مقایسهٔ دو آزمون درجهٔ آزادی تقریبی و بوت‌استرپ پارامتری در مدل تحلیل واریانس دوطرفهٔ نامتعادل ناهمگن

فهیمه برومندی[۱]، محمود خراتی کوپائی[۲] و جواد بهبودیان[۳]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۲/۱۲

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۸/۱

چکیده:

چنانچه در مدل تحلیل واریانس دوطرفه فرض برابری واریانس‌ها برقرار باشد، برای بررسی اثر دو عامل روی متغیر پاسخ، از آزمون F کلاسیک استفاده می‌شود. اما در اکثر مسائل کاربردی، فرض برابری واریانس‌ها برقرار نیست. در سال‌های اخیر، برای بررسی اثر عامل‌ها در حالت نابرابری واریانس‌ها، آزمون‌های مختلفی پیشنهاد شده است. در این مقاله ضمن معرفی دو آزمون درجهٔ آزادی تقریبی و بوت‌استرپ پارامتری، با مطالعهٔ شبیه‌سازی، عملکرد این دو آزمون را از نظر توان و خطای نوع اول مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که هر دو آزمون در کنترل خطای نوع اول عملکرد خوبی دارند و از نظر توان آزمون، اختلاف ناچیزی با یکدیگر دارند. از لحاظ محاسبات، روش بوت‌استرپ پارامتری بر اساس شبیه‌سازی بوده، زمان‌بر ماست؛ در حالی که روش درجهٔ آزادی تقریبی از لحاظ استفاده در عمل ساده‌تر است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل واریانس دوطرفهٔ ناهمگن، بوت‌استرپ پارامتری، درجهٔ آزادی تقریبی، توزیع T^2-هتلینگ.

۱ مقدمه

مدل تحلیل واریانس دوطرفه برای بررسی اثر دو عامل روی متغیر پاسخ به کار می‌رود. این مدل به‌طور گسترده در زیست‌شناسی، فیزیولوژی، فیزیک و علوم آزمایشگاهی کاربرد دارد. در یک مدل تحلیل واریانس دوطرفه هنگامی که اندازهٔ نمونه در خانه‌های جدول برابر و فرض برابری واریانس‌ها برقرار باشد برای بررسی معنی‌داری اثرهای دو عامل از آزمون F کلاسیک استفاده می‌شود. در متون آماری نشان داده شده است که آزمون F در این شرایط خواص مطلوبی دارد لیمان [۷]. فوجیکوشی [۲] نشان داد در حالتی که فرض برابری واریانس‌ها برقرار باشد اما اندازهٔ نمونه در خانه‌ها یکسان نباشد، آزمون F همچنان عملکرد خوبی دارد. اما در اکثر مسائل کاربردی، فرض همگنی واریانس‌ها برقرار نیست. در این شرایط، آزمون F خطای نوع اول را کنترل نمی‌کند و باعث نتایج گمراه‌کننده‌ای می‌شود. ژانگ [۱۰] نشان داد در سطح معنی‌داری ۰/۰۵، هنگامی که با افزایش اندازهٔ نمونه در خانه‌ها واریانس خانه‌ها نیز افزایش یابد، اندازهٔ خطای آزمون F کمتر از ۰/۰۵ و هنگامی که با افزایش اندازهٔ نمونه در خانه‌ها واریانس خانه‌ها کاهش یابد، اندازهٔ خطای آزمون F بیشتر از ۰/۰۵ است. به این ترتیب سؤالی که مطرح می‌شود این است که آزمون مناسب برای مدل تحلیل واریانس دوطرفهٔ نامتعادل ناهمگن کدام است؟ در ادامه به مرور آزمون‌های پیشنهادی در سال‌های اخیر می‌پردازیم.

جیمز [۳] و یوهانسن [۴] هر یک آزمون‌هایی تقریبی پیشنهاد کردند که طبق مطالب ارائه‌شده به‌وسیلهٔ یاناگی‌هارا و یوآن [۹] و کریشنامورتی و لو [۵]، این دو آزمون خطای نوع اول را کنترل نمی‌کنند. علاوه بر این ویلکاکس [۸] به تعمیم آزمون جیمز پرداخت. کراچکف [۶] بر اساس شبیه‌سازی، آزمونی تقریبی معرفی کرد. آناندا و ویراهاندی [۱] آزمون F تعمیم‌یافته بر اساس مفهوم p-مقدار تعمیم‌یافته ارائه کردند.

