گسسته دسته‌بندی نمودند. همچنین پاتیل [١٤] در یک مقاله‌ی مروری، مجموعه‌ای بزرگ از نتایج به دست آمده در رابطه با فاصله‌های تحمل برای توزیع‌های گوناگون پیوسته و گسسته را گردآوری نمود. از جمله مقالاتی که به موضوع ساختن فاصله‌های تحمل برای توزیع نمایی پرداخته‌اند، می‌توان به گاتمن [۸]، گودمن و مدنسکی [٦]، گوئنثر و همکاران [۷]، انگلهارد و بین [٤] و فرناندز [٥] اشاره کرد. اخیراً نقی‌زاده قمی و کیاپور [۱۲] و کیاپور و نقی‌زاده قمی [۱۱] به‌ترتیب کوتاهترین فاصله‌های تحمل کلاسیک و بیزی با کنترل چندک‌ها در دو دم توزیع نمایی را براساس داده‌های رکوردی و با استفاده از تکنیک اوون [۱۳] به‌دست آوردند. فرض کنید که X_1، X_2، $\cdots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع تجمعی پیوسته $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، در این صورت مشاهده‌ی X_j را یک رکورد بالا گوییم هرگاه از همه‌ی مشاهدات ما قبل خود بزرگ‌تر باشد. فرض کنید $R_m = \max\{X_1, \cdots, X_m\}$، در این صورت $R_1 \leq R_2 \leq \cdots \leq R_m \leq \cdots$. یک رکورد بالا هنگامی

[۱] استادیار گروه آمار دانشگاه مازندرانm.naghizadeh@umz.ac.ir

[۲] استادیار گروه آمار دانشگاه مازندرانm.mirmostafaee@umz.ac.ir

[۳] کارشناسی ارشد آمار از دانشگاه مازندران vahidian_m@yahoo.com

[٤] Specification limits

رخ می‌دهد که در دنباله‌ی R_m یک پرش داشته باشیم. به عبارت دیگر X_m یک رکورد بالا است اگر $R_m > R_{m-۱}$. رکوردهای پایین نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. در این مقاله، mامین رکورد بالا را با R_m نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که اولین رکورد همان اولین مشاهده است یعنی $R_۱ = X_۱$. اگر $R_۱$، $R_۲$، $\cdots$، R_m دنباله‌ی رکوردهای بالا مستخرج از توزیع F باشند،آن‌گاه تابع چگالی احتمال توام آن‌ها برابر است با

$$f_{R_۱,\cdots,R_m}(r_۱,...,r_m) = f(r_m)\prod_{i=۱}^{m-۱}\frac{f(r_i)}{۱-F(r_i)}. \quad (۱)$$

همچنین تابع چگالی احتمال mامین رکورد، R_m، به صورت زیر است

$$f_{R_m}(x) = \frac{[-\log \bar{F}(x)]^{m-۱}}{(m-۱)!}f(x), \quad (۲)$$

که در آن $\bar{F}(x) = ۱ - F(x)$ تابع بقا نام دارد. (رجوع کنید به آرنولد و همکاران، [۲]).

داده‌های رکوردی در مسائل گوناگونی نظیر هواشناسی، زلزله‌شناسی، وقایع ورزشی و تحقیقات مهندسی معدن و نفت دارای کاربرد هستند. همچنین ویژگی‌های آماره‌های رکوردی در مقالات متعددی مورد بررسی قرار گرفته است. برای جزئیات بیشتر در رابطه با آماره‌های رکوردی و کاربردهای آن، علاقه‌مندان می‌توانند به کتاب آرنولد و همکاران [۲] مراجعه نمایند.

در این مقاله، بر اساس رکوردهای مشاهده شده از توزیع نمایی یک پارامتری، یک فاصله‌ی تحمل دو طرفه با دم‌های برابر با استفاده از تکنیک گودمن و مدنسکی [٦] در بخش ۲ ارائه می‌شود. در بخش ۳ با ارائه مثالی به بررسی روش ذکر شده در مقاله می‌پردازیم. دقت فاصله‌ی تحمل مطرح شده را با انجام یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی در بخش ٤ مورد بررسی قرار می‌دهیم. سرانجام در بخش ٥ به بحث و نتیجه‌گیری خواهیم پرداخت.

۲ فاصله‌ی تحمل دو طرفه در توزیع نمایی بر اساس رکوردها

در این بخش، یک فاصله‌ی تحمل دو طرفه با دم‌های برابر را بر اساس رکوردهای مشاهده شده از توزیع نمایی به دست می‌آوریم.

