تحلیل رگرسیون ستیغی دوپارامتری فازی با ورودی دقیق و خروجی فازی مثلثی

معصومه فرخی،[۱] محمدرضا ربیعی،[۲] محمد آرشی[۳]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۵/۲۲
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۲/۱۷

چکیده:

در این مقاله روش رگرسیون ستیغی فازی موزون[۴] جدیدی برای مجموعه‌ای از داده‌های ورودی دقیق و خروجی فازی مثلثی پیشنهاد شده است. برای این منظور، برآوردگر ستیغی پارامترهای فازی مدل رگرسیونی به دست آمده و خطای پیشگوی[۵] آن با استفاده از نرم فازی موزون به ازای ضرایب ستیغی دقیق، متفاوت ارزیابی شده است. برای ارزیابی مدل رگرسیونی پیشنهادی، ضریب تعیین تعمیم یافته را معرفی می کنیم. سپس با ارائهٔ مثال‌های عددی به مقایسهٔ مدل رگرسیون فازی معمولی و رگرسیون ستیغی فازی به‌کمک مقدار میانگین توان دوم خطاهای پیشگویی و ضریب تعیین فازی می‌پردازیم. در صورت وجود هم‌خطی بین متغیرهای پیش‌بین، نتایج به‌دست‌آمده از مدل رگرسیون ستیغی فازی بهتر از نتایج رگرسیون فازی معمولی خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: اعداد فازی مثلثی، رگرسیون فازی، برآوردگر ستیغی، رگرسیون ستیغی فازی موزون، ضریب تعیین تعمیم یافته.

۱ مقدمه

در مسائل کاربردی که مؤلفه‌های نادقیق جزء لاینفک آن‌ها هستند، استفاده از مجموعه‌های فازی برای بررسی ویژگی‌ها و اندازه‌گیری میزان کارایی آن‌ها، برخی از محدودیت های فعلی را برطرف می‌سازد. تحلیل آماری نادقیق با داده‌های فازی در بسیاری از شاخه‌های علوم آماری مانند کنترل کیفیت، رگرسیون و قابلیت اعتماد رو به توسعه است. در رگرسیون کلاسیک مفروضاتی در نظر گرفته می‌شود از جمله بین متغیرهای مستقل، رابطهٔ هم‌خطی وجود ندارد و متغیرهای ورودی دقیق هستند.

وقوع هم خطی چندگانه بین متغیرهای پیش‌بین در تحلیل رگرسیونی خطی ممکن است باعث ناپایداری شدید در برآوردهای کمترین توان‌های دوم پارامترهای رگرسیونی شود. از این رو روش‌های مختلفی از جمله رگرسیون ستیغی، لاسو و رگرسیون مؤلفه‌های اصلی برای غلبه بر این مشکل وجود دارد. یکی از این روش‌ها رگرسیون ستیغی است که اولین بار توسط هورل وکنارد [۶] پیشنهاد شد. برآوردگر ستیغی با حل یک دسته از معادلات نرمال به‌دست می‌آید. برآوردگر ستیغی را به‌عنوان جواب معادله زیر تعریف می کنیم:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I})\hat{\boldsymbol{\beta}}_R=\mathbf{X}'\mathbf{Y},$$

که از حل آن داریم

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_R=(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y},$$

که در آن $k \geq 0$ ثابتی است که توسط تحلیلگر انتخاب می‌شود. در رگرسیون فازی نیز زمانی که بین متغیرهای پیش‌بین، رابطهٔ هم‌خطی وجود داشته باشد، این مشکل وجود دارد و برای رفع این مشکل می‌توان از رگرسیون ستیغی فازی استفاده کرد. در زمینه رگرسیون فازی، هانگ و همکاران [۴] مطالعاتی انجام داده‌اند و از جمله کارهای اخیر در زمینهٔ رگرسیون فازی می‌توان به کلکین نما و طاهری [۱] و همچنین میرزایی یگانه و ارقامی [۲] اشاره کرد. میرزایی یگانه و ارقامی در این مقاله چندین رویکرد

[۱] دانش‌آموختهٔ کارشناس ارشد آمار دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران
[۲] گروه آمار دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران
[۳] گروه آمار دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران

[۴] weighted
[۵] predicted error

در رگرسیون فازی را بررسی کردند. در زمینهٔ رگرسیون ستیغی فازی می‌توان به چنگ و لی [۵] اشاره کرد که روشی جدید برای مجموعه‌ای از داده‌ها با ورودی دقیق و خروجی فازی مثلثی پیشنهاد کردند و همچنین بلاسوندارام و کاپیل [۸] که رگرسیون ستیغی فازی موزون برای مجموعه‌ای از ورودی‌های دقیق و خروجی فازی مثلثی پیشنهاد کردند و با استفاده از تابع کرنل در برآورد، میانگین مربع خطا را تا حد امکان کاهش دادند. فرنوش و همکاران [۷] برآورد ستیغی مدل رگرسیون ناپارامتری فازی را برای اعداد فازی مثلثی بررسی کردند. آنان از فاصلهٔ دیاموند برای محاسبهٔ خطای مدل استفاده کردند و همچنین از روش اعتبارسنجی برای انتخاب مقدار بهینه پارامتر استفاده کردند. در این مقاله یک روش رگرسیون ستیغی فازی با نرم فازی موزون، برای مجموعه‌ای از داده‌های ورودی دقیق وخروجی فازی مثلثی پیشنهاد شده است. به طور دقیق‌تر، در این روش برای هر کدام از پارامترهای عرض از مبدأ و شیب مدل، جریمه‌های متفاوتی را در نظر می‌گیریم. با این کار می‌توان میزان تأثیر هر کدام از این پارامترها را به‌طور جداگانه کنترل کرد. همچنین با کمک نرم فازی وزن دار شده، ضریب تعیین فازی را معرفی می‌کنیم.

ساختار مقاله به‌صورت زیر است: در بخش ۲ مفاهیم و تعاریف اولیهٔ آمار فازی را بیان می‌کنیم، در بخش ۳ مدل خطی رگرسیون ستیغی فازی را ارائه می‌کنیم و در بخش۴ معیار نیکویی برازش مدل را معرفی کرده، در بخش ۵ چگونگی تأثیر پارامترهای ستیغی را در قالب مثال‌های عددی بررسی می‌کنیم.