[۱] دانشجوی دکتری، دانشگاه شیراز

[۲] دانشیار گروه آمار، دانشگاه شیراز

[۳] استاد گروه آمار، دانشگاه شیراز

هر یک از این سه آزمون، گرچه خطای نوع اول را کنترل می‌کند، بر اساس شبیه‌سازی است و برای اجرا پیچیده و زمان‌بر است. ژانگ [۱۰] آزمونی با درجهٔ آزادی تقریبی ارائه کرد که به‌اختصار ADF[۴] نامیده می‌شود. آمارهٔ این آزمون تحت فرض صفر به‌طور تقریبی دارای توزیع F است که فقط یکی از درجه‌های آزادی آن با استفاده از رابطه ساده بر اساس مشاهدات برآورد می‌شود. آزمون ADF مزایایی دارد از جمله اینکه تحت تبدیل $\tilde{y}_{ijk}=\lambda y_{ijk}+\theta$ ناوردا است و می‌توان همهٔ آزمون‌های مربوط به مدل تحلیل واریانس دوطرفه نظیر اثر ثابت، اثر متقابل و آزمون‌های مقابله[۵] را به‌وسیلهٔ آن انجام داد. ژانگ [۱۰] با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی نشان داد آزمون ADF از نظر خطای نوع اول و توان تجربی بهتر از آزمون F کلاسیک عمل می‌کند.

ژو و همکاران [۱۱] آزمونی با روش بوت‌استرپ پارامتری ارائه کردند که به‌اختصار PB[۶] نامیده می‌شود و در آن نرخ خطای نوع اول و توان آزمون با استفاده از شبیه‌سازی مونته کارلویی برآورد شده است. ژو و همکاران [۱۱] با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی نشان دادند که آزمون PB از نظر توان و خطای نوع اول بهتر از آزمون F تعمیم‌یافته عمل می‌کند.

تاکنون مقایسه‌ای بین دو آزمون ADF و PB انجام نشده است. در این مقاله با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی، عملکرد دو آزمون ADF و PB را از نظر نرخ خطای نوع اول و توان آزمون مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. در بخش ۲ در ابتدا ضمن معرفی مدل تحلیل واریانس دوطرفه، دو آزمون ADF و PB معرفی می‌شوند. در بخش ۳ با مطالعهٔ شبیه‌سازی، عملکرد دو آزمون از نظر توان و خطای نوع اول ارزیابی می‌شود. در انتها، بخش ۵ به بحث و نتیجه‌گیری اختصاص خواهد یافت.

۲ معرفی آزمون‌ها

مدل تحلیل واریانس دوطرفه با عامل‌های A و B را که هر یک به‌ترتیب دارای a و b سطح هستند در نظر بگیرید. تعداد کل ترکیب‌های تیماری ab است. فرض کنید برای $i=۱,۲,\cdots,a$ و $j=۱,۲,\cdots,b$ در ijامین ترکیب تیماری، نمونه تصادفی n_{ij}تایی در دسترس است. برای $k=۱,۲,\cdots,n_{ij}$ مشاهدات نمونهٔ تصادفی با y_{ijk} نشان داده می‌شود که از مدل

$$y_{ijk}=\mu_{ij}+\epsilon_{ijk},\quad \epsilon_{ijk}\sim N(۰,\sigma_{ij}^{۲}),$$
$$i=۱,...a;\quad j=۱,...b;\quad k=۱,...,n_{ij}\quad (۱)$$

پیروی می‌کند، که در آن μ_{ij} و $\sigma_{ij}^{۲}$ به‌ترتیب میانگین و واریانس ijامین ترکیب تیماری‌اند. در مدل با اثر ثابت، میانگین ijامین ترکیب تیماری به‌صورت

$$\mu_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_{ij}\quad (۲)$$

است، که در آن μ میانگین کل، α_i اثر اصلی سطح iام عامل A، β_j اثر اصلی سطح jام عامل B، γ_{ij} اثر متقابل بین سطح iام عامل A و سطح jام عامل B را نشان می‌دهد. در نتیجه می‌توان مدل را به‌صورت

$$y_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_{ij}+\epsilon_{ijk};\quad \epsilon_{ijk}\sim N(۰,\sigma_{ij}^{۲})\quad (۳)$$