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ و با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x;\theta) = \frac{۱}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta}), \quad x > ۰, \quad \theta > ۰. \quad (۳)$$

لم زیر برای به دست آوردن فاصله‌های تحمل در توزیع نمایی با داده‌های رکوردی بسیار مفید خواهد بود.

لم ۲.۱ فرض کنید $\mathbf{R} = (R_۱,\cdots,R_m)$ داده‌های رکوردی مشاهده شده از توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال (۳) باشند. در این صورت :

الف. برآوردگر درستنمایی ماکسیمم θ بر اساس $\mathbf{R} = (R_۱,\cdots,R_m)$ برابر است با $\widehat{\theta} = \frac{R_m}{m}$.

ب. کمیت $۲m\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ دارای توزیع خی‌دو با $۲m$ درجه آزادی است، که در آن $\widehat{\theta} = \frac{R_m}{m}$.

اثبات الف. با توجه به (۱)، تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\theta|r_۱,\cdots,r_m) = \frac{۱}{\theta^m}\exp(-\frac{r_m}{\theta}), \quad \theta > ۰.$$

با مشتق‌گیری از تابع درستنمایی نسبت به θ و بررسی مشتق دوم، اثبات کامل می‌شود.

ب. با قرار دادن تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع نمایی با پارامتر θ در رابطه‌ی (۲)، به راحتی نتیجه می‌شود که R_m دارای توزیع گاما با پارامتر شکل m و پارامتر مقیاس θ است و در نتیجه $۲m\frac{\widehat{\theta}}{\theta} = \frac{۲R_m}{\theta}$ دارای توزیع خی‌دو با $۲m$ درجه آزادی، $\chi^۲_{۲m}$، می‌باشد.

۱.۲ یافتن فاصله‌ی تحمل دوطرفه با دم‌های برابر

فاصله‌ی تصادفی (L,U) یک فاصله‌ی تحمل دو طرفه با سطح پوشش β و سطح اطمینان $۱-\alpha$ [٥] است هرگاه

$$Pr\left[\int_L^U f(x;\theta)dx \geq \beta\right] = ۱-\alpha, \quad (٤)$$

که در آن $\beta \in (۰,۱)$ و $\alpha \in (۰,۱)$.

در واقع فاصله‌ی (L,U) که در رابطه‌ی (٤) صدق می‌کند، حداقل ۱۰۰β درصد از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ را با اطمینان $۱-\alpha$ پوشش می‌دهد. برای توزیع نمایی با پارامتر مقیاس θ، فاصله‌ی تحمل دو طرفه با دم‌های برابر به فرم

[٥] $\beta-$coverage $(۱-\alpha)$-confidence tolerance interval

$(L,U)=(k_1\widehat{\theta},k_2\widehat{\theta})$ را در نظر می‌گیریم که در آن $\widehat{\theta}=\frac{R_m}{m}$ که در آن برآوردگر درستنمایی ماکسیمم θ و $k_1,k_2\geq 0$ فاکتورهای تحمل[٦] نامیده می‌شوند. با پیروی از کار گودمن و مدنسکی [٦]، شرط دم‌های برابر را با تساوی $P(X<L)=P(X>U)$ وقتی $\widehat{\theta}=\theta$ باشد، در نظر می‌گیریم. با اعمال این شرط داریم

$$\int_0^{k_1\hat{\theta}}\frac{1}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta})dx=\int_{k_2\hat{\theta}}^{\infty}\frac{1}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta})dx, \qquad (٥)$$

با حل تساوی (٥) و قرار دادن $\widehat{\theta}=\theta$ نتیجه می‌شود

$$k_2=-\ln\{1-\exp(-k_1)\}. \qquad (٦)$$

رابطه‌ی (٤) با رابطه زیر معادل است

$$Pr\left(\left(\exp\left\{-k_1\frac{\widehat{\theta}}{\theta}\right\}-\exp\left\{-k_2\frac{\widehat{\theta}}{\theta}\right\}\right)\geq\beta\right)=1-\alpha.$$

