

محاسبه دقیق بیشینه احتمالات پوشش بازه‌های اطمینان با کران‌های صعودی برای میانگین توزیع پواسون

علی‌رضا شیروانی^۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۱۷

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۷/۱۷

چکیده:

توزیع پواسون یک مدل استاندارد برای تحلیل داده‌های شمارشی است و برآورد پارامتر میانگین این توزیع در عمل کاربرد زیادی دارد. تا به حال بازه‌های اطمینان متعددی برای میانگین توزیع پواسون ارائه شده که همگی مجانبی هستند و مقایسه دقیق آن‌ها اهمیت دارد. احتمال پوشش بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ برای میانگین متغیر تصادفی پواسون X با پارامتر نامعلوم θ تابعی نسبت به θ است. از آنجا که توزیع پواسون گسسته است، تابع احتمال پوشش شکل بسته‌ای ندارد و با تغییر θ در فضای پارامتری تغییر می‌کند. بنا بر این محاسبه بیشینه، کمینه و میانگین احتمالات پوشش به صورت دقیق برای بازه‌های اطمینان پارامتر θ کار بسیار مشکلی است. روش محاسبه کمینه و میانگین دقیق احتمالات پوشش بازه‌های اطمینان با کران‌های صعودی برای پارامتر θ توسط وانگ [۱۱] ارائه شده است. در این مقاله روش محاسبه دقیق بیشینه احتمالات پوشش بازه‌های اطمینان با کران‌های صعودی برای پارامتر نامعلوم θ در توزیع پواسون ارائه می‌شود. اگر تصمیم‌گیری با مقایسه همزمان بازه‌های اطمینان بر اساس بیشینه، کمینه و میانگین احتمالات پوشش آن‌ها انجام شود، مطمئن‌تر خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: توزیع پواسون، بازه اطمینان، احتمال پوشش، ضریب اطمینان، میانگین احتمال پوشش، بیشینه احتمالات پوشش.

۱ مقدمه

اطمینان MSC و کابایلا و برن [۴] یک بازه اطمینان دقیق و کوتاه برای پارامتر میانگین توزیع پواسون ارائه کرده‌اند. شورتمن و مارتینز [۸] و ساهای و خورشید [۷] دقت چند بازه اطمینان مجانبی ارائه شده برای پارامتر میانگین توزیع پواسون را بررسی کرده‌اند. کابایلا و لوید [۵] نیز بازه‌های اطمینانی را برای پارامترهای مجهول توزیع‌های گسسته ارائه کرده‌اند. از آنجا که اکثر بازه‌های ارائه شده دارای کران‌های صعودی هستند، بازه‌های اطمینان با کران‌های صعودی اهمیت ویژه‌ای می‌یابند. بنا بر این در این‌جا بازه‌های اطمینان $(L(X), U(X))$ را به صورتی در نظر می‌گیریم که $L(X)$ و $U(X)$ تابعی صعودی نسبت به X باشند. وانگ [۱۱] روش محاسبه دقیق ضریب اطمینان و میانگین احتمال پوشش بازه‌های اطمینان با کران‌های صعودی برای توزیع‌های گسسته یک پارامتری را ارائه کرده است. ارزیابی بازه‌ها با معیار ضریب اطمینان خیلی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین نامعلوم θ باشد. احتمال پوشش بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ برای θ به کمک از احتمال این که بازه تصادفی $(L(X), U(X))$ مقدار واقعی پارامتر θ را در بر داشته باشد. بنا بر این احتمال پوشش تابعی نسبت به θ است. ممکن است در توزیع‌های پیوسته، تابع احتمال پوشش، برای همه نقاط فضای پارامتری یکسان باشد، اما در توزیع‌های گسسته، تابع احتمال پوشش با تغییر مقدار پارامتر مجهول در فضای پارامتری، تغییر می‌کند. به همین دلیل محاسبه دقیق بیشینه، کمینه و میانگین احتمالات پوشش برای بازه‌های اطمینان پارامتر این توزیع، کار دشواری است. تا کنون چندین بازه اطمینان مجانبی برای θ معرفی شده است. به عنوان مثال، خام‌کنگ [۶] بازه اطمینان مجانبی AWC ، گوآن [۳] بازه

^۱ عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه ولایت، ایرانشهر

$$U(0), U(1), U(2), \dots$$

این نقاط را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم و آن‌ها را v_1 و v_2 و ... نامگذاری می‌کنیم. برای $i = 1, 2, \dots$ تعریف می‌کنیم:

$$w_i = \begin{cases} v_i, & l \leq v_i \leq u \\ l, & v_i < l \\ u, & v_i > u \end{cases} \quad (1)$$

برای یک $\theta \in (v_i, v_{i+1})$ توابع k و k_1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$k: (\theta) \text{ کوچک‌ترین مقدار } x \text{ که برای آن, } U(x) > \theta$$

$$k_1: (\theta) \text{ بزرگ‌ترین مقدار } x \text{ که برای آن, } L(x) < \theta$$

لم ۲.۲. اگر بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ گزاره ۱.۲ را داشته باشد، خواهیم داشت:

$$P_\theta(\theta \in (L(X), U(X))) = \sum_{i=k_1(\theta)}^{k_1(\theta)} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!}. \quad (1)$$

اثبات. اگر قرار دهیم $X = k_1(\theta)$ و $Y = k_1(\theta)$ ، با توجه به تعریف k و k_1 فقط چهار حالت زیر ممکن است:

حالت اول: $L(Y) < U(Y) < \theta < L(X) < U(X)$ که در این صورت θ پوشش داده نمی‌شود.