بازنویسی کرد. همهٔ این پارامترها شناسایی‌ناپذیرند و نیازمند شرایط شناسایی هستند. فرض کنید دنباله‌ای از وزن‌های $w_{ij}=u_iv_j$ در دسترس باشد که در آن u_i و v_j مثبت و $\sum_{i=۱}^{a}u_i=۱$ $\sum_{j=۱}^{b}v_j=$ است. شرایط شناسایی

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=۱}^{a}w_i\alpha_i=۰\\
&\sum_{j=۱}^{b}w_{.j}\beta_j=۰\\
&\sum_{i=۱}^{a}w_{ij}\gamma_{ij}=۰,\quad j=۱,۲,...,b-۱\\
&\sum_{j=۱}^{b}w_{ij}\gamma_{ij}=۰,\quad i=۱,۲,...a-۱\qquad (۴)
\end{aligned}$$

را در نظر بگیرید، که در آن $w_{i.}=\sum_{j=۱}^{b}w_{ij}$ و $w_{.j}=\sum_{i=۱}^{a}w_{ij}$ است.

برآوردگرهای نااریب میانگین و واریانس ijامین ترکیب تیماری به‌ترتیب با $\hat{\mu}_{ij}$ و $\hat{\sigma}_{ij}^{۲}$ نشان داده می‌شوند و برابرند

[۴] approximate degree of freedom

[۵] contrast

[۶] parametric bootstrap

با

$$\hat{\mu}_{ij} = n_{ij}^{-1}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk},$$
$$\hat{\sigma}_{ij}^{2} = (n_{ij}-1)^{-1}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(y_{ijk}-\hat{\mu}_{ij})^{2}. \qquad (5)$$

در مدل تحلیل واریانس دوطرفه علاقه‌مندیم آزمون کنیم که

$$H_{0A}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0,$$
$$H_{0B}: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0,$$
$$H_{OAB}: \gamma_{11} = \cdots = \gamma_{1b} = \cdots = \gamma_{a1} = \cdots = \gamma_{ab} = 0. \qquad (6)$$

که دو فرضیهٔ اول، عدم اثر اصلی و فرضیهٔ سوم عدم اثر متقابل بین دو عامل را بررسی می‌کند. با در نظر گرفتن بردارهای u، v و μ به‌صورت

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, ..., u_a]^T,$$
$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, ..., v_b]^T,$$
$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_{11}, ..., \mu_{1b}, ..., \mu_{a1}, ..., \mu_{ab}]^T$$

و با توجه به شرایط شناسایی (۴)، فرضیه‌های بالا را در نمادگذاری ماتریسی می‌توان به‌صورت

$$H_{0A}: \mathbf{C}_{a\mu} = 0,$$
$$H_{0B}: \mathbf{C}_{b\mu} = 0,$$
$$H_{0AB}: \mathbf{C}_{ab\mu} = 0 \qquad (7)$$

بازنویسی نمود، که در آن

$$\mathbf{C}_a = (\mathbf{I}_{a-1}, -\mathbf{1}_{a-1})[(\mathbf{I}_a - \mathbf{1}_a\mathbf{u}^T)\otimes \mathbf{v}^T]$$
$$\mathbf{C}_b = (\mathbf{I}_{b-1}, -\mathbf{1}_{b-1})[\mathbf{u}^T \otimes (\mathbf{I}_b - \mathbf{1}_b\mathbf{v}^T)]$$
$$\mathbf{C}_{ab} = [\mathbf{I}_{a-1}, -\mathbf{1}_{a-1})(\mathbf{I}_a - \mathbf{1}_a\mathbf{u}^T)] \otimes [(\mathbf{I}_{b-1}, -\mathbf{1}_{b-1})(\mathbf{I}_b - \mathbf{1}_b\mathbf{v}^T)]$$

و $\mathbf{I}_r$ ماتریس همانی مرتبهٔ r، $\mathbf{1}_r$ بردار r بعدی با مؤلفه‌های برابر با ۱ و $\otimes$ نماد ضرب کرونکر است. در ادامه فقط به معرفی آمارهٔ آزمون ADF و PB در بررسی معنی‌داری اثر متقابل می‌پردازیم.