با قرار دادن $T=\frac{\widehat{\theta}}{\theta}$ و با توجه به رابطه‌ی (٦) داریم

$$Pr[h(k_1,T)\geq\beta]=1-\alpha, \qquad (٧)$$

که در آن

$$h(k_1,t)=\exp(-k_1t)-[1-\exp(-k_1)]^t.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که تابع $h(k_1,t)$ یک تابع مثبت تک‌مدی بر حسب t با مقدار ماکسیمم در نقطه‌ی زیر است

$$t_0=\frac{\ln k_1-\ln[-\ln(1-\exp(-k_1))]}{k_1+\ln(1-\exp(-k_1))}.$$

بنابراین از رابطه‌ی (٧) و با توجه به تک‌مدی‌بودن تابع $h(k_1,t)$، داریم $Pr(t_1\leq T\leq t_2)=1-\alpha$. از لم ۲.۱ می‌دانیم که کمیت $T=\frac{\widehat{\theta}}{\theta}$ دارای توزیع $\frac{1}{2m}\chi^2_{2m}$ است، بنابراین داریم

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{m^m}{\Gamma(m)}\,t^{m-1}\,e^{-mt}dt=1-\alpha, \qquad (٨)$$

که در آن

$$h(k_1,t_i)=\beta,\quad i=1,2. \qquad (٩)$$

جدول ۱: فاکتورهای تحمل k_1 و k_2 برای مقادیر مختلف m، β و $1-\alpha$

		$\beta=0/7$		$\beta=0/8$		$\beta=0/9$		$\beta=0/95$	
$1-\alpha$	m	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
۰/۹۰	۳	۰/۰۳	۳/۳۹	۰/۰۱	۴/۴۴	۰/۰۰۲	۶/۲۹	۰/۰۰۰۳	۸/۱۶
	۴	۰/۰۵	۲/۹۴	۰/۰۲	۳/۸۰	۰/۰۰۵	۵/۳۳	۰/۰۰۱	۶/۸۹
	۵	۰/۰۶	۲/۷۱	۰/۰۳	۳/۴۷	۰/۰۰۸	۴/۸۲	۰/۰۰۲	۶/۲۰
	۶	۰/۰۶	۲/۵۷	۰/۰۴	۳/۲۷	۰/۰۱	۴/۵۰	۰/۰۰۳	۵/۷۷
۰/۹۵	۳	۰/۰۱	۴/۴۵	۰/۰۰۲	۵/۹۱	۰/۰۰۰۲	۸/۴۵	$۱۰^{-۵}$	۱۰/۹۹
	۴	۰/۰۲	۳/۶۱	۰/۰۰۸	۴/۷۵	۰/۰۰۱	۶/۷۵	۰/۰۰۰۲	۸/۷۷
	۵	۰/۰۴	۳/۱۹	۰/۰۱	۴/۱۶	۰/۰۰۳	۵/۸۷	۰/۰۰۰۵	۷/۶۱
	۶	۰/۰۵	۲/۹۴	۰/۰۲	۳/۸۱	۰/۰۰۵	۵/۳۴	۰/۰۰۱	۶/۹۰
۰/۹۹	۳	۰/۰۰۰۲	۸/۲۸	$۱۰^{-۴}$	۱۱/۰۷	$۱۰^{-۷}$	۱۵/۸۴	$۱۰^{-۹}$	۲۰/۶۱
	۴	۰/۰۰۲	۵/۸۵	۰/۰۰۰۴	۷/۸۲	$۱۰^{-۵}$	۱۱/۱۹	۴×۱۰^{-۷}	۱۴/۵۵
	۵	۰/۰۰۸	۴/۷۳	۰/۰۰۱	۶/۳۰	۰/۰۰۰۱	۹/۰۰	۸×۱۰^{-۶}	۱۱/۷۱
	۶	۰/۰۲	۴/۱۰	۰/۰۰۴	۵/۴۳	۰/۰۰۰۴	۷/۷۴	۴×۱۰^{-۵}	10/07

فاکتور k_1 با حل همزمان دو معادله‌ی (٨) و معادله‌ی (٩) با مقادیر اولیه‌ی مناسب برای مقادیر k_1، t_1 و t_2 و فاکتور k_2 نیز با توجه به رابطه‌ی (٦) محاسبه می‌شود. جدول ۱ فاکتورهای تحمل k_1 و k_2 محاسبه شده را به ازای مقادیر مختلفی از m، β و $1-\alpha$ ارائه می‌دهد.