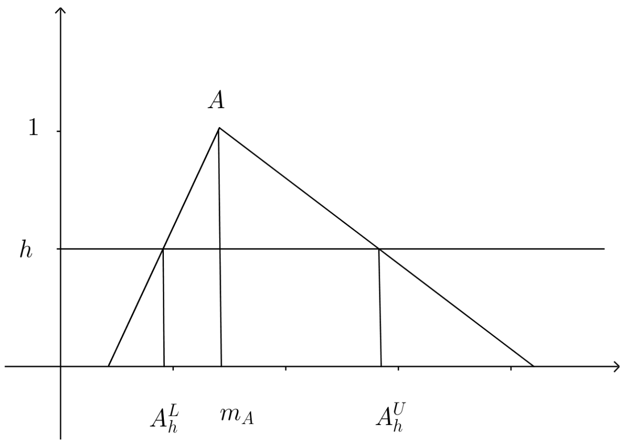
۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

فرض کنید هر عدد فازی مثلثی A با تابع عضویت $A(.)$ و به‌شکل $A=(m_A,\ l_A,\ r_A)$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A(x)=\begin{cases}\frac{x-m_A+l_A}{l_A}, & m_A-l_A\le x<m_A\\ \frac{m_A+r_A-x}{r_A}, & m_A\le x<m_A+r_A\\ 0, & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

که m_A مرکز و l_A و r_A به‌ترتیب پهنای چپ و پهنای راست عدد فازی است. مجموعهٔ همهٔ اعداد فازی مثلثی را با $T(\Re)$ نمایش می‌دهیم. با توجه به حد پایین و حد بالای عدد فازی A به‌ترتیب m_A-l_A و m_A+r_A است، برای هر عدد فازی $A=(m_A,\ l_A,\ r_A)\in T(\Re)$ و $h\in[0,1]$ که h-برش A به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left[A^L(h),\ A^U(h)\right]=\left[m_A-(1-h)\,l_A,\ m_A+(1-h)\,r_A\right] \tag{۱}$$



شکل ۱. h-برش عدد فازی A

روابط زیر، جمع دو عدد فازی و ضرب یک عدد حقیقی در یک عدد فازی را نشان می‌دهند، که از مفهوم اصل توسیع که توسط زاده [۹] معرفی شد، برگرفته شده است. اگر $A_1=(m_1,l_1,r_1)$ و $A_2=(m_2,l_2,r_2)$ دو عدد فازی در $T(\Re)$ باشند و $\lambda\in\Re$،

$$A_1+A_2=(m_1+m_2,\ l_1+l_2,r_1+r_2), \tag{۲}$$

$$\lambda A_1=\begin{cases}(\lambda m_1,\lambda l_1,\lambda r_1), & \lambda>0\\ (\lambda m_1,-\lambda r_1,-\lambda l_1), & \lambda<0\end{cases} \tag{۳}$$

۱.۲ فاصلهٔ موزون بین دو عدد فازی

ژو [۱۰] فاصلهٔ بین دو عدد فازی A و B را بر پایهٔ تابع وزنی $f(h)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کند

$$d(A,B)=\left[\int_0^1 f(h)\,d^2(A_h,B_h)\,dh\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{۴}$$

که در آن

$$d^2(A_h,B_h)=\left[A_h^L-A_h^U\right]^2+\left[B_h^L-B_h^U\right]^2, \tag{۵}$$

و $f(h)$ یک تابع صعودی روی بازهٔ $[0,1]$ است و داریم $f(0)=0$ و $\int_0^1 f(h)dh=\frac{1}{2}$.

قضیهٔ ۱.۲. فرض کنید A و B دو عدد فازی مثلثی باشند. در این صورت بر پایهٔ تابع وزنی $f(h)=h$ داریم:

$$\begin{aligned}d^2(A,B)&=(m_A-m_B)^2\\&+\frac{1}{3}(m_A-m_B)\left[(r_A-r_B)-(l_A-l_B)\right]\\&+\frac{1}{12}\left[(l_A-l_B)^2+(r_A-r_B)^2\right].\end{aligned} \tag{۶}$$

اثبات. فرض کنید $A=(m_A,l_A,r_A)$ و $B=(m_B,l_B,r_B)$ دو عدد فازی مثلثی باشند و $f(h)=h$. حال با استفاده از رابطه‌های ۱ و ۴ و ۵ داریم

$$\begin{aligned}
d^2(A,B) &= \int_0^1 \left[A_h^L - B_h^L\right]^2 hdh + \int_0^1 \left[A_h^U - B_h^U\right]^2 hdh\\
&= \int_0^1 \Big(\left[(m_A-(1-h)\,l_A)-(m_B-(1-h)\,l_B)\right]^2\\
&\quad + \left[(m_A+(1-h)\,r_A)-(m_B+(1-h)\,r_B)\right]^2 \Big)\, hdh\\
&=(m_A-m_B)^2\\
&\quad + \frac{1}{3}(m_A-m_B)\left[(r_A-r_B)-(l_A-l_B)\right]\\
&\quad + \frac{1}{12}\left[(l_A-l_B)^2+(r_A-r_B)^2\right].
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۲.۲. در رابطهٔ فوق، فاصلهٔ هر عدد فازی مثلثی مانند A از مبدأ (یعنی $0=(0,0,0)$) به‌صورت

$$\begin{aligned}
d^2(A,0) &= ||A||^2\\
&= m_A^2 + \frac{1}{3}m_A(r_A-l_A) + \frac{1}{12}(l_A^2+r_A^2)
\end{aligned} \tag{7}$$

محاسبه می‌شود.

۳ برآوردگر ستیغی فازی پیشنهادی

مدل رگرسیون خطی فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Y=\beta_. + \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{\beta}, \tag{8}$$

که در آن $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_p)^t\in\Re^p$، و $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_p)^t$ یک بردار فازی است به‌طوری که $\beta_j=(m_{\beta_j},l_{\beta_j},r_{\beta_j})$ به‌ازای $j=1,\ \dots,\ p$ و $\beta_.=(m_{\beta_.},l_{\beta_.},r_{\beta_.})$ و $Y=(m_Y,l_Y,r_Y)$ اعداد فازی مثلثی روی $\Re$ هستند.

قضیهٔ ۱.۳. برآورد ستیغی ضرایب مدل رگرسیونی ۸ به‌صورت زیر است:

$$\widehat{\mathrm{Y}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\boldsymbol{A}^t}{\lambda_1}\\ \frac{\boldsymbol{e}^t}{\lambda_2}\end{bmatrix}\left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^t}{\lambda_2}\right)^{-1}(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{l},\ \boldsymbol{r}), \tag{9}$$

که در آن $\boldsymbol{x}^t=(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p)$، و i امین سطر ماتریس $\boldsymbol{A}\in\Re^{n*p}$ را بردار $\boldsymbol{x}_i^t$ تشکیل می‌دهد. همچنین $\boldsymbol{e}$ بردار ستونی از یک‌ها با بُعد n و ماتریس همانی $\boldsymbol{I}$ با بُعد مناسب است و $\boldsymbol{m}=(m_{Y_1},\ \dots,\ m_{Y_p})^t$ و $\boldsymbol{l}=(l_{Y_1},\ \dots,\ l_{Y_p})^t$ و $\boldsymbol{r}=(r_{Y_1},\ \dots,\ r_{Y_p})^t$ است. پارامترهای $\lambda_1,\lambda_2>0$ ضرایب رگرسیونی ستیغی هستند.