۱.۲ آزمون ADF

آمارهٔ آزمون ADF در بررسی معنی‌داری اثر متقابل به‌صورت

$$T = (\mathbf{C}_{ab}\hat{\boldsymbol{\mu}})^T(\mathbf{C}_{ab}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{C}_{ab}^T)^{-1}(\mathbf{C}_{ab}\hat{\boldsymbol{\mu}}) \qquad (8)$$

است، که در آن $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ و $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ به‌صورت

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = [\hat{\mu}_{11}, ..., \hat{\mu}_{1b}, ..., \hat{\mu}_{a1}, ..., \hat{\mu}_{ab}]^T$$
$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = diag(\hat{\sigma}_{11}^2.n_{11}, ..., \hat{\sigma}_{1b}^2.n_{1b}, ..., \hat{\sigma}_{a1}^2.n_{a1}, ..., \hat{\sigma}_{ab}^2.n_{ab})$$

است. در واقع آزمون ADF این بر اساس است که تحت فرض صفر، توزیع آمارهٔ T به وسیلهٔ توزیع T^2- هتلینگ با درجه‌های آزادی q و $\hat{d}$ تقریب زده می‌شود که $\hat{d}$ از رابطهٔ

$$\hat{d} = \frac{\frac{q(q+1)}{2}}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(n_{ij}-1)^{-1}\hat{\delta}_{ij}^2} \qquad (9)$$

به دست می‌آید، که در آن $\hat{\delta}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}^2}{n_{ij}}\mathbf{C}_{ij}^T(\mathbf{C}_{ab}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{C}_{ab}^T)^{-1}\mathbf{C}_{ij}$؛ و $\mathbf{C}_{ij}$، (i,j)امین ستون ماتریس $\mathbf{C}_{ab}$ است. به این ترتیب به‌طور تقریبی داریم:

$$\frac{(\hat{d}-q+1)T}{q\hat{d}} \sim F_{(q,\hat{d}-q+1)}. \qquad (10)$$

در نتیجه فرض صفر هنگامی رد می‌شود که داشته باشیم:

$$\frac{(\hat{d}-q+1)T}{q\hat{d}} > F_{(q,\hat{d}-q+1)}(\alpha). \qquad (11)$$

۲.۲ آزمون PB

روش بوت‌استرپ پارامتری شامل نمونه‌گیری از مدل‌های برآورد شده است که نمونه‌ها یا آمارهٔ نمونه از مدل پارامترهای جایگزین‌شده با برآوردشان تولید می‌شوند. برای بررسی معنی‌داری اثر متقابل به‌روش بوت‌استرپ پارامتری الگوریتم زیر اجرا می‌شود:

۱. در ابتدا برای بردارهای معلوم $\hat{\boldsymbol{\mu}} = [\hat{\mu}_{11}, \hat{\mu}_{12}, ..., \hat{\mu}_{ab}]^T$، $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = [\hat{\sigma}_{11}^2, \hat{\sigma}_{12}^2, ..., \hat{\sigma}_{ab}^2]$ و $\mathbf{r} = [n_{11}, n_{12}, ..., n_{ab}]$ مقدار مشاهده‌شدهٔ $\tilde{s}_1$ از رابطهٔ

$$\tilde{s}_1 = \hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{I} - \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}(\mathbf{x}^T\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{x})^{-} \times \mathbf{x}^T\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}})\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\boldsymbol{\mu}} \qquad (12)$$

به دست می‌آوریم، که در آن $\mathbf{x}^-$ نشان‌دهندهٔ وارون تعمیم‌یافتهٔ $\mathbf{x}$ است و $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ و $\mathbf{x}$ به‌صورت زیر هستند:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = diag(\hat{\sigma}_{11}^2.n_{11}, \hat{\sigma}_{12}^2.n_{12}, ..., \hat{\sigma}_{ab}^2.n_{ab})$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{1}_{ab}, \mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_b, \mathbf{1}_a \otimes \mathbf{I}_b)$$

۲. سپس $\hat{\mu}_{ij}^* \sim N(0, \hat{\sigma}_{ij}^2.n_{ij})$ و $\hat{\sigma}_{ij}^{2*} \sim \hat{\sigma}_{ij}^2 X_{n_{ij}-1}^2.(n_{ij}-1)$ را تولید و $\tilde{s}_1^*$ را مشابه رابطهٔ (۱۲) به‌صورت

$$\tilde{s}_1^* = \hat{\boldsymbol{\mu}}^{*T} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*^{-\frac{1}{2}}} \mathbf{x}(\mathbf{x}^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*^{-1}} \mathbf{x})^- \mathbf{x}^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*^{-\frac{1}{2}}}) \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*^{-\frac{1}{2}}} \hat{\boldsymbol{\mu}}^* \quad (۱۳)$$

به دست می‌آوریم که در آن $\hat{\boldsymbol{\mu}}^* = [\hat{\mu}_{11}^*, \hat{\mu}_{12}^*, ..., \hat{\mu}_{ab}^*]^T$ و $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* = diag(\hat{\sigma}_{11}^{2*}.n_{11}, ..., \hat{\sigma}_{1b}^{2*}.n_{ab})$ است.