[٦] Tolerance factors

۳ مثال کاربردی

در این بخش، داده‌های میزان ریزش باران سالانه را که طی هفتاد سال اخیر یعنی سال‌های ۱۹٤۲ تا ۲۰۱۲ (از ۱ ژوئیه تا ۳۰ ژوئن) در شهر لس‌آنجلس بر حسب اینچ توسط مرکز شهری لس‌آنجلس (LACC[۷]) اندازه‌گیری شده‌اند، در نظر می‌گیریم. این داده‌ها را می‌توان از لینک www.laalmanac.com/weather/we13.htm دریافت نمود. برای این داده‌ها، شش رکورد به شرح زیر مشاهده می‌شود

$$۱۸/۱۷, ۱۹/۲۲, ۲۶/۲۱, ۲۷/۴۷, ۳۳/۴۴, ۳۷/۹۶$$

یک نمودار ساده از این شش رکورد در مقابل مقادیر مورد انتظار رکوردهای توزیع نمایی استاندارد، (یادآور می‌شویم رکورد sام از توزیع نمایی استاندارد دارای توزیع گاما با پارامتر شکل s و پارامتر مقیاس ۱ است) نشان دهنده یک همبستگی قوی است (ضریب همبستگی به بزرگی ۰/۹۸۴ می‌باشد). بنابراین این فرض که این رکوردها از توزیع نمایی استخراج شده‌اند، فرض معقولی است. (رجوع کنید به بالاکریشنان و چان، [۳]، صفحه ۷۸). با توجه به این که $R_۶ = ۳۷/۹۶$، بنابراین برآوردگر درستنمایی ماکسیمم θ برابر است با $\widehat{\theta} = ۶/۳۲۷$. از جدول ۱ به ازای $\beta = ۰/۹$، $۱ - \alpha = ۰/۹۵$ و $m = ۶$ داریم $k_۱ = ۰/۰۰۵$ و $k_۲ = ۵/۳۴$. بنابراین یک فاصله‌ی تحمل دو طرفه با سطح پوشش ۹۰ درصد و با اطمینان ۹۵ درصد برابر است با $(۰/۰۳۲, ۳۳/۷۹)$. به عبارت دیگر با اطمینان ٪۹۵ می‌توان گفت که حداقل ٪۹۰ از باران‌های سالانه در شهر لس‌آنجلس در بازه $(۰/۰۳۲, ۳۳/۷۹)$ قرار دارند.

٤ مطالعه‌ی شبیه‌سازی

در این بخش، دقت فاصله‌ی تحمل مطرح شده در بخش ۲ را به کمک مطالعه‌ی شبیه‌سازی مونت‌کارلو مورد بررسی قرار می‌دهیم. مراحل شبیه‌سازی به صورت زیر است

- ابتدا داده‌های رکوردی $R_۱, \cdots, R_m$ از توزیع نمایی با پارامترهای $\theta = ۱, ۳, ۵$ به ازای مقادیر $m = ۳, ۴, ۵, ۶$ تولید می‌شوند.
- برآورد درستنمایی ماکسیمم θ از رابطه $\widehat{\theta} = \frac{R_m}{m}$ به ازای مقادیر $m = ۳, ۴, ۵, ۶$ محاسبه می‌گردد.
- به ازای مقادیر انتخابی $\beta = ۰/۷, ۰/۸, ۰/۹, ۰/۹۵$، سطوح اطمینان اسمی $\gamma = ۱ - \alpha = ۰/۹, ۰/۹۵, ۰/۹۹$ و $m = ۳, ۴, ۵, ۶$، فاکتورهای تحمل $k_۱$ و $k_۲$ از جدول ۱ فراخوانی می‌شوند.
- مراحل فوق به تعداد $M = ۱۰۰۰۰۰$ بار تکرار می‌شود. فرض کنید که $\widehat{\theta}(i)$ برآورد درستنمایی ماکسیمم θ در تکرار iام باشد و تابع $I(t)$ تابع نشانگر باشد، یعنی $I(t) = ۱$ اگر $t \geq ۰$ و $I(t) = ۰$ اگر $t < ۰$، در این صورت برآوردهای سطح اطمینان فاصله‌ی تحمل و متوسط طول فاصله‌ی تحمل به ترتیب توسط رابطه‌های

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma} &= \frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{M} I\Bigg(\exp\big(-k_۱\frac{\widehat{\theta}(i)}{\theta}\big) \\
&- [۱-\exp(-k_۱)]^{\frac{\widehat{\theta}(i)}{\theta}} - \beta\Bigg), \\
AW &= \frac{k_۲ - k_۱}{M}\sum_{i=۱}^{M}\widehat{\theta}(i),
\end{aligned}$$

محاسبه می‌شوند که در آن نماد AW برای متوسط طول فاصله‌ی تحمل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جداول ۲ تا ٤ نتایج شبیه‌سازی را ارائه می‌دهند. از نرم‌افزار آماری R نسخه‌ی ۳ برای انجام مراحل این شبیه‌سازی بهره گرفته شده است. از جداول ۲ تا ٤ ملاحظه می‌شود که:

الف) سطوح اطمینان برآورد شده به سطوح اطمینان اسمی متناظر خود نزدیک هستند که این امر بیانگر دقت بالای فاصله‌های تحملی است که از طریق روش‌های مطرح شده در این مقاله به دست می‌آیند.