اثبات. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله به‌ازای $j=1,\cdots,p$، $x_j\geq 0$ (در صورتی که x_j ها اعدادی منفی باشند، می‌توان آن‌ها را با یک انتقال به اعدادی مثبت تبدیل کرد) با استفاده از تعاریف جمع و ضرب اسکالر اعداد مثلثی در ۲ و ۳، مدل رگرسیونی ۸ به‌شکل زیر به دست می‌آید:

$$Y=\left(\sum_{j=1}^{p} m_{\beta_j}x_j+m_{\beta_.},\ \sum_{j=1}^{p} l_{\beta_j}x_j+l_{\beta_.},\sum_{j=1}^{p} r_{\beta_j}x_j+r_{\beta_.}\right).$$

فرض کنید که مجموعه‌های از نمونه های ورودی دقیق و مقادیر مشاهده‌شدهٔ فازی مثلثی متناظر با آن $\{(\boldsymbol{x}_i,Y_i)\}_{i=1,\ \dots,\ n}$ داده شده باشد که برای بردار $\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},\dots,x_{ip})^t\in\Re^p$ و مقادیر مشاهده‌شدهٔ $Y_i=(m_{Y_i},l_{Y_i},r_{Y_i})\in T(\Re)$ است. مسئلهٔ رگرسیون ستیغی دو پارامتری فازی با پارامترهای λ_1 و λ_2 را می‌توان به‌عنوان یک مسئلهٔ بهینه‌سازی به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\min_{\beta_.,\ \boldsymbol{\beta}} \lambda_1||\boldsymbol{\beta}||^2+\lambda_2||\beta_.||^2+\sum_{i=1}^{n} d^2\left(\beta_.+\boldsymbol{x}_i^t\boldsymbol{\beta},\ Y_i\right), \tag{10}$$

که درآن $\lambda_1,\lambda_2>0$ هستند. با استفاده از رابطه‌های ۶ و ۷ داریم:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1||\boldsymbol{\beta}||^2+\lambda_2||\beta_.||^2+\sum_{i=1}^{n} d^2\left(\beta_.+\boldsymbol{x}_i^t\boldsymbol{\beta},\ Y_i\right)\\
&=\lambda_1\sum_{j=1}^{p}||(m_{\beta_j},l_{\beta_j},r_{\beta_j})||^2+\lambda_2||(m_{\beta_.},l_{\beta_.},r_{\beta_.})||^2\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}||Y_i-\beta_.-\boldsymbol{x}_i^t\boldsymbol{\beta}||^2\\
&=\lambda_1\sum_{j=1}^{p}\left[m_{\beta_j}^2+\frac{1}{3}m_{\beta_j}\left(r_{\beta_j}-l_{\beta_j}\right)+\frac{1}{12}(l_{\beta_j}^2+r_{\beta_j}^2)\right]\\
&\quad+\lambda_2(m_{\beta_.}^2+\frac{1}{3}m_{\beta_.}\left(r_{\beta_.}-l_{\beta_.}\right)+\frac{1}{12}(l_{\beta_.}^2+r_{\beta_.}^2))\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{p} m_{\beta_j}x_{ij}+m_{\beta_.}-m_{Y_i}\right)^2\right.\\
&\quad+\frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{p} m_{\beta_j}x_{ij}+m_{\beta_.}-m_{Y_i}\right)\\
&\quad\times\left[\left(\sum_{j=1}^{p} r_{\beta_j}x_{ij}+r_{\beta_.}-r_{Y_i}\right)\right.
\end{aligned} \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\sum_{j=1}^{p} l_{\beta_j}x_{ij}+l_{\beta.}-l_{Y_i}\right)\Bigg]\\
&+\frac{1}{12}\Bigg[\Bigg[\left(\sum_{j=1}^{p} l_{\beta_j}x_{ij}+l_{\beta.}-l_{Y_i}\right)^{2}\\
&+\left(\sum_{j=1}^{p} r_{\beta_k}x_{ik}+r_{\beta.}-r_{Y_i}\right)^{2}\Bigg]\Bigg] \qquad (12)
\end{aligned}
$$

توجه کنید که مسئلهٔ مینیمم‌سازی رابطهٔ ۱۰ را می‌توان به شکل مسئلهٔ مینیمم‌سازی زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\substack{m_{\beta.},l_{\beta.},r_{\beta.},\\ m_{\beta_j},l_{\beta_j},r_{\beta_j},\xi_1,\xi_2,\ \xi_3}} \sum_{j=1}^{p}\Big[\lambda_1 m_{\beta_j}^{2}+\frac{\lambda_1}{3}m_{\beta_j}\left(r_{\beta_j}-l_{\beta_j}\right)\\
&+\frac{\lambda_1}{12}(l_{\beta_j}^{2}+r_{\beta_j}^{2})\Big]+\ \lambda_2 m_{\beta.}^{2}\\
&+\frac{\lambda_2}{3}m_{\beta.}\left(r_{\beta.}-l_{\beta.}\right)+\frac{\lambda_2}{12}(l_{\beta.}^{2}+r_{\beta.}^{2})\\
&+\sum_{i=1}^{n}\left[\xi_{1i}^{2}+\frac{1}{3}\xi_{1i}\left(\xi_{3i}-\xi_{2i}\right)+\frac{1}{12}\left(\xi_{2i}^{2}-\xi_{3i}^{2}\right)\right], \qquad (13)
\end{aligned}
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m}_{\beta}^{t}x_i+m_{\beta.}-m_{Y_i}&=\xi_{1i},\\
\boldsymbol{l}_{\beta}^{t}x_i+l_{\beta.}-l_{Y_i}&=\xi_{2i},\\
\boldsymbol{r}_{\beta}^{t}x_i+r_{\beta.}-r_{Y_i}&=\xi_{3i}
\end{aligned}
$$