حالت دوم: $L(X) < L(Y) < \theta < U(X) < U(Y)$ که در این صورت طبق گزاره ۱.۲ داریم $X \leq Y$. حالت سوم: $L(X) < L(Y) < U(Y) < \theta < U(X)$

حالت چهارم: $L(Y) < \theta < L(X) < U(X) < U(Y)$

حالت‌های سوم و چهارم طبق گزاره ۱.۲ امکان پذیر نیستند. بنا بر این یگانه حالت ممکن، حالت دوم است و این یعنی $k_1(\theta) \leq k_1(\theta)$. از طرفی طبق تعریف k و k_1 گزاره ۱.۲ داریم:

$$L(X) < \theta \Leftrightarrow X \leq k_1(\theta)$$

$$U(X) > \theta \Leftrightarrow X \geq k_1(\theta)$$

محافظة کارانه است، زیرا اگر احتمال پوشش حتی در یک نقطه از فضای پارامتری کوچک باشد، ضریب اطمینان نیز کوچک خواهد بود. از طرفی میانگین احتمالات پوشش نیز به شدت تحت تأثیر کمینه و بیشینه احتمالات پوشش قرار دارد. بنا بر این با در نظر گرفتن همزمان کمینه، میانگین و بیشینه احتمالات پوشش، می‌توان مقایسه دقیق‌تری بین بازه‌ها انجام داد. در این مقاله روش محاسبه بیشینه احتمالات پوشش بازه‌های اطمینان با کران‌های صعودی برای میانگین توزیع پواسون ارائه می‌شود. با این روش می‌توانیم بیشینه احتمالات پوشش و نقطه‌ای از فضای پارامتری را که بیشینه احتمالات پوشش به‌زای آن رخ می‌دهد به صورت دقیق به دست آوریم.

در بخش ۲ به شرایط مورد نیاز بازه اطمینان و روش محاسبه بیشینه احتمالات پوشش دقیق می‌پردازیم. سپس در بخش ۳ چند بازه اطمینان برای میانگین توزیع پواسون معرفی کرده، آن‌ها را از نظر بیشینه احتمالات پوشش دقیق مقایسه می‌کنیم. در ادامه، بخش ۴ به شبیه‌سازی اختصاص دارد. در نهایت در بخش ۵ بحث و نتیجه‌گیری آورده شده است.

۲ روش محاسبه دقیق بیشینه احتمالات پوشش

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر نامعلوم θ باشد. احتمال پوشش بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ برای θ به کمک از $P_\theta(\theta \in (L(X), U(X)))$ یعنی احتمال این که بازه تصادفی $(L(X), U(X))$ مقدار واقعی θ را پوشش دهد.

در این مقاله بازه‌های اطمینانی را بررسی می‌کنیم که شرط زیر را داشته باشند:

گزاره ۱.۲. برای بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ از $X_1 < X_2$ بتوان نتیجه گرفت که $L(X_1) \leq L(X_2)$ و $U(X_1) \leq U(X_2)$.

قبل از ارائه نتیجه اصلی، نمادگذاری‌ها را معرفی می‌کنیم:

فرض کنید l و u به ترتیب کران پایین و بالای فضای پارامتری باشند. برای یک بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ ، نقاط نخستین و انتهای متناظر با $x = 0, 1, 2, \dots$ عبارت‌اند از:

$$L(0), L(1), L(2), \dots$$

بنا بر این:

$$\begin{aligned} P_{\theta}(\theta \in (L(X), U(X))) &= P_{\theta}(L(X) < \theta, U(X) > \theta) \\ &= P_{\theta}(X \leq k_1(\theta), X \geq k_2(\theta)) \\ &= P_{\theta}(k_2(\theta) \leq X \leq k_1(\theta)) \\ &= \sum_{i=k_2(\theta)}^{k_1(\theta)} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!} \end{aligned}$$

و اثبات کامل است. □

تعریف ۳.۲. خانواده توابع چگالی یک پارامتری $\{f_{\theta} : \theta \in \Theta\}$ دارای خاصیت نسبت درست‌نمایی یکنوا^۲ در آماره^۲ T با تابع چگالی $g_{\theta}(t)$ است اگر $\frac{g_{\theta_2}(t)}{g_{\theta_1}(t)}$ به ازای هر $\theta_2 > \theta_1$ تابعی غیر نزولی نسبت به t باشد.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $f_{\theta}(x)$ یک خانواده از توابع چگالی روی \mathbb{R} با خاصیت نسبت درست‌نمایی یکنوا (MLR) در x باشد. در این صورت برای هر $\theta_1 < \theta_2$ تابع توزیع تجمعی X در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$F_{\theta_2}(x) \leq F_{\theta_1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

اثبات. قضیه ۸.۳.۱۷ در کسلا و برگر [۲] را ببینید. □

لم ۵.۲. ۱- برای یک m_1 ثابت که $m_1 > 0$ ، $\sum_{i=0}^{m_1} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!}$ یک تابع نزولی نسبت به θ است.

۲- برای یک m ثابت که $m > 0$ ، $\sum_{i=m}^{+\infty} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!}$ تابع صعودی نسبت به θ است.

۳- برای m و m_1 ثابت که $0 < m < m_1$ ، بیشینه این تابع در نقطه $\theta = h(m, m_1)$ رخ می‌دهد، زمانی که:

$$h(m, m_1) = m_1 - m + \sqrt{\frac{m!}{(m-1)!}}$$

اثبات. خانواده توابع چگالی پواسون دارای خاصیت MLR در x است. بنا بر این طبق قضیه ۴.۲ داریم:

$$F_{\theta_2}(x) \leq F_{\theta_1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \theta_1 < \theta_2$$

و این، اثبات قسمت‌های اول و دوم لم را به دنبال دارد. حال به اثبات قسمت سوم لم می‌پردازیم. فرض کنید m و m_1 دو عدد حسابی باشند و $m \leq m_1$. تعریف می‌کنیم:

$$y(\theta) = \sum_{i=m}^{m_1} \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!}.$$

از تابع $y(\theta)$ نسبت به θ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial y(\theta)}{\partial \theta} = e^{-\theta} \theta^{m-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \frac{\theta^{m_1-m+1}}{m_1!} \right).$$

برای یافتن نقاط اکسترمم تابع $y(\theta)$ مقدار مشتق به دست آمده را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial y(\theta)}{\partial \theta} = e^{-\theta} \theta^{m-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \frac{\theta^{m_1-m+1}}{m_1!} \right) = 0.$$

$$m_1! - (m-1)! \theta^{m_1-m+1} = 0.$$

$$\theta = m_1 - m + \sqrt{\frac{m_1!}{(m-1)!}} \quad (2)$$

واضح است که مشتق $y(\theta)$ برای مقادیر θ کمتر از $m_1 - m + \sqrt{\frac{m_1!}{(m-1)!}}$ مثبت و برای مقادیر θ بیشتر از $m_1 - m + \sqrt{\frac{m_1!}{(m-1)!}}$ منفی است. بنا بر این تابع $y(\theta)$ تابعی تک‌مدی است که بیشینه آن در نقطه $m_1 - m + \sqrt{\frac{m_1!}{(m-1)!}}$ اتفاق می‌افتد و اثبات کامل است. □

فضای پارامتری برای میانگین توزیع پواسون بازه $(0, +\infty)$ است، اما در عمل برای قابل انجام شدن محاسبات باید فضای پارامتری را کراندار در نظر بگیریم که با توجه به اثبات لم ۴.۲ مشکلی در محاسبه بیشینه احتمالات پوشش در این حالت‌ها نخواهیم داشت.