[۷] Los Angeles Civic Center

جدول ۲: برآورد سطوح اطمینان و متوسط طول فاصله‌ی تحمل برای $\theta = ۱$ به ازای مقادیر مختلف m، β و γ.

γ	m		β = ۰/۷	۰/۸	۰/۹	۰/۹۵
۰/۹۰	۳	$\hat{\gamma}$	۰/۹۰۰۸۸	۰/۹۰۱۰۷	۰/۹۰۰۲۰	۰/۹۰۰۷۶
		AW	۳/۳۶۵۸۲	۴/۴۴۱۴۸	۶/۲۷۸۴۰	۸/۱۳۵۸۱
	۴	$\hat{\gamma}$	۰/۹۰۰۱۷	۰/۹۰۰۴۰	۰/۸۹۹۷۵	۰/۹۰۰۳۹
		AW	۲/۸۸۸۵۵	۳/۷۸۱۱۲	۵/۳۱۸۱۹	۶/۸۹۳۶۶
	۵	$\hat{\gamma}$	۰/۹۰۰۸۱	۰/۹۰۱۱۲	۰/۸۹۸۹۱	۰/۹۰۰۴۰
		AW	۲/۶۴۵۴۳	۳/۴۴۳۹۷	۴/۸۰۵۵۰	۶/۲۱۲۶۹
	۶	$\hat{\gamma}$	۰/۹۰۰۰۷	۰/۸۹۹۴۶	۰/۸۹۹۵۹	۰/۹۰۰۸۵
		AW	۲/۴۹۴۹۲	۳/۲۲۶۹۸	۴/۴۸۴۵۳	۵/۷۶۴۵۶
۰/۹۵	۳	$\hat{\gamma}$	۰/۹۵۰۲۵	۰/۹۵۰۹۷	۰/۹۵۰۸۳	۰/۹۵۰۴۱
		AW	۴/۴۳۵۵۰	۵/۸۸۲۸۳	۸/۴۴۷۶۳	۱۱/۰۱۲۴۹
	۴	$\hat{\gamma}$	۰/۹۵۰۱۷	۰/۹۵۰۲۸	۰/۹۵۱۶۷	۰/۹۵۰۹۶
		AW	۳/۵۸۹۴۷	۴/۷۵۰۴۳	۶/۷۵۲۹۰	۸/۷۵۸۲۶
	۵	$\hat{\gamma}$	۰/۹۵۰۷۰	۰/۹۵۰۹۴	۰/۹۵۱۱۲	۰/۹۵۱۰۱
		AW	۳/۱۴۴۶۵۵	۴/۱۳۹۹۲	۵/۸۷۸۸۲	۷/۶۳۰۵۱
	۶	$\hat{\gamma}$	۰/۹۵۰۴۶	۰/۹۵۰۹۷	۰/۹۵۰۴۸	۰/۹۵۰۴۲
		AW	۲/۸۹۸۴۱	۳/۷۹۶۰۱	۵/۳۴۵۱۰	۶/۸۸۹۳۱
۰/۹۹	۳	$\hat{\gamma}$	۰/۹۹۰۱۲	۰/۹۹۰۱۴	۰/۹۹۰۲۶	۰/۹۹۰۱۵
		AW	۸/۳۱۲۶۲	۱۱/۱۱۳۹۴	۱۵/۸۶۹۵۵	۲۰/۵۹۵۴۲
	۴	$\hat{\gamma}$	۰/۹۹۰۳۷	۰/۹۹۰۳۴	۰/۹۹۰۴۴	۰/۹۸۹۹۳
		AW	۵/۸۲۷۰۶	۷/۸۲۸۹۷	۱۱/۱۴۹۵۵	۱۴/۵۵۰۲۹
	۵	$\hat{\gamma}$	۰/۹۹۰۱۷	۰/۹۸۹۹۷	۰/۹۹۰۲۳	۰/۹۹۰۳۸
		AW	۴/۷۱۸۱۱	۶/۲۹۰۵۰	۸/۹۹۶۰۹	۱۱/۷۲۱۶۴
	۶	$\hat{\gamma}$	۰/۹۸۹۷۴	۰/۹۸۹۹۲	۰/۹۹۰۲۹	۰/۹۹۰۲۷
		AW	۴/۰۸۸۰۲	۵/۴۲۵۹۱	۷/۷۴۰۰۶	۱۰/۰۶۳۳۰

جدول ۳: برآورد سطوح اطمینان و متوسط طول فاصله‌ی تحمل برای $\theta = ۳$ به ازای مقادیر مختلف m، β و γ.