۳. مرحلهٔ ۲ را B بار تکرار می‌کنیم و $\tilde{s}_{I1}^*, ..., \tilde{s}_{IB}^*$ به دست می‌آید.

۴. $\widehat{\text{مقدار} - p} = (\tilde{s}_{Ib}^* > \tilde{s}_I; b = 1, ..., B).B$.

۳ مطالعهٔ شبیه‌سازی

در این بخش، بر اساس مطالعات شبیه‌سازی، عملکرد دو آزمون ADF و PB با استفاده از دو ملاک نرخ خطا و توان آزمون برای بررسی معنی‌داری اثر متقابل، مورد مقایسه قرار می‌گیرند. برای این منظور، نیازی به تولید داده‌های مستقیم نیست؛ بلکه فقط کافی است در هر ترکیب تیماری، میانگین و واریانس نمونه تولید شود؛ زیرا هر دو آزمون ADF و PB با استفاده از میانگین و واریانس نمونه در ترکیب‌های تیماری اجرا می‌شوند. برای ترکیبات مختلف بردار اندازهٔ نمونه به‌صورت $\mathbf{n} = [n_{11}, n_{12}, ..., n_{ab}]$، بردار میانگین $\boldsymbol{\mu} = [\mu_{11}, \mu_{12}, ..., \mu_{ab}]^T$ و بردار واریانس $\boldsymbol{\sigma}^2 = [\sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, ..., \sigma_{ab}^2]$ که در اختیار است، بردار میانگین و واریانس نمونه در خانه‌ها، $\hat{\boldsymbol{\mu}} = [\hat{\mu}_{11}, \hat{\mu}_{12}, ..., \hat{\mu}_{ab}]^T$ و $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2 = [\hat{\sigma}_{11}^2, \hat{\sigma}_{12}^2, ..., \hat{\sigma}_{ab}^2]$، به‌گونه‌ای تولید می‌شوند که در آن‌ها $\hat{\mu}_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2.n_{ij})$ و $\hat{\sigma}_{ij}^2 \sim (\sigma_{ij}^2.(n_{ij}-1))X_{n_{ij}-1}^2$ است. با توجه به رابطهٔ (۲) و این‌که دو آزمون ADF و PB ناوردای مکانی هستند، بدون از دست دادن کلّیت مسئله، $\mu_{ij} = \gamma_{ij}$ قرار داده شده است، که درنتیجه هنگامی که $\gamma = (\gamma_{11}, ..., \gamma_{ab})$، مجموعهٔ میانگین‌ها برای تولید داده‌های تصادفی، صفر باشد فرض صفر برقرار است و می‌توان نرخ خطای تجربی نوع اول را به دست آورد و هنگامی که γ غیرصفر است تحت فرض مقابل توان آزمون محاسبه می‌شود. شایان ذکر است که در محاسبات آزمون ADF از دنبالهٔ وزن‌های برابر، یعنی $u_i = \frac{1}{a}$ و $v_j = \frac{1}{b}$ استفاده و با ۱۰۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونته‌کارلویی فرایند، خطای نوع اول و توان برآورد شده است. در آزمون PB شبیه‌سازی دومرحله‌ای را به‌کار می‌بریم. برای سطح معنی‌داری α و ترکیبات مختلف پارامترهای $\mathbf{n}$، σ^2 و γ، با ۵۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونته‌کارلو، هر بار، بردار $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2$ تولید و $\tilde{s}_1$ در رابطهٔ (۱۲) برای هر یک از بردارهای تولید شده محاسبه می‌شود. سپس برای هر یک از $\tilde{s}_1$ها با ۱۰۰۰۰ بار تکرار بوت‌استرپ ($B = 10000$)، p- مقدار با توجه به مراحل ذکر شده در قسمت قبل برآورد می‌شود. در این ۵۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی، میانگین تعداد دفعاتی که p- مقدار کمتر از سطح معنی‌داری α می‌باشد، هنگامی که γ صفر یا غیرصفر است، به‌ترتیب نرخ خطای تجربی نوع اول و توان تجربی برآورد می‌شود. شایان ذکر است که در هر دو آزمون سطح معنی‌داری ۰/۰۵ در نظر گرفته شده است. در جدول ۱ مقدار خطای نوع اول و توان تجربی دو آزمون ADF و PB برای ترکیبات مختلف پارامترهای $\mathbf{n}$ و $\boldsymbol{\sigma}^2$ هنگامی که ($b = 3$ و $a = 2$)، ($b = 4$ و $a = 4$) و ($b = 3$ و $a = 6$) است محاسبه شده است. شایان ذکر است که $\mathbf{w}_r$ نشان‌دهندهٔ برداری است که r بار تکرار می‌شود.