قضیه ۶.۲. برای یک بازه اطمینان $(L(X), U(X))$ که گزاره ۱.۲ را داشته باشد، بیشینه احتمالات پوشش برابر است با بیشینه احتمالات پوشش به ازای نقاط مجموعه زیر:

$$S_1 = \{w_1, w_2, \dots, a_1, a_2, \dots\}. \quad (3)$$

به طوری که

$$a_i = h\left(k_2\left(\frac{w_i + w_{i+1}}{2}\right), k_1\left(\frac{w_i + w_{i+1}}{2}\right)\right)$$

و تابع h در لم ۵.۲ تعریف شده است.

^۲ monotone likelihood ratio

اثبات. میتوان نوشت:

۳ مثالها

در مثالهای ۱.۳ و ۲.۳ با استفاده از الگوریتم به دست آمده در بخش ۲ بیشینه احتمالات پوشش دو بازه اطمینان مجانبی معرفی شده برای پارامتر میانگین توزیع پواسون توسط گوان [۳] را به صورت دقیق محاسبه و سپس آنها را با معیار بیشینه احتمالات پوشش مقایسه می کنیم.

مثال ۱.۳. فرض کنید $z_{\frac{\alpha}{4}}$ چندک $\frac{\alpha}{4}$ بالایی توزیع نرمال استاندارد باشد. بازه اطمینان SC یا امتیاز با ضریب $1 - \alpha$ برای θ به صورت زیر معرفی شده است:

$$x + \frac{z_{\frac{\alpha}{4}}}{4} \mp z_{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{x + \frac{z_{\frac{\alpha}{4}}}{4}}$$