است و $\boldsymbol{m_\beta}=(m_{\beta_1},\ \ldots,\ m_{\beta_p})^t$ و $\boldsymbol{l_\beta}=(l_{\beta},\ \ldots,\ l_{\beta_p})^t$ و $\boldsymbol{r_\beta}=(r_{\beta_1},\ \ldots,\ r_{\beta_p})^t$ و $\boldsymbol{\xi}_1=(\xi_{11},\ldots,\xi_{1n})^t$ و همچنین $\boldsymbol{\xi}_2=(\xi_{21},\ldots,\xi_{2n})^t$ و $\boldsymbol{\xi}_3=(\xi_{31},\ldots,\xi_{3n})^t$ بردارها هستند. برای راه حل مسئلهٔ ۱۳ را به دست آوریم با معرفی ضرایب لاگرانژ $\boldsymbol{\alpha}_1=(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1n})^t$ و $\boldsymbol{\alpha}_2=(\alpha_{21},\ldots,\alpha_{2n})^t$ و $\boldsymbol{\alpha}_3=(\alpha_{31},\ldots,\alpha_{3n})^t$ در $\Re^p$ تابع L را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
&L(\boldsymbol{m_\beta},\boldsymbol{l_\beta},\boldsymbol{r_\beta},\ m_{\beta.},\ l_{\beta.},\ r_{\beta.},\ \boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)\\
&=\lambda_1\sum_{j=1}^{p}\left[m_{\beta_j}^{2}+\frac{1}{3}m_{\beta_j}\left(r_{\beta_j}-l_{\beta_j}\right)+\frac{1}{12}(l_{\beta_j}^{2}+r_{\beta_j}^{2})\right]\\
&+\lambda_2(m_{\beta.}^{2}+\frac{1}{3}m_{\beta.}\left(r_{\beta.}-l_{\beta.}\right)+\frac{1}{12}(l_{\beta.}^{2}+r_{\beta.}^{2}))\\
&+\sum_{i=1}^{n}[\xi_{1i}^{2}+\frac{1}{3}\xi_{1i}\left(\xi_{3i}-\xi_{2i}\right)+\frac{1}{12}(\xi_{2i}^{2}-\xi_{3i}^{2})]\\
&+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{1i}[\sum_{j=1}^{p}m_{\beta_j}x_{ij}+m_{\beta.}-m_{Y_i}-\xi_{1i}]\\
&+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{2i}[\sum_{j=1}^{p}l_{\beta_j}x_{ij}+l_{\beta.}-l_{Y_i}-\xi_{2i}]\\
&+\sum_{i=1}^{n}\alpha_{3i}[\sum_{j=1}^{p}m_{\beta_j}x_{ij}+m_{\beta.}-m_{Y_i}-\xi_{1i}]. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

با استفاده از تعریف ماتریس $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{e}$ و $\boldsymbol{I}$ در صورت قضیه، با مشتق گیری از جملهٔ L نسبت به هر یک از پارامترها و برابر با صفر قرار دادن آن، دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
2\lambda_1\boldsymbol{m_\beta}+\frac{\lambda_1}{3}\left(\boldsymbol{r_\beta}-\boldsymbol{l_\beta}\right)&=-\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{\alpha}_1,\\
-\frac{\lambda_1}{3}\boldsymbol{m_\beta}+\frac{\lambda_1}{6}\boldsymbol{l_\beta}&=-\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{\alpha}_2,\\
\frac{\lambda_1}{3}\boldsymbol{m_\beta}+\frac{\lambda_1}{6}\boldsymbol{r_\beta}&=-\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{\alpha}_3,\\
2\lambda_2 m_{\beta.}+\frac{\lambda_2}{3}\left(r_{\beta.}-l_{\beta.}\right)&=-\boldsymbol{e}^t\boldsymbol{\alpha}_1,\\
-\frac{\lambda_2}{3}m_{\beta.}+\frac{\lambda_2}{6}l_{\beta.}&=-\boldsymbol{e}^t\boldsymbol{\alpha}_2,\\
\frac{\lambda_2}{3}m_{\beta.}+\frac{\lambda_2}{6}r_{\beta.}&=-\boldsymbol{e}^t\boldsymbol{\alpha}_3,\\
2\boldsymbol{\xi}_1+\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{\xi}_3-\boldsymbol{\xi}_2\right)&=\boldsymbol{\alpha}_1,\\
-\frac{1}{3}\boldsymbol{\xi}_1+\frac{1}{6}\boldsymbol{\xi}_2&=\boldsymbol{\alpha}_2,\\
\frac{1}{3}\boldsymbol{\xi}_1+\frac{1}{6}\boldsymbol{\xi}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3.
\end{aligned}
$$

با حل همزمان معادلات فوق داریم:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m_\beta}&=-\frac{\boldsymbol{A}^t}{\lambda_1}(\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3),\\
\boldsymbol{l_\beta}&=-\frac{\boldsymbol{A}^t}{\lambda_1}(3\boldsymbol{\alpha}_1+12\boldsymbol{\alpha}_2-6\boldsymbol{\alpha}_3),\\
\boldsymbol{r_\beta}&=-\frac{\boldsymbol{A}^t}{\lambda_1}(-3\boldsymbol{\alpha}_1-6\boldsymbol{\alpha}_2+12\boldsymbol{\alpha}_3),\\
m_{\beta.}&=-\frac{\boldsymbol{e}^t}{\lambda_2}(\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3),\\
l_{\beta.}&=-\frac{\boldsymbol{e}^t}{\lambda_2}(3\boldsymbol{\alpha}_1+12\boldsymbol{\alpha}_2-6\boldsymbol{\alpha}_3),\\
r_{\beta.}&=-\frac{\boldsymbol{e}^t}{\lambda_2}(-3\boldsymbol{\alpha}_1-6\boldsymbol{\alpha}_2+12\boldsymbol{\alpha}_3),\\
\boldsymbol{\xi}_1&=(\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3),\\
\boldsymbol{\xi}_2&=(3\boldsymbol{\alpha}_1+12\boldsymbol{\alpha}_2-6\boldsymbol{\alpha}_3),\\
\boldsymbol{\xi}_3&=(-3\boldsymbol{\alpha}_1-6\boldsymbol{\alpha}_2+12\boldsymbol{\alpha}_3).
\end{aligned} \qquad (15)
$$

حال با جایگذاری شرایط ۱۵ در ۱۴ مسئلهٔ مینیمم‌سازی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3} L= & -\frac{3}{4}\boldsymbol{\alpha}_1^t\left(\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 \\
& -3\boldsymbol{\alpha}_1^t\left(\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_1^t\left(\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)\boldsymbol{\alpha}_3 \\
& -6\boldsymbol{\alpha}_2^t\left(\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_2^t\left(\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)\boldsymbol{\alpha}_3 \\
& -6\boldsymbol{\alpha}_3^t\left(\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{3}{4}\boldsymbol{\alpha}_1^t\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_1^t\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_1^t\boldsymbol{\alpha}_3 \\
& -6\boldsymbol{\alpha}_2^t\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_2^t\boldsymbol{\alpha}_3-6\boldsymbol{\alpha}_3^t\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1^t m_Y-\boldsymbol{\alpha}_2^t l_Y-\boldsymbol{\alpha}_3^t r_Y.
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

با استفاده از روش مشتق گیری ضرایب لاگرانژ، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\alpha}_1} &= \left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3\right)+\boldsymbol{m}=0, \\
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\alpha}_2} &= \left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)(3\boldsymbol{\alpha}_1+12\boldsymbol{\alpha}_2-6\boldsymbol{\alpha}_3)+\boldsymbol{l}=0, \\
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\alpha}_3} &= \left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)(-3\boldsymbol{\alpha}_1-6\boldsymbol{\alpha}_2+12\boldsymbol{\alpha}_3)+\boldsymbol{r}=0.
\end{aligned}
\tag{۱۷}
$$