γ	m		β ۰/۷	۰/۸	۰/۹	۰/۹۵
۰/۹۰	۳	$\hat{\gamma}$	۰/۸۹۹۹۱	۰/۹۰۰۱۲	۰/۹۰۱۵۲	۰/۹۰۱۸۲
		AW	۱۰/۰۷۱۵۱	۱۳/۲۹۰۱۸	۱۸/۹۰۲۴۸	۲۴/۵۷۹۱۰
	۴	$\hat{\gamma}$	۰/۹۰۰۱۳	۰/۹۰۰۳۱	۰/۹۰۱۵۱	۰/۹۰۰۸۹
		AW	۸/۶۷۰۷۲	۱۱/۳۵۰۰۱	۱۵/۹۸۲۵۸	۲۰/۶۶۸۰۹
	۵	$\hat{\gamma}$	۰/۹۰۰۲۴	۰/۹۰۰۵۸	۰/۹۰۱۴۷	۰/۸۹۹۴۳
		AW	۷/۹۳۰۳۸	۱۰/۳۲۴۲۰	۱۴/۴۵۲۹۲	۱۸/۵۶۳۷۳
	۶	$\hat{\gamma}$	۰/۸۹۹۷۰	۰/۸۹۹۳۹	۰/۹۰۰۰۸	۰/۹۰۱۳۱
		AW	۷/۴۸۴۲۶	۹/۶۷۹۳۷	۱۳/۴۶۶۲۸	۱۷/۳۱۹۵۳
۰/۹۵	۳	$\hat{\gamma}$	۰/۹۵۰۸۴	۰/۹۵۰۴۸	۰/۹۴۹۹۱	۰/۹۵۰۸۰
		AW	۱۳/۳۰۶۹۵	۱۷/۷۸۳۵۹	۲۵/۲۸۷۱۰	۳۲/۹۷۲۹۰
	۴	$\hat{\gamma}$	۰/۹۵۰۵۸	۰/۹۵۰۷۰	۰/۹۵۰۷۵	۰/۹۴۹۷۳
		AW	۱۰/۷۶۰۱۵	۱۴/۲۴۰۳۷	۲۰/۳۳۵۶۷	۲۶/۳۳۷۶۳
	۵	$\hat{\gamma}$	۰/۹۵۰۳۰	۰/۹۵۰۶۵	۰/۹۵۰۲۷	۰/۹۵۰۵۰
		AW	۹/۴۴۲۸۰	۱۲/۴۳۱۴۰	۱۷/۶۳۵۱۱	۲۲/۸۷۸۱۸
	۶	$\hat{\gamma}$	۰/۹۵۰۴۵	۰/۹۵۰۰۲	۰/۹۵۰۰۳	۰/۹۵۰۴۲
		AW	۸/۶۷۶۵۳	۱۱/۳۷۲۳۸	۱۵/۹۸۶۹۹	۲۰/۷۰۲۱۰
۰/۹۹	۳	$\hat{\gamma}$	۰/۹۸۹۸۸	۰/۹۹۰۱۶	۰/۹۹۰۰۳	۰/۹۸۹۹۵
		AW	۲۴/۷۷۹۷۸	۳۳/۲۲۰۴۷	۴۷/۳۶۷۲۵	۶۱/۸۶۵۳۸
	۴	$\hat{\gamma}$	۰/۹۸۹۹۹	۰/۹۹۰۱۳	۰/۹۹۰۰۲	۰/۹۹۰۱۶
		AW	۱۷/۵۳۶۳۵	۲۳/۴۲۷۴۰	۳۳/۵۵۴۲۱	۴۳/۶۰۸۵۷
	۵	$\hat{\gamma}$	۰/۹۹۰۴۰	۰/۹۹۰۷۵	۰/۹۸۹۸۳	۰/۹۹۰۴۵
		AW	۱۴/۱۵۷۸۰	۱۸/۸۸۷۸۵	۲۶/۹۷۸۲۱	۳۵/۱۱۷۳۳
	۶	$\hat{\gamma}$	۰/۹۹۰۰۴	۰/۹۸۹۹۶	۰/۹۹۰۰۸	۰/۹۸۹۶۰
		AW	۱۲/۲۶۸۰۵	۱۶/۳۰۲۷۹	۲۳/۲۲۷۷۳	۳۰/۲۱۵۶۵

جدول ٤: برآورد سطوح اطمینان و متوسط طول فاصله‌ی تحمل برای $\theta = $ ۵ به ازای مقادیر مختلف m، β و γ.