$$\mathbf{n}_1 = (15, 15, 20, 20, 25, 25);$$

$$\mathbf{n}_2 = (15, 18, 21, 24, 27, 30);$$

$$\mathbf{n}_3 = (4, 8, 12, 20)_4;$$

$$\mathbf{n}_4 = (11, 11, 11, 11)_4;$$

$$\mathbf{n}_5 = (15, 15, 15, 15, 15, 15, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 25, 25, 25, 25, 25, 25);$$

$$\mathbf{n}_6 = (15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32);$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1^2 = (0{,}1, 0{,}2, 0{,}3, 0{,}4, 0{,}5, 1);$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2^2 = (0{,}3, 0{,}9, 0{,}4, 0{,}7, 0{,}5, 1);$$

$$\boldsymbol{\sigma}_3^2 = (1, 1, 1, 1)_4;$$

$$\boldsymbol{\sigma}_4^2 = (4, 3, 2, 1)_4;$$

$$\boldsymbol{\sigma}_5^2 = (0{,}1, 0{,}1, 0{,}2, 0{,}2, 0{,}3, 0{,}3, 0{,}4, 0{,}4,$$

$$۰٫۵, ۰٫۵, ۰٫۶, ۰٫۶, ۰٫۷, ۰٫۷, ۰٫۸, ۰٫۸, ۰٫۹, ۱);$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{۶} = (۰٫۹, ۰٫۸, ۰٫۷, ۰٫۶, ۰٫۵, ۰٫۴, ۰٫۳, ۰٫۲, ۰٫۱)_{۲};$$

$$\gamma_{۱} = (۰, ۰, -۰٫۱, ۰٫۱, ۰٫۲, ۰٫۴);$$

$$\gamma_{۲} = (۰, ۰, ۰, ۰, ۰, -۰٫۱, -۰٫۱, ۰٫۱, ۰٫۱, ۰٫۲, ۰٫۲, ۰٫۳, ۰٫۳, ۰٫۴, ۰٫۴, ۰٫۵, ۰٫۵, ۰٫۶, ۰٫۶, ۰٫۷, ۰٫۷).$$

با توجه به جدول ۱، با افزایش اندازهٔ نمونه در ترکیب‌های تیماری، توان هر دو آزمون ADF و PB رو به افزایش است. به‌عنوان مثال در ($a = ۲$ و $b = ۳$) برای پارامترهای $\gamma = ۲\gamma_{۱}$ و $\boldsymbol{\sigma}^{۲} = \boldsymbol{\sigma}^{۲}_{۱}$، توان دو آزمون ADF و PB هنگامی که اندازهٔ نمونه $n_{۱}$ است به‌ترتیب برابر با ۰٫۶۹۴ و ۰٫۶۹۹ می‌باشد که با تغییر $\mathbf{n_1}$ به $\mathbf{n_2}$ توان دو آزمون به‌ترتیب به ۰٫۷۶۲ و ۰٫۷۶۲ افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش واریانس در ترکیب‌های تیماری، توان هر دو آزمون ADF و PB رو به کاهش است. برای مثال در ($a = ۶$ و $b = ۳$) برای پارامترهای $\gamma = ۳\gamma_{۳}$ و $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{۶}$، توان دو آزمون ADF و PB هنگامی که بردار واریانس $\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{۵}$ است به‌ترتیب برابر با ۰٫۹۵۶ و ۰٫۹۵۷ می‌باشد، که با تغییر $\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{۵}$ به $\boldsymbol{\sigma}^{۲}_{۶}$ توان دو آزمون به‌ترتیب به ۰٫۶۴۲ و ۰٫۶۳۸ کاهش می‌یابد. علاوه بر این با افزایش γ، مجموعه میانگین‌ها برای تولید داده‌های تصادفی، توان هر دو آزمون نیز افزایش می‌یابد. به‌عنوان مثال در ($a = ۴$ و $b = ۴$) برای پارامترهای $\boldsymbol{\sigma}^{۲} = \boldsymbol{\sigma}^{۲}_{۴}$ و $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{۳}$، توان دو آزمون ADF و PB، هنگامی که $\gamma = ۲\gamma_{۲}$ است، به‌ترتیب برابر با ۰٫۳۸۵ و ۰٫۳۶۴ می‌باشد که با تغییر $۲\gamma_{۲}$ به $۳\gamma_{۲}$ توان و آزمون به‌ترتیب به ۰٫۸۱۶ و ۰٫۸۳۰ تغییر می‌کند.