سپس با استفاده از معادلات ۱۵ و (۱۶) مسئلهٔ مینیمم‌سازی (۱۳) به‌شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\beta}} &= \frac{\boldsymbol{A}^t}{\lambda_1}\left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)^{-1}\boldsymbol{m}, \\
\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{\beta}} &= \frac{\boldsymbol{A}^t}{\lambda_1}\left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)^{-1}\boldsymbol{l}, \\
\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\beta}} &= \frac{\boldsymbol{A}^t}{\lambda_1}\left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)^{-1}\boldsymbol{r}, \\
m_{\beta_0} &= \frac{\boldsymbol{e}^t}{\lambda_2}\left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)^{-1}\boldsymbol{m}, \\
l_{\beta_0} &= \frac{\boldsymbol{e}^t}{\lambda_2}\left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)^{-1}\boldsymbol{l}, \\
r_{\beta_0} &= \frac{\boldsymbol{e}^t}{\lambda_2}\left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)^{-1}\boldsymbol{r}.
\end{aligned}
$$

در نتیجه برای هر بردار ورودی دقیق $\boldsymbol{x}\in\Re^n$ با استفاده از تابع برآورد رگرسیون خطی فازی ۸ و خروجی فازی $\mathrm{Y}=(m_{\mathrm{Y}},l_{\mathrm{Y}},r_{\mathrm{Y}})$ به‌صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$
\widehat{\mathrm{Y}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\boldsymbol{A}^t}{\lambda_1}\\ \frac{\boldsymbol{e}^t}{\lambda_2}\end{bmatrix}\left(I+\frac{\boldsymbol{AA}^t}{\lambda_1}+\frac{\boldsymbol{ee}^t}{\lambda_2}\right)^{-1}(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{l},\ \boldsymbol{r}).
$$

□

۴ معیار نیکویی برازش

یکی از شاخص‌های ارزیابی نیکویی برازش مدل رگرسیون آماری، محاسبهٔ ضریب تعیین (R^2) مدل به‌صورت زیر است (مونتگمری [۱۱] را ببینید)

$$
R^2=\frac{SSR}{SST}=\frac{\sum_{i=1}^n(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^n(Y_i-\overline{Y})^2},
$$

با الهام از تعریف ضریب تعیین (R^2) در آمار کلاسیک، برای مدل‌های رگرسیونی فازی، ضریب تعیین تعمیم‌یافته را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱.۴. در مدل رگرسیون خطی فازی (۸) اگر متغیر وابسته $Y=(m_Y,l_Y,r_Y)$ و مقدار پیش‌بینی آن توسط مدل رگرسیون فازی $\hat{Y}=(m_{\hat{Y}},l_{\hat{Y}},r_{\hat{Y}})$ باشند، ضریب تعیین تعمیم‌یافته برای مدل را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$
R_G^2=\frac{\sum_{i=1}^n d^2(\hat{Y}_i,\overline{Y})}{\sum_{i=1}^n d^2(Y_i,\ \overline{Y})}.
\tag{۱۸}
$$

قضیهٔ ۲.۴. ضریب تعیین مدل رگرسیونی فازی با خروجی فازی مثلثی با استفاده از فاصلهٔ موزون بین دو عدد فازی در رابطهٔ (۶) به‌صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
R_G^2=&\left\{\sum_{i=1}^n\left[\left(m_{\hat{Y}_i}-m_{\overline{Y}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(m_{\hat{Y}_i}-m_{\overline{Y}}\right)\right.\right.\\
&\times\left[\left(r_{\hat{Y}_i}-r_{\overline{Y}}\right)-(l_{\hat{Y}_i}-l_{\overline{Y}})\right]\\
&\left.\left.+\frac{1}{12}\left[\left(l_{\hat{Y}_i}-l_{\overline{Y}}\right)^2+\left(r_{\hat{Y}_i}-r_{\overline{Y}}\right)^2\right]\right]\right\}\\
&\div\left\{\sum_{i=1}^n\left[(m_{Y_i}-m_{\overline{Y}})^2+\frac{1}{3}(m_{Y_i}-m_{\overline{Y}})\right.\right.\\
&\times\left[(r_{Y_i}-r_{\overline{Y}})-(l_{Y_i}-l_{\overline{Y}})\right]\\
&\left.\left.+\frac{1}{12}\left[(l_{Y_i}-l_{\overline{Y}})^2+(r_{Y_i}-r_{\overline{Y}})^2\right]\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{۱۹}
$$

اثبات. با توجه به تعریف ۱.۴ و استفاده از فاصلهٔ موزون بین دو عدد فازی در رابطهٔ (۶) نتیجه به‌سادگی به دست می‌آید. □

علاوه بر معیار R^2، می‌توان از میانگین توان دوم خطای پیشگویی (MPE) به‌عنوان معیار دیگری برای ارزیابی نیکویی برازش استفاده کرد. در زیر، مشابه قضیهٔ ۲.۴، معیار MPE را در قالب یک تعریف می‌آوریم.

تعریف ۳.۴. تحت مفروضات مدل رگرسیونی ۱۸ اگر $\hat{Y}_i$ مقدار پیشگویی Y_i باشد، آنگاه میانگین توان دوم خطای پیشگویی (MPE) برابر است با

$$
MPE=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d^2(Y_i,\hat{Y}_i).
$$

۵ تعیین پارامترهای ستیغی $\lambda_۱, \lambda_۲$

در این بخش، رفتار برآوردگر ستیغی دوپارامتری فازی را از نظر دقت پیشگویی بر اساس پارامترهای $\lambda_۱, \lambda_۲$ در داده‌های واقعی بررسی می کنیم.

۱.۵ داده‌های سیمان پرتلند

در این مثال، داده‌های وود[۶] و همکاران [۱۲] را مورد استفاده قرار می‌دهیم. این داده‌ها از مطالعهٔ تأثیر ترکیبات مختلف بر روی حرارت بیرون آمده در طول سخت شدن سیمان پرتلند به دست آمده است. در این جا داده‌هایی را که از چهار ترکیب $۳CaO.Al_۲O_۳ (x_۱)$، $۳CaO.SiO_۲ (x_۲)$، $۴CaO.Al_۲O_۳.Fe_۲O_۳ (x_۳)$، $۲CaO.SiO_۲ (x_۴)$ و میزان گرمای بیرون‌آمده بعد از ۸۰ روز (y) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به برخی ابهامات در اندازه‌گیری‌های مربوط به مشاهدات متغیر پاسخ، برای مدلبندی این ابهام ، این اعداد با استفاده از یک عدد فازی مثلثی با پهناهای راست و چپ متناسب با y فازی سازی شده‌اند. چون ورودی‌ها دقیق هستند از VIF معمولی برای نشان دادن میزان هم خطی میان متغیرهای مستقل استفاده می کنیم که

$$VIF_۱ = ۳۸, \quad VIF_۲ = ۲۵۴,$$
$$VIF_۳ = ۴۶, \quad VIF_۴ = ۲۵۰.$$

مدل رگرسیون ستیغی دوپارامتری فازی (۱۰) را با استفاده از نرم‌افزار Mathematica به‌ازای $\lambda_۱ = ۰/۱$ و $\lambda_۲ = ۰/۰۰۰۱$ مینیمم کرده‌ایم. برآورد ضرایب رگرسیونی به‌صورت زیر است.