در این جا بیشینه احتمالات پوشش را روی فضای پارامتری محدود شده به بازه $(0, 5)$ به دست می آوریم. جدول ۱ بازه های SC ، ۹۵ درصدی به ازای $x = 0, 1, \dots, 10$ را نشان می دهد. با توجه به جدول ۱ برای $x \geq 10$ بازه های اطمینان کاملاً خارج از بازه $(0, 5)$ قرار می گیرند. بنا بر این کافی است فقط بازه های اطمینان متناظر با $x = 0, 1, \dots, 9$ را در نظر بگیریم. با توجه به بازه ها واضح است که گزاره ۱.۲ برقرار است. بنا بر این می توانیم بیشینه احتمالات پوشش را به صورت دقیق محاسبه کنیم. برای این منظور در ابتدا کران های بازه های اطمینان به ازای $x = 0, 1, \dots, 9$ را به ترتیب صعودی مرتب می کنیم، یعنی ۰ و 0.176 و 0.548 و 1.020 و 1.555 و 2.136 و 2.750 و 3.391 و 3.842 و 4.054 و 4.735 و 5.665 و 6.665 و 7.788 و 8.927 و 9.916 و 10.895 و 11.838 و 12.799 و 13.777 و 14.770 و 15.770 و 16.770 و 17.770 و 18.770 و 19.770 و 20.770 و 21.770 و 22.770 و 23.770 و 24.770 و 25.770 و 26.770 و 27.770 و 28.770 و 29.770 و 30.770 و 31.770 و 32.770 و 33.770 و 34.770 و 35.770 و 36.770 و 37.770 و 38.770 و 39.770 و 40.770 و 41.770 و 42.770 و 43.770 و 44.770 و 45.770 و 46.770 و 47.770 و 48.770 و 49.770 و 50.770 و 51.770 و 52.770 و 53.770 و 54.770 و 55.770 و 56.770 و 57.770 و 58.770 و 59.770 و 60.770 و 61.770 و 62.770 و 63.770 و 64.770 و 65.770 و 66.770 و 67.770 و 68.770 و 69.770 و 70.770 و 71.770 و 72.770 و 73.770 و 74.770 و 75.770 و 76.770 و 77.770 و 78.770 و 79.770 و 80.770 و 81.770 و 82.770 و 83.770 و 84.770 و 85.770 و 86.770 و 87.770 و 88.770 و 89.770 و 90.770 و 91.770 و 92.770 و 93.770 و 94.770 و 95.770 و 96.770 و 97.770 و 98.770 و 99.770 و 100.770 و 101.770 و 102.770 و 103.770 و 104.770 و 105.770 و 106.770 و 107.770 و 108.770 و 109.770 و 110.770 و 111.770 و 112.770 و 113.770 و 114.770 و 115.770 و 116.770 و 117.770 و 118.770 و 119.770 و 120.770 و 121.770 و 122.770 و 123.770 و 124.770 و 125.770 و 126.770 و 127.770 و 128.770 و 129.770 و 130.770 و 131.770 و 132.770 و 133.770 و 134.770 و 135.770 و 136.770 و 137.770 و 138.770 و 139.770 و 140.770 و 141.770 و 142.770 و 143.770 و 144.770 و 145.770 و 146.770 و 147.770 و 148.770 و 149.770 و 150.770 و 151.770 و 152.770 و 153.770 و 154.770 و 155.770 و 156.770 و 157.770 و 158.770 و 159.770 و 160.770 و 161.770 و 162.770 و 163.770 و 164.770 و 165.770 و 166.770 و 167.770 و 168.770 و 169.770 و 170.770 و 171.770 و 172.770 و 173.770 و 174.770 و 175.770 و 176.770 و 177.770 و 178.770 و 179.770 و 180.770 و 181.770 و 182.770 و 183.770 و 184.770 و 185.770 و 186.770 و 187.770 و 188.770 و 189.770 و 190.770 و 191.770 و 192.770 و 193.770 و 194.770 و 195.770 و 196.770 و 197.770 و 198.770 و 199.770 و 200.770 و 201.770 و 202.770 و 203.770 و 204.770 و 205.770 و 206.770 و 207.770 و 208.770 و 209.770 و 210.770 و 211.770 و 212.770 و 213.770 و 214.770 و 215.770 و 216.770 و 217.770 و 218.770 و 219.770 و 220.770 و 221.770 و 222.770 و 223.770 و 224.770 و 225.770 و 226.770 و 227.770 و 228.770 و 229.770 و 230.770 و 231.770 و 232.770 و 233.770 و 234.770 و 235.770 و 236.770 و 237.770 و 238.770 و 239.770 و 240.770 و 241.770 و 242.770 و 243.770 و 244.770 و 245.770 و 246.770 و 247.770 و 248.770 و 249.770 و 250.770 و 251.770 و 252.770 و 253.770 و 254.770 و 255.770 و 256.770 و 257.770 و 258.770 و 259.770 و 260.770 و 261.770 و 262.770 و 263.770 و 264.770 و 265.770 و 266.770 و 267.770 و 268.770 و 269.770 و 270.770 و 271.770 و 272.770 و 273.770 و 274.770 و 275.770 و 276.770 و 277.770 و 278.770 و 279.770 و 280.770 و 281.770 و 282.770 و 283.770 و 284.770 و 285.770 و 286.770 و 287.770 و 288.770 و 289.770 و 290.770 و 291.770 و 292.770 و 293.770 و 294.770 و 295.770 و 296.770 و 297.770 و 298.770 و 299.770 و 300.770 و 301.770 و 302.770 و 303.770 و 304.770 و 305.770 و 306.770 و 307.770 و 308.770 و 309.770 و 310.770 و 311.770 و 312.770 و 313.770 و 314.770 و 315.770 و 316.770 و 317.770 و 318.770 و 319.770 و 320.770 و 321.770 و 322.770 و 323.770 و 324.770 و 325.770 و 326.770 و 327.770 و 328.770 و 329.770 و 330.770 و 331.770 و 332.770 و 333.770 و 334.770 و 335.770 و 336.770 و 337.770 و 338.770 و 339.770 و 340.770 و 341.770 و 342.770 و 343.770 و 344.770 و 345.770 و 346.770 و 347.770 و 348.770 و 349.770 و 350.770 و 351.770 و 352.770 و 353.770 و 354.770 و 355.770 و 356.770 و 357.770 و 358.770 و 359.770 و 360.770 و 361.770 و 362.770 و 363.770 و 364.770 و 365.770 و 366.770 و 367.770 و 368.770 و 369.770 و 370.770 و 371.770 و 372.770 و 373.770 و 374.770 و 375.770 و 376.770 و 377.770 و 378.770 و 379.770 و 380.770 و 381.770 و 382.770 و 383.770 و 384.770 و 385.770 و 386.770 و 387.770 و 388.770 و 389.770 و 390.770 و 391.770 و 392.770 و 393.770 و 394.770 و 395.770 و 396.770 و 397.770 و 398.770 و 399.770 و 400.770 و 401.770 و 402.770 و 403.770 و 404.770 و 405.770 و 406.770 و 407.770 و 408.770 و 409.770 و 410.770 و 411.770 و 412.770 و 413.770 و 414.770 و 415.770 و 416.770 و 417.770 و 418.770 و 419.770 و 420.770 و 421.770 و 422.770 و 423.770 و 424.770 و 425.770 و 426.770 و 427.770 و 428.770 و 429.770 و 430.770 و 431.770 و 432.770 و 433.770 و 434.770 و 435.770 و 436.770 و 437.770 و 438.770 و 439.770 و 440.770 و 441.770 و 442.770 و 443.770 و 444.770 و 445.770 و 446.770 و 447.770 و 448.770 و 449.770 و 450.770 و 451.770 و 452.770 و 453.770 و 454.770 و 455.770 و 456.770 و 457.770 و 458.770 و 459.770 و 460.770 و 461.770 و 462.770 و 463.770 و 464.770 و 465.770 و 466.770 و 467.770 و 468.770 و 469.770 و 470.770 و 471.770 و 472.770 و 473.770 و 474.770 و 475.770 و 476.770 و 477.770 و 478.770 و 479.770 و 480.770 و 481.770 و 482.770 و 483.770 و 484.770 و 485.770 و 486.770 و 487.770 و 488.770 و 489.770 و 490.770 و 491.770 و 492.770 و 493.770 و 494.770 و 495.770 و 496.770 و 497.770 و 498.770 و 499.770 و 500.770 و 501.770 و 502.770 و 503.770 و 504.770 و 505.770 و 506.770 و 507.770 و 508.770 و 509.770 و 510.770 و 511.770 و 512.770 و 513.770 و 514.770 و 515.770 و 516.770 و 517.770 و 518.770 و 519.770 و 520.770 و 521.770 و 522.770 و 523.770 و 524.770 و 525.770 و 526.770 و 527.770 و 528.770 و 529.770 و 530.770 و 531.770 و 532.770 و 533.770 و 534.770 و 535.770 و 536.770 و 537.770 و 538.770 و 539.770 و 540.770 و 541.770 و 542.770 و 543.770 و 544.770 و 545.770 و 546.770 و 547.770 و 548.770 و 549.770 و 550.770 و 551.770 و 552.770 و 553.770 و 554.770 و 555.770 و 556.770 و 557.770 و 558.770 و 559.770 و 560.770 و 561.770 و 562.770 و 563.770 و 564.770 و 565.770 و 566.770 و 567.770 و 568.770 و 569.770 و 570.770 و 571.770 و 572.770 و 573.770 و 574.770 و 575.770 و 576.770 و 577.770 و 578.770 و 579.770 و 580.770 و 581.770 و 582.770 و 583.770 و 584.770 و 585.770 و 586.770 و 587.770 و 588.770 و 589.770 و 590.770 و 591.770 و 592.770 و 593.770 و 594.770 و 595.770 و 596.770 و 597.770 و 598.770 و 599.770 و 600.770 و 601.770 و 602.770 و 603.770 و 604.770 و 605.770 و 606.770 و 607.770 و 608.770 و 609.770 و 610.770 و 611.770 و 612.770 و 613.770 و 614.770 و 615.770 و 616.770 و 617.770 و 618.770 و 619.770 و 620.770 و 621.770 و 622.770 و 623.770 و 624.770 و 625.770 و 626.770 و 627.770 و 628.770 و 629.770 و 630.770 و 631.770 و 632.770 و 633.770 و 634.770 و 635.770 و 636.770 و 637.770 و 638.770 و 639.770 و 640.770 و 641.770 و 642.770 و 643.770 و 644.770 و 645.770 و 646.770 و 647.770 و 648.770 و 649.770 و 650.770 و 651.770 و 652.770 و 653.770 و 654.770 و 655.770 و 656.770 و 657.770 و 658.770 و 659.770 و 660.770 و 661.770 و 662.770 و 663.770 و 664.770 و 665.770 و 666.770 و 667.770 و 668.770 و 669.770 و 670.770 و 671.770 و 672.770 و 673.770 و 674.770 و 675.770 و 676.770 و 677.770 و 678.770 و 679.770 و 680.770 و 681.770 و 682.770 و 683.770 و 684.770 و 685.770 و 686.770 و 687.770 و 688.770 و 689.770 و 690.770 و 691.770 و 692.770 و 693.770 و 694.770 و 695.770 و 696.770 و 697.770 و 698.770 و 699.770 و 700.770 و 701.770 و 702.770 و 703.770 و 704.770 و 705.770 و 706.770 و 707.770 و 708.770 و 709.770 و 710.770 و 711.770 و 712.770 و 713.770 و 714.770 و 715.770 و 716.770 و 717.770 و 718.770 و 719.770 و 720.770 و 721.770 و 722.770 و 723.770 و 724.770 و 725.770 و 726.770 و 727.770 و 728.770 و 729.770 و 730.770 و 731.770 و 732.770 و 733.770 و 734.770 و 735.770 و 736.770 و 737.770 و 738.770 و 739.770 و 740.770 و 741.770 و 742.770 و 743.770 و 744.770 و 745.770 و 746.770 و 747.770 و 748.770 و 749.770 و 750.770 و 751.770 و 752.770 و 753.770 و 754.770 و 755.770 و 756.770 و 757.770 و 758.770 و 759.770 و 760.770 و 761.770 و 762.770 و 763.770 و 764.770 و 765.770 و 766.770 و 767.770 و 768.770 و 769.770 و 770.770 و 771.770 و 772.770 و 773.770 و 774.770 و 775.770 و 776.770 و 777.770 و 778.770 و 779.770 و 780.770 و 781.770 و 782.770 و 783.770 و 784.770 و 785.770 و 786.770 و 787.770 و 788.770 و 789.770 و 790.770 و 791.770 و 792.770 و 793.770 و 794.770 و 795.770 و 796.770 و 797.770 و 798.770 و 799.770 و 800.770 و 801.770 و 802.770 و 803.770 و 804.770 و 805.770 و 806.770 و 807.770 و 808.770 و 809.770 و 810.770 و 811.770 و 812.770 و 813.770 و 814.770 و 815.770 و 816.770 و 817.770 و 818.770 و 819.770 و 820.770 و 821.770 و 822.770 و 823.770 و 824.770 و 825.770 و 826.770 و 827.770 و 828.770 و 829.770