در حالت کلی، با توجه به جدول ۱ درمی‌یابیم که هر دو آزمون ADF و PB خطا را به‌خوبی کنترل می‌کنند و از نظر توان اختلاف ناچیزی با یکدیگر دارند.

۴ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله در مدل تحلیل واریانس دوطرفهٔ نامتعادل، هنگامی که فرض برابری واریانس‌ها برقرار نیست به معرفی دو آزمون درجهٔ آزادی تقریبی و بوت‌استرپ برای بررسی معنی‌داری اثر متقابل پرداخته شد. در مطالعهٔ شبیه‌سازی ملاحظه شد که هر دو آزمون ADF و PB خطای نوع اول را به‌خوبی کنترل می‌کنند و از نظر توان آزمون، اختلاف ناچیزی دارند. توان هر دو آزمون با افزایش اندازهٔ نمونه در ترکیب‌های تیماری و مجموعهٔ میانگین‌ها برای تولید داده‌های تصادفی افزایش می‌یابد و همچنین با افزایش واریانس در ترکیب‌های تیماری، توان هر دو آزمون رو به کاهش است. لیکن محاسبات با روش بوت‌استرپ پارامتری بر اساس شبیه‌سازی بوده، زمان‌بر است؛ در حالی که محاسبات با روش تقریب درجهٔ آزادی به‌دلیل استفاده از تقریب ساده می‌شود و سرعت می‌یابد. بنابراین استفاده از روش تقریب درجه آزادی در عمل توصیه می‌شود.

جدول ۱. مقدار خطای نوع اول و توان تجربی دو آزمون ADF و PB

$a=۲$ و $b=۳$

			$\gamma_1=(\gamma_{11},\dots,\gamma_{23})$			
n	$\boldsymbol{\sigma}^2$	$Test$	۰	γ_1	$2\gamma_1$	$3\gamma_1$
$\mathbf{n}_1$	$\boldsymbol{\sigma}_1^2$	ADF	۰/۰۴۹	۰/۲۱۴	۰/۶۹۴	۰/۹۷۰
		PB	۰/۰۵۲	۰/۲۱۰	۰/۶۹۹	۰/۹۶۵
	$\boldsymbol{\sigma}_2^2$	ADF	۰/۰۴۹	۰/۱۶۷	۰/۵۵۰	۰/۹۰۲
		PB	۰/۰۵۵	۰/۱۶۲	۰/۵۵۴	۰/۸۹۸
$\mathbf{n}_2$	$\boldsymbol{\sigma}_1^2$	ADF	۰/۰۵۲	۰/۲۴۰	۰/۷۶۲	۰/۹۸۷
		PB	۰/۰۴۶	۰/۲۴۶	۰/۷۶۲	۰/۹۸۲
	$\boldsymbol{\sigma}_1^2$	ADF	۰/۰۵۱	۰/۱۸۶	۰/۶۱۴	۰/۹۳۳
		PB	۰/۵۰	۰/۱۸۴	۰/۶۱۸	۰/۹۳۱