$$\hat{Y}_۱ = (۶۲/۲۶۴, ۱۲/۰۹۵) + (۱/۵۴۵, ۰/۴۲۱)x_۱$$
$$+ (۰/۵۱۴, ۰/۱۶۴)\, x_۲ + (۰/۰۸۷, ۰/۰۵۷)\, x_۳ - ۰/۱۴۰x_۴.$$

با توجه به بزرگتر از ۱۰ بودن همهٔ مقادیر VIF، وجود هم خطی میان متغیرهای مستقل تأیید می‌شود و بنا بر این لزوم استفاده از رگرسیون ستیغی فازی محرز است. در این جا با استفاده از تابع برآورد رگرسیون خطی فازی، مقادیر مختلفی به ضرایب $\lambda_۱, \lambda_۲$ داده‌ایم و سپس MPE را محاسبه کرده‌ایم، که در مثال زیر کمترین مقدار MPE مربوط به $\lambda_۱ = ۰/۱$ و $\lambda_۲ = ۰/۰۰۰۱$ برابر با ۳/۵۷۷۷ است (جدول ۱ و شکل‌های ۲و ۳).

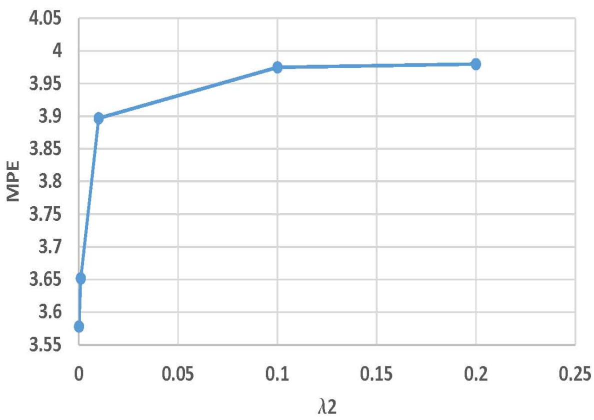
جدول ۱. محاسبهٔ MPE به ازای $\lambda_۱$ها و $\lambda_۲$های مختلف در داده‌های سیمان پرتلند با استفاده از مدل رگرسیون ستیغی فازی

ردیف	$\lambda_۱$	$\lambda_۲$	MPE
۱	۰/۱	۰/۰۰۰۱	۳/۵۷۷۷
۲	۰/۱	۰/۱	۳/۹۷۴۸
۳	۰/۱	۰/۵	۳/۹۴۸۵۵
۴	۰/۱	۱	۳/۹۸۴۰۹
۵	۰/۱	۵	۳/۹۸۴۹۴
۶	۰/۱	۱۰	۳/۹۸۵۰۴
۷	۰/۵	۰/۱	۳/۹۷۳۱۴
۸	۱	۰/۱	۳/۹۷۲۱۹
۹	۵	۰/۱	۴/۰۰۴۶۱
۱۰	۱۰	۰/۱	۴/۱۲۵۵۲

ضریب تعیین تعمیم‌یافتهٔ این مدل برابر با ۰/۹۸ است. در این مثال که داده‌ها دارای هم خطی‌اند، اگر مسئلهٔ بهینه‌سازی را برای مدل رگرسیون فازی معمولی به‌کار ببریم مدل به‌صورت زیر پیش‌بینی می‌شود.

$$\hat{Y}_۲ = (۶۵/۶۷۵, ۱۲/۰۹۴) + (۱/۵۱۰, ۰/۴۲۱)x_۱$$
$$+ (۰/۴۷۹, ۰/۱۶۴)\, x_۲ + (۰/۰۵۲, ۰/۰۵۸)\, x_۳ - ۰/۱۷۵x_۴$$

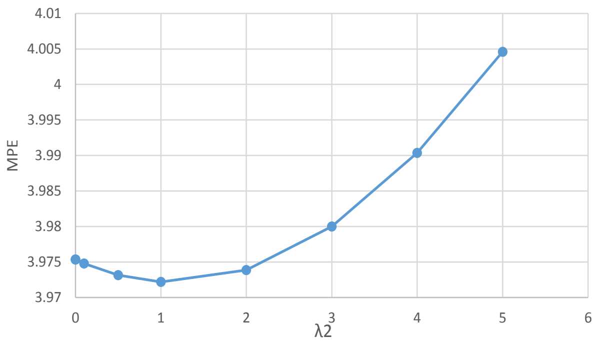
و مقدار MPE برابر با ۳/۹۸۶۰۴ می‌شود که به‌وضوح مشخص است که با استفاده از رگرسیون ستیغی دوپارامتری فازی به‌جای رگرسیون فازی، خطای مدل کاهش می‌یابد.



شکل ۲. نمودار MPE در برابر مقادیر مختلف $\lambda_۲$ به‌ازای مقادیر ثابت $\lambda_۱ = ۰/۱$ برای داده‌های سیمان پرتلند

نتایج برآورد مدل رگرسیون فازی و مدل رگرسیون ستیغی فازی به‌ازای $\lambda_۱ = ۰/۱$ و $\lambda_۲ = ۰/۰۰۰۱$ در جدول ۲ آمده است.

[۶] Wood



شکل۳. نمودار MPE در برابر مقادیر مختلف $\lambda_۱$ به‌ازای مقادیر ثابت $\lambda_۲ = ۰/۱$ برای داده‌های سیمان پرتلند

۲.۵ داده‌های تولید ناخالص ملی

در این مثال، داده‌های هزینه‌های تحقیق و تولید ملی خام به‌عنوان درصدی از تولید ناخالص ملی کشور آمریکا را در بین سال‌های ۱۹۷۲ تا ۱۹۸۳ بررسی می‌کنیم. (آکدنیز و ارول [۱۳]) این داده‌ها رابطهٔ بین (متغیر وابسته Y) درصد مخارج کشور ایالت متحده آمریکا و درصد مخارج ۴ کشور دیگر (متغیرهای مستقل $X_۱, X_۲, X_۳, X_۴$)، به‌ترتیب فرانسه، آلمان، ژاپن و شوروی سابق را نشان می‌دهد. با توجه به برخی ابهامات در اندازه‌گیری‌های مربوط به مشاهدات متغیر پاسخ، با مشورت یک فرد متخصص با استفاده از یک عدد فازی مثلثی با پهناهای راست و چپ متناسب با y فازی‌سازی شده‌اند. چون ورودی‌ها دقیق هستند از VIF معمولی برای نشان دادن میزان همبستگی میان متغیرهای مستقل استفاده می‌کنیم، که