در ابتدا بررسی می‌کنیم که $4/054$ به‌ازای چه x هایی در بازه اطمینان قرار می‌گیرد. سپس احتمالات مشاهده آن‌ها را با فرض $\theta = 4/054$ با هم جمع می‌کنیم. با توجه به بازه‌های بالا، $4/054$ در بازه‌های متناظر با $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ قرار می‌گیرد. بنا بر این داریم:

$$P_{4/054}(4/054 \in (L(X), U(X))) = \sum_{x=1}^7 \frac{e^{-x} x^{4/054}}{x!} = 0/9282$$

مثال ۲.۳. بازه اطمینان MSC یا امتیاز متحرک^۳ با ضریب $1 - \alpha$ برای θ به‌صورت زیر معرفی شده است:

$$x + 0/46 z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{4}}$$

در این‌جا نیز بیشینه احتمالات پوشش را روی فضای پارامتری محدود شده به بازه $(0, 5)$ به دست می‌آوریم. جدول ۲ بازه‌های MSC نود و پنج درصدی را به‌ازای $x = 0, 1, \dots, 10$ نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۲ برای $x \geq 10$ بازه‌های اطمینان کاملاً خارج از بازه $(0, 5)$ قرار می‌گیرند. بنا بر این کافی است فقط بازه‌های اطمینان متناظر با $x = 0, 1, \dots, 9$ را در نظر بگیریم. با توجه به بازه‌ها واضح است که گزاره ۱.۲ برقرار است. بنا بر این می‌توانیم بیشینه احتمالات پوشش را به‌صورت دقیق محاسبه کنیم.