$a=۴$ و $b=۶$

			$\gamma_2=(\gamma_{11},\dots,\gamma_{44})$			
n	$\boldsymbol{\sigma}^2$	$Test$	۰	γ_2	$2\gamma_2$	$3\gamma_2$
$\mathbf{n}_3$	$\boldsymbol{\sigma}_3^2$	ADF	۰/۰۵۰	۰/۱۷۱	۰/۷۱۳	۰/۹۸۸
		PB	۰/۰۴۶	۰/۱۶۲	۰/۶۹۸	۰/۹۸۸
	$\boldsymbol{\sigma}_4^2$	ADF	۰/۰۵۱	۰/۱۱۵	۰/۳۸۵	۰/۸۳۰
		PB	۰/۰۴۴	۰/۹۶	۰/۳۶۴	۰/۸۱۶
$\mathbf{n}_4$	$\boldsymbol{\sigma}_3^2$	ADF	۰/۰۴۸	۱۸۰	۰/۶۹۴	۰/۹۸۰
		PB	۰/۴۴	۰/۱۷۶	۰/۶۸۹	۰/۹۷۸
	$\boldsymbol{\sigma}_4^2$	ADF	۰/۰۴۶	۰/۱۲۵	۰/۴۷۰	۰/۸۸۰
		PB	۰/۰۴۷	۰/۱۱۹	۰/۴۶۴	۰/۸۷۰

$a=۲$ و $b=۳$

			$\gamma_3=(\gamma_{11},\dots,\gamma_{63})$			
n	$\boldsymbol{\sigma}^2$	$Test$	۰	γ_3	$2\gamma_3$	$3\gamma_3$
$\mathbf{n}_5$	$\boldsymbol{\sigma}_5^2$	ADF	۰/۰۵۴	۰/۱۲۵	۰/۵۲۷	۰/۹۱۰
		PB	۰/۰۵۲	۰/۱۳۶	۰/۵۳۰	۰/۹۱۳
	$\boldsymbol{\sigma}_6^2$	ADF	۰/۰۵۰	۰/۰۸۸	۰/۲۴۸	۰/۵۶۶
		PB	۰/۰۵۱	۰/۰۹۴	۰/۲۴۷	۰/۵۷۲
$\mathbf{n}_6$	$\boldsymbol{\sigma}_5^2$	ADF	۰/۰۵۰	۰/۱۶۳	۰/۶۰۶	۰/۹۵۶
		PB	۰/۰۴۵	۰/۱۵۳	۰/۵۹۶	۰/۹۵۷
	$\boldsymbol{\sigma}_6^2$	ADF	۰/۰۵۰	۰/۰۹۷	۰/۲۹۳	۰/۶۴۲
		PB	۰/۰۴۶	۰/۰۸۹۸	۰/۲۸۹	۰/۶۳۸

مراجع

[1] Ananda, M. M. and Weerahandi, S. (1997). Two-way ANOVA with unequal cell frequencies and unequal variances, *Statistica Sinica*, **7**, 631-646.

[2] Fujikoshi, Y. (1993). Two-Way ANOVA models with unbalanced data, *Discrete Mathematics*, **116**, 315-334.

[3] James, G. S. (1954). Tests of linear hypotheses in unicatiate and multivariate analysis when the ratios of the population variances are unknown, *Biometrika*, **41**, 19-43.

[4] Johansen, S. (1980). The Welch-James approcimation to the distribution of the residual sum of squares in a weighted linear regession, *Biometrika*, **67**, 85-95.

[5] Krishnamoorthy, K. and Lu, F. (2010). A parametric bootstrap solution to the MANOVA under heteroscedasticity, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 873-887.

[6] Krutchkoff, R. G. (1989). Two- way fixed effects analysis of variance when the error variances may be unequal, *Journal of Statistical Computation and Simulation.*, **32**, 177-183.

[7] Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses*, Wiley, New York.

[8] Wilcox, R. R. (1989). Adjusting for unequal variances when comparing means in one-way and two-way fixed effects ANOVA model, *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, **14**, 269-278.

[9] Yanagihara, H. and Yuan, K. H. (2005). Three approximate solutions to the multicariate Behrens-Fisher problem, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **34**, 975-988.

[10] Zhang, J. T. (2011). An approximate degrees of freedom test for heteroscedastic two-way ANOVA, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **142**, 336-346.

[11] Xu, L. W., Yang, F. Q., Abula, A., and Qin, S. (2013). A parametric bootstrap approach for two-way ANOVA in presence of possible in traction with unequal variances. *Journal of Multivariate analysis*, **115**, 172-180.