$$VIF_۱ = ۶, \quad VIF_۲ = ۲۴,$$
$$VIF_۳ = ۲۹, \quad VIF_۴ = ۱.$$

با توجه به مقادیر VIF وجود هم خطی میان متغیرهای مستقل تأیید می‌شود و بنا بر این استفاده از رگرسیون ستیغی محرز است. در این مثال نیز مانند مثال قبل به‌ازای مقادیر مختلف پارامترهای ستیغی $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$، $\hat{Y}$ و مقدار MPE را محاسبه کرده‌ایم که به‌ازای $\lambda_۱ = ۰/۰۰۱$ و $\lambda_۲ = ۰/۱$ مقدار MPE برابر $۰/۰۰۰۹۵۸$ است که کمترین مقدار خود را از بین مقادیر پیشنهادی می‌گیرد. مدل رگرسیون ستیغی دوپارامتری فازی (۱۰) به‌ازای $\lambda_۱ = ۰/۰۰۱$ و $\lambda_۲ = ۰/۱$ را با استفاده از نرم‌افزار Mathematica مینیمم کرده‌ایم. برآورد ضرایب مدل رگرسیون ستیغی فازی به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\hat{Y} =& (۰/۷۱۰, ۰/۵۵۲, ۰) \\ &+ (۰/۳۰۴, ۰, ۰/۲۸۷)x_۱ + (۰/۱۱۱, ۰/۰۴۷, ۰) \\ &\times x_۲ + (۰/۲۷۰, ۰, ۰/۱۱۶)x_۳ + (۰/۰۶۵, ۰/۰۰۱, ۰)x_۴\end{aligned}$$

ضریب تعیین مدل به‌ازای مقادیر بهینهٔ پارامترهای $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ برابر با $۰/۹۹۲$ می‌شود. همچنین مقدار MPE برای مدل رگرسیون فازی برابر با $۰/۰۰۲۸۹$ است. در جدول ۳ نتایج مربوط به برآورد مدل رگرسیون ستیغی فازی و برآورد مدل رگرسیون فازی با توجه به رابطهٔ (۹) ارائه شده است و همچنین با توجه به رابطهٔ (۶) خطای مدل در رگرسیون فازی و رگرسیون ستیغی فازی به دست آمده است، که با توجه به مقدار MPE درمی‌یابیم که خطای مدل در رگرسیون ستیغی فازی نسبت به رگرسیون فازی کاهش می‌یابد.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش جدید برآورد براساس مدل رگرسیون ستیغی فازی ارائه کردیم که در آن پارامترهای شیب و عرض از مبدأ هر کدام به اندازه‌های متفاوتی جریمه می‌شوند. برای این منظور، برآوردگر ستیغی فازی دوپارامتری را محاسبه کردیم و با تعریف ضریب تعیین فازی و خطای پیشگویی مدل رگرسیونی تعریف‌شده در این مقاله به ارزیابی این مدل در قالب مثال‌های عددی واقعی پرداختیم و مشاهده کردیم که به‌ازای برخی مقادیر ثابت از پیش تعیین‌شده برای یک پارامتر ستیغی، با افزایش پارامتر ستیغی دیگر، روند صعودی یا نزولی در دقت پیشگویی به دست می‌آید. در نهایت با معرفی شاخص‌های نیکویی برازش، مدل رگرسیون ستیغی دوپارامتری فازی را با مدل رگرسیون فازی معمولی مقایسه کردیم.

جدول۲. مقایسهٔ رگرسیون ستیغی فازی و رگرسیون فازی در داده‌های سیمان پرتلند با استفاده از شاخص MPE

ردیف	X_1	X_2	X_3	X_4	Y	$\hat{Y}_1$ رگرسیون فازی	$\hat{Y}_2$ رگرسیون ستیغی فازی	$d^2(Y,\hat{Y}_1)$	$d^2(Y,\hat{Y}_2)$
۱	۷	۲۶	۶	۶۰	(۷۸/۵, ۱۹/۶۲۵)	(۷۹/۱۵۷, ۱۹/۷۸۹)	(۷۸/۵۳۹, ۱۹/۶۳۴)	۰/۴۳۶	۰/۰۰۱
۲	۱	۲۹	۱۵	۵۲	(۷۴/۳, ۱۸/۵۷۵)	(۷۲/۲۷۹, ۱۸/۰۶۹)	(۷۲/۷۲۵, ۱۸/۱۸۱)	۴/۱۲۴	۲/۵۰۴
۳	۱۱	۵۶	۸	۲۰	(۱۰۴/۳, ۲۶/۰۷۵	(۱۰۴/۴۹۸, ۲۶/۱۲۴)	(۱۰۵/۹۶۹, ۲۶/۴۹۲)	۰/۰۳۹	۲/۸۱۴
۴	۱۱	۳۱	۸	۴۷	(۸۷/۶, ۲۱/۹)	(۸۸/۷۴۳, ۲۲/۱۸۵)	(۸۹/۲۹۸, ۲۲/۳۲۴)	۱/۳۲۱	۲/۹۱۴
۵	۷	۵۲	۶	۳۳	(۹۵/۹, ۲۳/۹۷۵)	(۹۶/۰۷۰, ۲۴/۰۱۷)	(۹۵/۷۲۴, ۲۳/۹۳۱)	۰/۰۲۹	۰/۰۱۳
۶	۱۱	۵۵	۹	۲۲	(۱۰۹/۲, ۲۷/۳)	(۱۰۵/۰۵۰, ۲۶/۲۶۲)	(۱۰۵/۲۶۰, ۲۶/۳۱۵)	۱۷/۴۰۲	۱۵/۶۸۶
۷	۳	۷۱	۱۷	۶	(۱۰۲/۷, ۲۵/۶۷۵)	(۱۰۴/۲۴۲, ۲۶/۰۶۰)	(۱۰۴/۰۸۷, ۲۶/۰۲۱)	۲/۴۰۳	۱/۹۴۴
۸	۱	۳۱	۲۲	۴۴	(۷۲/۵, ۱۸/۱۲۵)	(۷۵/۸۰۹, ۱۸/۹۵۲)	(۷۵/۴۹۳, ۱۸/۸۷۳)	۱۱/۰۶۵	۹/۰۵۲
۹	۲	۵۴	۱۸	۲۲	(۹۳/۱, ۲۳/۲۷۵)	(۹۰/۹۳۵, ۲۲/۷۳۳)	(۹۱/۶۲۵, ۲۲/۹۰۶)	۴/۷۳۲	۲/۱۹۵
۱۰	۲۱	۴۷	۴	۲۶	(۱۱۵/۹, ۲۸/۹۷۵)	(۱۱۵/۷۹۶, ۲۸/۹۴۹)	(۱۱۵/۵۹۳, ۲۸/۸۹۸)	۰/۰۱۰	۰/۰۹۵
۱۱	۱	۴۰	۲۳	۳۴	(۸۳/۳, ۲۰/۸۲۵)	(۸۲/۰۷۶, ۲۰/۵۱۹)	(۸۱/۶۲۱, ۲۰/۴۰۵)	۱/۵۱۳	۲/۸۴۶
۱۲	۱۱	۶۶	۹	۱۲	(۱۱۳/۳, ۲۸/۳۲۵)	(۱۱۲/۹۰۱, ۲۸/۲۲۵)	(۱۱۲/۳۳, ۲۸/۰۸۲)	۰/۱۶۰	۰/۹۵۰
۱۳	۱۰	۶۸	۸	۱۲	(۱۰۹/۴, ۲۷/۳۵)	(۱۱۲/۳۱۴, ۲۸/۰۷۸)	(۱۱۱/۷۲۷, ۲۷/۹۳۱)	۸/۵۷۸	۵/۴۷۲
					MPE			۳/۹۸۶۰۴	۳/۵۷۷۷