γ	m		β ۰/۷	β ۰/۸	β ۰/۹	β ۰/۹۵
۰/۹۰	۳	$\hat{\gamma}$	۰/۹۰۱۰۳	۰/۹۰۰۱۰	۰/۹۰۰۱۵	۰/۸۹۹۵۲
		AW	۱۶/۸۰۶۸۳	۲۲/۱۳۷۳۳	۳۱/۳۶۷۲۰	۴۰/۷۱۵۹۷
	٤	$\hat{\gamma}$	۰/۹۰۰۲۹	۰/۹۰۰۵۸	۰/۹۰۱۹۵	۰/۹۰۰۰۶
		AW	۱۴/۴۳۵۶۳	۱۸/۸۹۶۳۱	۲۶/۶۸۱۶۷	۳۴/۴۷۱۹۵
	۵	$\hat{\gamma}$	۰/۹۰۰۲۶	۰/۹۰۰۶۳	۰/۹۰۰۶۷	۰/۹۰۰۳۹
		AW	۱۳/۲۰۴۹۲	۱۷/۱۹۰۸۸	۲۴/۰۴۶۶۴	۳۱/۰۲۰۷۷
	٦	$\hat{\gamma}$	۰/۹۰۱۵۱	۰/۸۹۹۸۹	۰/۹۰۱۵۹	۰/۹۰۰۶۵
		AW	۱۲/۴۷۶۹۵	۱۶/۱۲۶۵۳	۲۲/۴۷۴۱۰	۲۸/۸۱۹۴۳
۰/۹۵		$\hat{\gamma}$	۰/۹۵۰۰۹	۰/۹۵۰۹۰	۰/۹۵۱۰۴	۰/۹۵۰۹۸
		AW	۲۲/۲۲۲۷۴	۲۹/۶۵۳۰۴	۴۲/۱۵۸۳۴	۵۵/۱۲۰۷۳
	٤	$\hat{\gamma}$	۰/۹۵۰۳۳	۰/۹۴۹۷۰	۰/۹۵۰۵۱	۰/۹۵۰۱۶
		AW	۱۷/۸۸۹۷۲	۲۳/۷۶۲۳۳	۳۳/۸۷۲۲۷	۴۳/۷۹۰۳۴
	۵	$\hat{\gamma}$	۰/۹۵۰۱۰	۰/۹۴۹۹۰	۰/۹۴۹۹۳	۰/۹۵۰۳۳
		AW	۱۵/۷۴۱۱۹	۲۰/۷۴۹۲۲	۲۹/۳۸۸۹۵	۳۸/۱۲۳۸۱
	٦	$\hat{\gamma}$	۰/۹۵۰۳۷	۰/۹۵۰۱۴	۰/۹۵۱۳۲	۰/۹۵۱۸۷
		AW	۱۴/۴۸۴۷۰	۱۸/۹۱۱۷۳	۲۶/۷۰۹۸۸	۳۴/۵۷۷۵۸
۰/۹۹	۳	$\hat{\gamma}$	۰/۹۹۰۲۱	۰/۹۹۰۱۷	۰/۹۸۹۹۲	۰/۹۹۰۳۰
		AW	۴۱/۴۷۴۹۶	۵۵/۲۳۸۳۴	۷۹/۲۳۰۳۳	۱۰۲/۹۵۲۶۰
	٤	$\hat{\gamma}$	۰/۹۹۰۳۸	۰/۹۸۹۵۸	۰/۹۹۰۴۴	۰/۹۸۹۹۸
		AW	۲۹/۲۳۵۶۹	۳۹/۱۴۴۸۶	۵۵/۹۳۹۸۴	۷۲/۸۵۱۸۳
	۵	$\hat{\gamma}$	۰/۹۹۰۲۷	۰/۹۹۰۳۴	۰/۹۹۰۵۰	۰/۹۹۰۴۵
		AW	۲۳/۵۹۴۲۲	۳۱/۴۷۵۵۳	۴۵/۰۵۱۱۶	۵۸/۶۹۹۵۳
	٦	$\hat{\gamma}$	۰/۹۹۰۰۷	۰/۹۹۰۲۱	۰/۹۹۰۳۰	۰/۹۸۹۹۱
		AW	۲۰/۴۱۹۱۵	۲۷/۱۲۱۴۹	۳۸/۷۰۳۵۷	۵۰/۴۱۰۹۸

ب) با افزایش تعداد رکوردها، m، متوسط طول فاصله‌های تحمل کاهش می‌یابد. واضح است که با در اختیار داشتن رکوردهای بیشتر، اطلاعات بیشتری به دست می‌آید و در نتیجه فاصله‌های تحمل دقیق‌تری می‌توان یافت.