برای این منظور، در ابتدا کران‌های فواصل را به‌ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم؛ یعنی $-0/154$ و $0/023$ و $0/395$ و $0/866$ و $1/402$ و $1/982$ و $2/596$ و $3/237$ و $3/688$ و $3/900$ و $4/581$ و $5/278$ و $5/953$ و $6/640$ و $7/322$ و $8/004$ و $8/686$ و $9/368$ و $10/050$ و $10/732$ و $11/414$ و $12/096$ و $12/778$ و $13/460$ و $14/142$ و $14/824$ و $15/506$ و $16/188$ و $16/870$ و $17/552$ و $18/234$ و $18/916$ و $19/600$ و $20/282$ و $20/966$ و $21/650$ و $22/334$ و $23/018$ و $23/702$ و $24/386$ و $25/070$ و $25/754$ و $26/438$ و $27/122$ و $27/806$ و $28/490$ و $29/174$ و $29/858$ و $30/542$ و $31/226$ و $31/910$ و $32/594$ و $33/278$ و $33/962$ و $34/646$ و $35/330$ و $36/014$ و $36/698$ و $37/382$ و $38/066$ و $38/750$ و $39/434$ و $40/118$ و $40/802$ و $41/486$ و $42/170$ و $42/854$ و $43/538$ و $44/222$ و $44/906$ و $45/590$ و $46/274$ و $46/958$ و $47/642$ و $48/326$ و $49/010$ و $49/694$ و $50/378$ و $51/062$ و $51/746$ و $52/430$ و $53/114$ و $53/798$ و $54/482$ و $55/166$ و $55/850$ و $56/534$ و $57/218$ و $57/902$ و $58/586$ و $59/270$ و $59/954$ و $60/638$ و $61/322$ و $62/006$ و $62/690$ و $63/374$ و $64/058$ و $64/742$ و $65/426$ و $66/110$ و $66/794$ و $67/478$ و $68/162$ و $68/846$ و $69/530$ و $70/214$ و $70/898$ و $71/582$ و $72/266$ و $72/950$ و $73/634$ و $74/318$ و $75/002$ و $75/686$ و $76/370$ و $77/054$ و $77/738$ و $78/422$ و $79/106$ و $79/790$ و $80/474$ و $81/158$ و $81/842$ و $82/526$ و $83/210$ و $83/894$ و $84/578$ و $85/262$ و $85/946$ و $86/630$ و $87/314$ و $88/002$ و $88/686$ و $89/370$ و $90/054$ و $90/738$ و $91/422$ و $92/106$ و $92/790$ و $93/474$ و $94/158$ و $94/842$ و $95/526$ و $96/210$ و $96/894$ و $97/578$ و $98/262$ و $98/946$ و $99/630$ و $100/314$ و $101/002$ و $101/686$ و $102/370$ و $103/054$ و $103/738$ و $104/422$ و $105/106$ و $105/790$ و $106/474$ و $107/158$ و $107/842$ و $108/526$ و $109/210$ و $109/894$ و $110/578$ و $111/262$ و $111/946$ و $112/630$ و $113/314$ و $114/002$ و $114/686$ و $115/370$ و $116/054$ و $116/738$ و $117/422$ و $118/106$ و $118/790$ و $119/474$ و $120/158$ و $120/842$ و $121/526$ و $122/210$ و $122/894$ و $123/578$ و $124/262$ و $124/946$ و $125/630$ و $126/314$ و $127/002$ و $127/686$ و $128/370$ و $129/054$ و $129/738$ و $130/422$ و $131/106$ و $131/790$ و $132/474$ و $133/158$ و $133/842$ و $134/526$ و $135/210$ و $135/894$ و $136/578$ و $137/262$ و $137/946$ و $138/630$ و $139/314$ و $140/002$ و $140/686$ و $141/370$ و $142/054$ و $142/738$ و $143/422$ و $144/106$ و $144/790$ و $145/474$ و $146/158$ و $146/842$ و $147/526$ و $148/210$ و $148/894$ و $149/578$ و $150/262$ و $150/946$ و $151/630$ و $152/314$ و $153/002$ و $153/686$ و $154/370$ و $155/054$ و $155/738$ و $156/422$ و $157/106$ و $157/790$ و $158/474$ و $159/158$ و $159/842$ و $160/526$ و $161/210$ و $161/894$ و $162/578$ و $163/262$ و $163/946$ و $164/630$ و $165/314$ و $166/002$ و $166/686$ و $167/370$ و $168/054$ و $168/738$ و $169/422$ و $170/106$ و $170/790$ و $171/474$ و $172/158$ و $172/842$ و $173/526$ و $174/210$ و $174/894$ و $175/578$ و $176/262$ و $176/946$ و $177/630$ و $178/314$ و $179/002$ و $179/686$ و $180/370$ و $181/054$ و $181/738$ و $182/422$ و $183/106$ و $183/790$ و $184/474$ و $185/158$ و $185/842$ و $186/526$ و $187/210$ و $187/894$ و $188/578$ و $189/262$ و $189/946$ و $190/630$ و $191/314$ و $192/002$ و $192/686$ و $193/370$ و $194/054$ و $194/738$ و $195/422$ و $196/106$ و $196/790$ و $197/474$ و $198/158$ و $198/842$ و $199/526$ و $200/210$ و $200/894$ و $201/578$ و $202/262$ و $202/946$ و $203/630$ و $204/314$ و $205/002$ و $205/686$ و $206/370$ و $207/054$ و $207/738$ و $208/422$ و $209/106$ و $209/790$ و $210/474$ و $211/158$ و $211/842$ و $212/526$ و $213/210$ و $213/894$ و $214/578$ و $215/262$ و $215/946$ و $216/630$ و $217/314$ و $218/002$ و $218/686$ و $219/370$ و $220/054$ و $220/738$ و $221/422$ و $222/106$ و $222/790$ و $223/474$ و $224/158$ و $224/842$ و $225/526$ و $226/210$ و $226/894$ و $227/578$ و $228/262$ و $228/946$ و $229/630$ و $230/314$ و $231/002$ و $231/686$ و $232/370$ و $233/054$ و $233/738$ و $234/422$ و $235/106$ و $235/790$ و $236/474$ و $237/158$ و $237/842$ و $238/526$ و $239/210$ و $239/894$ و $240/578$ و $241/262$ و $241/946$ و $242/630$ و $243/314$ و $244/002$ و $244/686$ و $245/370$ و $246/054$ و $246/738$ و $247/422$ و $248/106$ و $248/790$ و $249/474$ و $250/158$ و $250/842$ و $251/526$ و $252/210$ و $252/894$ و $253/578$ و $254/262$ و $254/946$ و $255/630$ و $256/314$ و $257/002$ و $257/686$ و $258/370$ و $259/054$ و $259/738$ و $260/422$ و $261/106$ و $261/790$ و $262/474$ و $263/158$ و $263/842$ و $264/526$ و $265/210$ و $265/894$ و $266/578$ و $267/262$ و $267/946$ و $268/630$ و $269/314$ و $270/002$ و $270/686$ و $271/370$ و $272/054$ و $272/738$ و $273/422$ و $274/106$ و $274/790$ و $275/474$ و $276/158$ و $276/842$ و $277/526$ و $278/210$ و $278/894$ و $279/578$ و $280/262$ و $280/946$ و $281/630$ و $282/314$ و $283/002$ و $283/686$ و $284/370$ و $285/054$ و $285/738$ و $286/422$ و $287/106$ و $287/790$ و $288/474$ و $289/158$ و $289/842$ و $290/526$ و $291/210$ و $291/894$ و $292/578$ و $293/262$ و $293/946$ و $294/630$ و $295/314$ و $296/002$ و $296/686$ و $297/370$ و $298/054$ و $298/738$ و $299/422$ و $300/106$ و $300/790$ و $301/474$ و $302/158$ و $302/842$ و $303/526$ و $304/210$ و $304/894$ و $305/578$ و $306/262$ و $306/946$ و $307/630$ و $308/314$ و $309/002$ و $309/686$ و $310/370$ و $311/054$ و $311/738$ و $312/422$ و $313/106$ و $313/790$ و $314/474$ و $315/158$ و $315/842$ و $316/526$ و $317/210$ و $317/894$ و $318/578$ و $319/262$ و $319/946$ و $320/630$ و $321/314$ و $322/002$ و $322/686$ و $323/370$ و $324/054$ و $324/738$ و $325/422$ و $326/106$ و $326/790$ و $327/474$ و $328/158$ و $328/842$ و $329/526$ و $330/210$ و $330/894$ و $331/578$ و $332/262$ و $332/946$ و $333/630$ و $334/314$ و $335/002$ و $335/686$ و $336/370$ و $337/054$ و $337/738$ و $338/422$ و $339/106$ و $339/790$ و $340/474$ و $341/158$ و $341/842$ و $342/526$ و $343/210$ و $343/894$ و $344/578$ و $345/262$ و $345/946$ و $346/630$ و $347/314$ و $348/002$ و $348/686$ و $349/370$ و $350/054$ و $350/738$ و $351/422$ و $352/106$ و $352/790$ و $353/474$ و $354/158$ و $354/842$ و $355/526$ و $356/210$ و $356/894$ و $357/578$ و $358/262$ و $358/946$ و $359/630$ و $360/314$ و $361/002$ و $361/686$ و $362/370$ و $363/054$ و $363/738$ و $364/422$ و $365/106$ و $365/790$ و $366/474$ و $367/158$ و $367/842$ و $368/526$ و $369/210$ و $369/894$ و $370/578$ و $371/262$ و $371/946$ و $372/630$ و $373/314$ و $374/002$ و $374/686$ و $375/370$ و $376/054$ و $376/738$ و $377/422$ و $378/106$ و $378/790$ و $379/474$ و $380/158$ و $380/842$ و $381/526$ و $382/210$ و $382/894$ و $383/578$ و $384/262$ و $384/946$ و $385/630$ و $386/314$ و $387/002$ و $387/686$ و $388/370$ و $389/054$ و $389/738$ و $390/422$ و $391/106$ و $391/790$ و $392/474$ و $393/158$ و $393/842$ و $394/526$ و $395/210$ و $395/894$ و $396/578$ و $397/262$ و $397/946$ و $398/630$ و $399/314$ و $400/002$ و $400/686$ و $401/370$ و $402/054$ و $402/738$ و $403/422$ و $404/106$ و $404/790$ و $405/474$ و $406/158$ و $406/842$ و $407/526$ و $408/210$ و $408/894$ و $409/578$ و $410/262$ و $410/946$ و $411/630$ و $412/314$ و $413/002$ و $413/686$ و $414/370$ و $415/054$ و $415/738$ و $416/422$ و $417/106$ و $417/790$ و $418/474$ و $419/158$ و $419/842$ و $420/526$ و $421/210$ و $421/894$ و $422/578$ و $423/262$ و $423/946$ و $424/630$ و $425/314$ و $426/002$ و $426/686$ و $427/370$ و $428/054$ و $428/738$ و $429/422$ و $430/106$ و $430/790$ و $431/474$ و $432/158$ و $432/842$ و $433/526$ و $434/210$ و $434/894$ و $435/578$ و $436/262$ و $436/946$ و $437/630$ و $438/314$ و $439/002$ و $439/686$ و $440/370$ و $441/054$ و $441/738$ و $442/422$ و $443/106$ و $443/790$ و $444/474$ و $445/158$ و $445/842$ و $446/526$ و $447/210$ و $447/894$ و $448/578$ و $449/262$ و $449/946$ و $450/630$ و $451/314$ و $452/002$ و $452/686$ و $453/370$ و $454/054$ و $454/738$ و $455/422$ و $456/106$ و $456/790$ و $457/474$ و $458/158$ و $458/842$ و $459/526$ و $460/210$ و $460/894$ و $461/578$ و $462/262$ و $462/946$ و $463/630$ و $464/314$ و $465/002$ و $465/686$ و $466/370$ و $467/054$ و $467/738$ و $468/422$ و $469/106$ و $469/790$ و $470/474$ و $471/158$ و $471/842$ و $472/526$ و $473/210$ و $473/894$ و $474/578$ و $475/262$ و $475/946$ و $476/630$ و $477/314$ و $478/002$ و $478/686$ و $479/370$ و $480/054$ و $480/738$ و $481/422$ و $482/106$ و $482/790$ و $483/474$ و $484/158$ و $484/842$ و $485/526$ و $486/210$ و $486/894$ و $487/578$ و $488/262$ و $488/946$ و $489/630$ و $490/314$ و $491/002$ و $491/686$ و $492/370$ و $493/054$ و $493/738$ و $494/422$ و $495/106$ و $495/790$ و $496/474$ و $497/158$ و $497/842$ و $498/526$ و $499/210$ و $499/894$ و $500/578$ و $501/262$ و $501/946$ و $502/630$ و $503/314$ و $504/002$ و $504/686$ و $505/370$ و $506/054$ و $506/738$ و $507/422$ و $508/106$ و $508/790$ و $509/474$ و $510/158$ و $510/842$ و $511/526$ و $512/210$ و $512/894$ و $513/578$ و $514/262$ و $514/946$ و $515/630$ و $516/314$ و $517/002$ و $517/686$ و $518/370$ و $519/054$ و $519/738$ و $520/422$ و $521/106$ و $521/790$ و $522/474$ و $523/158$ و $523/842$ و $524/526$ و $525/210$ و $525/894$ و $526/578$ و $527/262$ و $527/946$ و $528/630$ و $529/314$ و $530/002$ و $530/686$ و $531/370$ و $532/054$ و $532/738$ و $533/422$ و $534/106$ و $534/790$ و $535/474$ و $536/158$ و $536/842$ و $537/526$ و $538/210$ و $538/894$ و $539/578$ و $540/262$ و $540/946$ و $541/630$ و $542/314$ و $543/002$ و $543/686$ و $544/370$ و $545/054$ و $545/738$ و $546/422$ و $547/106$ و $547/790$ و $548/474$ و $549/158$ و $549/842$ و $550/526$ و $551/210$ و $551/894$ و $552/578$ و $553/262$ و $553/946$ و $554/630$ و $555/314$ و $556/002$ و $556/686$ و $557/370$ و $558/054$ و $558/738$ و $559/422$ و $560/106$ و $560/790$ و $561/474$ و $562/158$ و $562/842$ و $563/526$ و $564/210$ و $564/894$ و $565/578$ و