جدول ۳. مقایسهٔ رگرسیون فازی و رگرسیون ستیغی فازی در داده‌های تولید ناخالص ملی

	ردیف	X_1	X_2	X_3	Y	$\hat{Y}_1$ رگرسیون فازی	$\hat{Y}_2$ رگرسیون ستیغی فازی	$d^2(Y,\hat{Y}_1)$	$d^2(Y,\hat{Y}_2)$
۱	۱/۹	۲/۲	۱/۹	۳/۷	(۲/۳, ۰/۵۷۵, ۰/۸۰۴)	(۲/۲۲۹, ۰/۵۵۷, ۰/۷۸۰)	(۲/۲۵۹, ۰/۵۶۴, ۰/۷۹۰)	۰/۰۰۵۱۵	۰/۰۰۱۷
۲	۱/۸	۲/۲	۲	۳/۸	(۲/۲, ۰/۵۵, ۰/۷۷)	(۲/۲۵۷, ۰/۵۶۴, ۰/۷۹۰)	(۲/۲۲۶, ۰/۵۵۶, ۰/۷۷۹)	۰/۰۰۳۴۷	۰/۰۰۰۷
۳	۱/۸	۲/۴	۲/۱	۳/۶	(۲/۲, ۰/۵۵, ۰/۷۷)	(۲/۲۷۳, ۰/۵۶۸, ۰/۷۹۵)	(۲/۲۲۸, ۰/۵۵۷, ۰/۷۸۰)	۰/۰۰۵۶۷	۰/۰۰۰۹
۴	۱/۸	۲/۴	۲/۱	۳/۶	(۲/۳, ۰/۵۷۵, ۰/۸۰۴)	(۲/۳۴۵, ۰/۵۸۶, ۰/۸۲۰)	(۲/۲۷۳, ۰/۵۶۸, ۰/۷۹۵)	۰/۰۰۲۱۳	۰/۰۰۰۷
۵	۲	۲/۵	۲/۳	۳/۸	(۲/۴, ۰/۶, ۰/۸۴)	(۲/۴۲۸, ۰/۶۰۷, ۰/۸۵۰)	(۲/۴۲۴, ۰/۶۰۶, ۰/۸۴۸)	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۶
۶	۲/۱	۲/۶	۲/۴	۳/۷	(۲/۵, ۰/۶۲۵, ۰/۸۷۵)	(۲/۴۶۸, ۰/۶۱۷, ۰/۸۶۳)	(۲/۴۹۷, ۰/۶۲۴, ۰/۸۷۳)	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۰۰۱
۷	۲/۱	۲/۶	۲/۶	۳/۸	(۲/۶, ۰/۶۵, ۰/۹۰۹)	(۲/۵۳۸, ۰/۶۳۴, ۰/۸۸۸)	(۲/۵۴۲, ۰/۶۳۵, ۰/۸۸۹)	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۳۴
۸	۲/۲	۲/۶	۲/۶	۴	(۲/۶, ۰/۶۵, ۰/۹۰۹)	(۲/۶۰۶, ۰/۶۵۱, ۰/۹۱۲)	(۲/۶۳۵, ۰/۶۵۸, ۰/۹۲۲)	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱۴
۹	۲/۳	۲/۸	۲/۸	۳/۷	(۲/۷, ۰/۶۷۵, ۰/۹۴۵)	(۲/۶۴۱, ۰/۶۶۰, ۰/۹۲۴)	(۲/۷۰۱, ۰/۶۷۵, ۰/۹۴۵)	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۰۰۱
۱۰	۲/۳	۲/۷	۲/۸	۳/۸	(۲/۷, ۰/۶۷۵, ۰/۹۴۵)	(۲/۶۴۵, ۰/۶۶۱, ۰/۹۲۵)	(۲/۷۰۸, ۰/۶۷۷, ۰/۹۴۷)	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۰۱
					MPE			۰/۰۰۲۸۹	۰/۰۰۰۹۶

مراجع

[۱] کلکین نما، مریم ؛ طاهری، سید محمود (۱۳۸۶). رگرسیون فازی بر اساس کمترین قدر مطلق انحرافات. اندیشه آماری، سال ۱۲، شماره ۱ (شماره پیاپی ۲۳) (شماره ویژه دومین کارگاه آمار و احتمال فازی)، صص ۵۹-۶۷.

[۲] میرزایی یگانه، شهره؛ ارقامی، ناصررضا (۱۳۸۶). رگرسیون فازی: مروری بر چند رویکرد. اندیشه آماری، سال ۱۲، شماره ۱ (شماره پیاپی ۲۳) (شماره ویژه دومین کارگاه آمار و احتمال فازی)، صص ۳۵- ۴۷.

[3] Asai, H. (1982). Linear regression analysis with fuzzy model, *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics* , **12**, 903-907.

[4] Hong, D. H. Hwangb, C. Ahna, C. (2004). Ridge estimation for regression models with crisp inputs and Gaussian fuzzy output, *Fuzzy Sets and Systems*, **142**(**2**), 307-319.

[5] Cheng, C. B. Lee, E. S (2001). Fuzzy regression with radial basis function network *Fuzzy Sets and Systems*, **119**(**2**), 291-301.

[6] Hoerl, A. E. Kennard, R. W. (1970). Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems, *Technometrics*, **12**, 55-67,

[7] Farnoosh, R. Ghasemian, J. and Solaymani Fard, O. (2012). A modification on ridge estimation for fuzzy nonparametric regression, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **9**(**2**) , 75-88.

[8] Balasundaram, S., Kapil (2011). Weighted fuzzy ridge regression analysis with crisp inputs and triangular fuzzy outputs *International Journal of Advanced Intelligence Paradigms*, **3**(**1**), 67-81.

[9] Zadeh, L. A. and et.al, (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility *Fuzzy sets and systems* , **1**(**3-28**), 61-72.

[10] Xu, R. (1991). A linear regression model in fuzzy environment. *Advance in Modelling Simulation*, **27**(**2**).

[11] Montgomery, Douglas C. Elizabeth A. Peck (1992). *Introduction to linear regression analysis*, Wiley and Sons.

[12] Woods, H., Steinour, H. H., & Starke, H. R. (1932). Effect of composition of Portland cement on heat evolved during hardening. *Industrial & Engineering Chemistry* , **24**(**11**), 1207-1214.

[13] Akdeniz, F. Erol, H. (2003). Mean squared error matrix comparisons of some biased estimators in linear regression, *Communications in Statistics-Theory and Methods* , **32**(**12**), 2389-2413.