ج) با افزایش θ، متوسط طول فاصله‌های تحمل نیز افزایش می‌یابد. انتظار می‌رفت که این امر رخ دهد زیرا طول فاصله‌ی تحمل، ضریبی از $\widehat{\theta}$ می‌باشد.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، بر اساس داده‌های رکوردی مشاهده شده از توزیع نمایی، فاصله‌های تحمل دو طرفه با دم‌های برابر به دست آمدند. فاکتورهای تحمل، با حل همزمان معادله‌های (۸) و (۹) و به کمک روش عددی نیوتن–رافسون به دست می‌آیند. برای حل این معادله‌ها از بسته‌ی نرم‌افزاری Maple نسخه‌ی ۱۷ استفاده شده است. نتایج در جدول ۱ ارائه شده‌اند. مثالی از داده‌های میزان ریزش باران سالانه در شهر لس‌انجلس در بخش ۳ ارائه شد. همچنین دقت فاصله‌های تحمل ارائه شده بر اساس داده‌های رکوردی با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو مورد بررسی قرار گرفت. نتایج در جداول ۲، ۳ و ٤ ارائه شده‌اند، که به کمک آن‌ها می‌توان سطوح اطمینان برآورد شده و متوسط طول فاصله‌های تحمل را در حالت‌های مختلف با یکدیگر مقایسه نمود.

مراجع

[1] Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2003), Nonparametric Confidence and Tolerance Intervals from Record Values Data, *Statistical Papers*, **44**, 455-468.

[2] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998), *Records*, John Wiley & Sons, New York.

[3] Balakrishnan, N. and Chan, P. S. (1998), On the normal record values and associated inference, *Statistics and Probability Letters*, **39**, 73-80.

[4] Engelhardt, M. and Bain, L. J. (1978), Tolerance Limits and Confidence Limits on Reliability for the Two-parameter Exponential Distribution, *Technometrics*, **20**, 37-39.

[5] Fernández, A. J. (2010), Two-sided Tolerance Intervals in the Exponential Case: Corrigenda and Generalizations, *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 151-162.

[6] Goodman, L. A. and Madansky, A. (1962), Parameter-free and Nonparametric Tolerance Limits: The Exponential Case, *Technometrics*, **4**, 75-95.

[7] Guenther, W. C., Patil, S. A. and Uppuluri, V. R. R. (1976), One-sided β-content Tolerance Factors for the Two Parameter Exponential Distribution, *Technometrics*, **18**, 330-340.

[8] Guttman, I. (1959), Optimum Tolerance Regions and Power When Sampling from Some Non-normal Universes, *Annals of Mathematical Statistics*, **30**, 926-938.

[9] Jilek, M. (1981), A Bibliograpghy of Statistical Tolerance Regions, *Mathematische Operationsforshung und Statistik - Series Statistics*, **15**, 441-456.

[10] Jilek, M. and Ackermann, H. (1989), A Bibliograpghy of Statistical Tolerance Regions, II, *Statistics*, **20**, 165-172.

[11] Kiapour, A. and Naghizadeh Qomi, N. (2016). Equal-tailed and Shortest Bayesian Tolerance Intervals Based on Exponential k-Records. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, doi:10.1080/03610926.2015.1076476.

[12] Naghizadeh Qomi, N., Kiapour, A. (2016). Shortest Tolerance Intervals Controlling Both Tails of the Exponential Distribution Based on Record Values. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, doi:10.1080/03610926.2014.990106.

[13] Owen, D. B. (1964). Control of Percentages in Both Tails of the Normal Distributions. *Technometrics,* 6, 377-387.

[14] Patil, J. K. (1986), Tolerance Limits - A Review, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **15**, 2719-2762.

[15] Wilks, S. S. (1941), Determination of Sample Sizes for Setting Tolerance Limits, *Annals of Mathematical Statistics*, **12**, 91-96.