به تصادف از توزیع یکنواخت روی فاصله (۰,۵) انتخاب شده‌اند (در این جا فضای پارامتری را بازه (۰,۵) در نظر گرفته‌ایم). در کنار بیشینه دقیق احتمالات پوشش محاسبه شده با الگوریتم ارائه شده در این مقاله نشان می‌دهد.

و ۰/۹۴۰ و ۰/۹۴۲ و ۰/۹۴۶ و ۰/۹۴۹ و ۰/۹۵۱ و ۰/۹۵۳ و ۰/۹۷۸ و ۰/۹۳۸ و ۰/۹۵۸. بنا بر این بیشینه احتمالات پوشش بازه MSC با ضریب ۰/۹۵ به کمک از ۱/۰۰۰.

۴ مطالعه شبیه سازی

در این بخش در ابتدا دو بازه اطمینان مجانبی AWC یا والد اصلاح شده با اضافه کردن احتمال در دم توزیع^۴ و WCC یا والد اصلاح شده با تصحیح پیوستگی^۵ برای پارامتر میانگین توزیع پواسون را از مقاله خام کنگ [۶] معرفی می‌کنیم و سپس برای اثبات نیرومندی الگوریتم ارائه شده در بخش ۲ از یک مطالعه شبیه سازی استفاده می‌کنیم.

۱.۴ بازه اطمینان AWC

بازه اطمینان AWC با ضریب $1 - \alpha$ برای θ به صورت زیر معرفی شده است:

$$x + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{\gamma} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x}$$

۲.۴ بازه اطمینان WCC

بازه اطمینان WCC با ضریب $1 - \alpha$ برای θ به صورت زیر معرفی شده است:

$$x \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{x + 0.5}$$

جدول ۳ بیشینه احتمالات پوشش بازه های اطمینان MSC ، SC ، AWC و WCC نود و پنج درصدی را، در صد هزار نقطه که

۵ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله روش محاسبه بیشینه دقیق احتمالات پوشش بازه های اطمینان با کران های صعودی برای میانگین توزیع پواسون را ارائه کردیم. با این روش می‌توانیم با محاسبه احتمالات پوشش بازه اطمینان در تعداد کمی از نقاط فضای پارامتری به بیشینه دقیق احتمالات پوشش بازه مورد نظر دست یابیم. نتایج شبیه سازی در بخش ۴ نشان می‌دهد که مقادیر بیشینه تقریبی به دست آمده در مقایسه با بیشینه دقیق احتمالات پوشش محاسبه شده برای بازه های اطمینان توسط الگوریتم بخش ۲ کوچک تر هستند، و این نشان دهنده اهمیت زیاد روش پیشنهادی است. چرا که با محاسبه احتمال پوشش در نقاطی بسیار کمتر به بیشینه احتمالات پوشش بیشتری دست می‌یابیم. با توجه به جدول ۳ بر اساس بیشینه احتمالات پوشش، بازه ها به ترتیب بهینگی عبارت اند از:

۱. MSC یا WCC

۲. SC

۳. AWC

جدول ۳. بیشینه احتمالات پوشش بازه های اطمینان ۹۵ درصدی در صد هزار نقطه فضای پارامتری که به تصادف انتخاب، در کنار بیشینه دقیق احتمالات پوشش

بازه اطمینان	بیشینه تقریبی	بیشینه دقیق
SC	۰/۹۹۹۹۴۲	۰/۹۹۹۹۹۹
MSC	۰/۹۹۹۹۱۴	۱
AWC	۰/۹۲۳۱۹۱	۰/۹۳۱۸۱۹
WCC	۱	۱

^۴ adding the tail probability of the wald confidence interval

^۵wald interval with continuity correction

مراجع

- [1] Byrne, J. and Kabaila, P. (2001). Short exact confidence intervals for the Poisson mean, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **30**, 257-261.
- [2] Casella, G. and Berger, R. (2002). *Statistical inference*, 2nd ed. United States of America: Thomson Learning Academic Resource Center
- [3] Guan, Y. (2011). Moved score confidence intervals for means of discrete distributions, *American Open Journal of Statistics*, **1**, 81-86.
- [4] Kabaila, P. and Byrne, J. (2001). Exact short Poisson confidence intervals, *Canadian Journal of Statistics*, **29**, 99-106.
- [5] Kabaila, P. and Lloyd, C.J. (1997). Tight upper confidence limits from discrete data, *Australian Journal of Statistics*, **39**, 193-204.
- [6] Khamkong, M. (2012). Approximate confidence interval for the mean of Poisson distribution, *American Open Journal of Statistics*, **2**, 204-207.
- [7] Sahai, H. and Khurshid, A. (1993). Confidence intervals for the mean of a Poisson distribution, *Biometrical Journal*, **35**, 7, 857-867.
- [8] Schwertman, N.C. and Martinez, (1994). Approximate Poisson confidence limits, *Communication in Statistics: Theory and Methods*, **23(5)**, 1507-1529.
- [9] Shirvani, A. and Fathizadeh, M. (2016). Assessing the accuracy of approximate confidence intervals proposed for the mean of a Poisson distribution, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*. to appear.
- [10] Shirvani, A. and Toomaj, A. (2016). Exact confidence coefficient and maximum coverage probabilities of nested confidence intervals for geometric parameter, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, to appear.
- [11] Wang, H. (2009). Exact average coverage probabilities and confidence coefficients of confidence intervals for discrete distributions, *Statistics and Computing*, **19**, 139-148.